ว.วิทย. มข. 41(3) 671-678 (2556) KKU Sci. J. 41(3) 671-678 (2013)

สมการเชิงฟังก์ชันที่มีผลเฉลยเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Functional Equations with Trigonometric Function Solutions

จรินทร์ทิพย์ เฮงคราวิทย์[1]

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้ศึกษาปัญหาการจำแนกฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้เทคนิคของแคนแนพพัน ในปี ค.ศ. 2003 ซึ่งได้หาผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชันที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับเอกลักษณ์บางเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ กล่าวคือ ฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์ ได้แก่ $f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$ เมื่อฟังก์ชันคำตอบที่พิจารณาเป็นฟังก์ชันที่ส่งจากกรุปใด ๆ ไปยังเซตย่อยของเซตของจำนวนเชิงซ้อนโดยไม่มีเงื่อนไขใด ๆ เราใช้เทคนิคของแคนแนพพันเพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงฟังก์ชัน $f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$ ซึ่งเมื่อรวมกับผลงานของแคนแนพพันจะได้การจำแนกที่สมบูรณ์ยิ่งขึ้นของฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์และโคไซน์

ABSTRACT

This article aims to treat the problem of characterizing the trigonometric sine and cosine function. Our method arises from Kannappan's work of 2003 which solved the functional equation $f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$ for functions whose domain is a group and whose range is a subset of the complex field without any additional conditions. We use Kannappan's technique to determine the general solutions of the functional equation $f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$ which, together with Kannappan's result, give a complete characterization of the trigonometric sine and cosine functions.

คำสำคัญ: สมการเชิงฟังก์ชัน ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

Keywords: Functional equations, Trigonometric function, Sine and cosine functions

[1] ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ถนนพหลโยธิน ต.คลองหนึ่ง อ.คลองหลวง จ.ปทุมธานี 12121

E-mail: charinthip@mathstat.sci.tu.ac.th, hengkrawit_c@hotmail.com

บทนำ

เรามีความคุ้นเคยกับสมการที่อยู่ในรูปทั่ว ๆ ไป เช่น $x^2+2x+1=0$, $\log(3y+2)-\log(y-1)=1$ หรือ $3\cdot 9^x+3\cdot 9^{-x}=10$ เป็นต้น ซึ่งสมการดังกล่าวข้างต้นมีตัวแปรหรือตัวไม่ทราบค่าคือ x และ y แต่ถ้าสมการใดมีตัวไม่ทราบค่าหรือตัวแปรเป็นฟังก์ชัน เราจะเรียกสมการดังกล่าวนั้นว่า *"สมการเชิงฟังก์ชัน" (functional equation)* เช่น

$$A(x+y)=A(x)+A(y) \tag{1.1}$$

$$E(x+y)=E(x)E(y) \tag{1.2}$$

ทั้งสองสมการข้างต้นนี้เป็นสมการเชิงฟังก์ชันที่มีชื่อเสียงและเป็นที่รู้จักกันเป็นอย่างมาก ในชื่อว่า *"สมการเชิงฟังก์ชันของโคชี"* (Cauchy's functional equations) และเนื่องจากผลเฉลยของสมการ (1.1) และ (1.2) คือ ฟังก์ชันการบวก (additive function) และฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential function) ตามลำดับ ดังนั้นสมการ (1.1) และ (1.2) อาจเรียกอีกชื่อว่า *"สมการเชิงฟังก์ชันการบวก"* (additive functional equation) และ *"สมการเชิงฟังก์ชันเลขชี้กำลัง"* (exponential functional equation) ตามลำดับ (Aczel, 1966; Aczel and Dhombres, 1988; Kannappan, 2009)

สำหรับงานวิจัยทางด้านสมการเชิงฟังก์ชันนั้นเริ่มต้นเมื่อ 200 ปีที่ผ่านมาและยังคงได้รับความนิยมอย่างต่อเนื่อง ซึ่งงานวิจัยส่วนใหญ่จะศึกษาเกี่ยวกับ "การแก้สมการเพื่อหาผลเฉลยหรือฟังก์ชันคำตอบที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันที่พิจารณา" (Flett, 1963; Kannappan, 1968; Kannappan, 2003) และสาเหตุที่นักคณิตศาสตร์ให้ความนิยมและศึกษางานวิจัยเกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชันนั้น อาจเนื่องมาจากว่าเราสามารถนำงานวิจัยทางด้านนี้ไปประยุกต์ใช้กับสาขาอื่น ๆ ได้ เช่น นักฟิสิกส์นำสมการเชิงฟังก์ชันไปสร้างแบบจำลองเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ หรือนำไปสร้างเครือข่ายประสาท (neural network) หรือนักเศรษฐศาสตร์นำไปช่วยแก้ปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ในเรื่องของราคาและปริมาณ เป็นต้น

โดยปกติแล้วการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน คือ การหาฟังก์ชันคำตอบหรือผลเฉลยที่สอดคล้องกับสมการเงื่อนไขที่กำหนดมาให้ ซึ่งการแก้สมการเชิงฟังก์ชันนั้นไม่มีหลักเกณฑ์ตายตัว อีกทั้งยังยากที่จะคาดเดาว่าจะแก้ด้วยวิธีใด แต่เทคนิคหรือวิธีการแก้สมการที่พบบ่อย ได้แก่ การแทนค่าตรง ๆ การเปลี่ยนตัวแปร การใช้เทคนิคบางประการของฟังก์ชัน การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ การใช้เอกลักษณ์ หรือการตรวจพินิจ ซึ่งรายละเอียดของวิธีการต่าง ๆ นั้นสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ในหนังสือสมการและสมการเชิงฟังก์ชัน (ภัทธิรา และวัชรพล, 2548)

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่แสดงการแก้สมการโดยการใช้เทคนิคการแทนค่า

ตัวอย่าง 1 จงหา $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $f(x+y)=f(y)+x$ สำหรับทุก $x,y\in\mathbb{R}$

วิธีทำ เริ่มต้นโดยการแทนค่า $y=0$ ในสมการ ได้ว่า

$$f(x)=f(0)+x=c+x \text{ สำหรับทุก } x\in\mathbb{R} \text{ โดยที่ } c=f(0)$$

จึงได้ว่า ถ้า $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้องกับสมการ $f(x+y)=f(y)+x$ สำหรับทุก $x,y\in\mathbb{R}$ แล้วฟังก์ชัน f ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการดังกล่าวข้างต้นจะอยู่ในรูป $f(x)=x+c$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{R}$ และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ข้อควรระวังในการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน คือ จะต้องตรวจสอบว่าคำตอบที่ได้นั้นเป็นคำตอบที่แท้จริงหรือไม่ เช่นเดียวกับการแก้สมการโดยทั่วไป

นอกจากสมการเชิงฟังก์ชันของโคชีที่กล่าวไว้ข้างต้นแล้ว ยังมีสมการเชิงฟังก์ชันที่เป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายอยู่อีกหลายสมการ แต่ที่ผู้เขียนจะแนะนำในบทความนี้ คือ สมการเชิงฟังก์ชันที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับเอกลักษณ์บางเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ได้แก่ ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

การแก้สมการเชิงฟังก์ชันดังกล่าวนั้น เริ่มต้นในปี ค.ศ. 1769 โดย ดาลองแบร์ (D'Alembert) (Aczek, 1966) ได้ตั้งปัญหาเกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \tag{1.3}$$

ซึ่งเรียกว่า *"สมการเชิงฟังก์ชันของดาลองแบร์"* (D'Alembert functional equation) นอกจากนี้ยังสังเกตได้ว่าสมการ (1.3) เป็นสมการเชิงฟังก์ชันที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับเอกลักษณ์บางเอกลักษณ์ของฟังก์ชันโคไซน์ กล่าวคือ

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos(x)\cos(y)$$

ดังนั้นบางครั้งเราอาจเรียกสมการ (1.3) ว่า *"สมการเชิงฟังก์ชันโคไซน์"* (cosine functional equation)

ต่อมาในปี ค.ศ. 1821 โคชี (Cauchy) (Aczel, 1966) ได้แสดงว่าผลเฉลยของสมการ (1.3) ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ส่งจากเซตของจำนวนจริงไปยังเซตของจำนวนจริง คือ

$$f(x)=\cosh(\alpha x) \text{ หรือ } f(x)=\cos(\beta x)$$

เมื่อ α และ β เป็นค่าคงตัวใด ๆ และตั้งแต่นั้นเป็นต้นมา การหาผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชันที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติก็ได้รับความสนใจขึ้นมาทันที เห็นได้จากการมีผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาหรือการหาผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชันดังกล่าวเป็นจำนวนมาก (Aczel, 1966; Aczel and Dhombres, 1988; Flett, 1963; Kannappan, 1968; 2003; 2009) ในบทความนี้จะขอแนะนำแค่บางผลงาน กล่าวคือ ในปี ค.ศ. 1963 เฟลทท์ (Flett) ได้แสดงว่าฟังก์ชันคำตอบ f ของสมการ (1.3) ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดจุดหนึ่ง ที่ส่งจากเซตของจำนวนเชิงซ้อนไปยังเซตของจำนวนเชิงซ้อน จะต้องอยู่ในรูป

$$f\equiv 0 \text{ หรือ } f\equiv 1 \text{ หรือ } f(x+iy)=\cosh(\alpha x+\beta y) \text{ เมื่อ } i=\sqrt{-1}$$

หลังจากนั้นได้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านพยายามแก้สมการเชิงฟังก์ชันของดาลองแบร์เพื่อหาฟังก์ชันคำตอบในรูปแบบอื่น ๆ ภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ ที่ไม่ใช่เพียงแค่เงื่อนไขของความต่อเนื่องของฟังก์ชันเท่านั้น แต่ยังพิจารณาฟังก์ชันคำตอบ f บนโดเมนอื่น ๆ ที่ไม่ใช่เซตของจำนวนจริงหรือเซตของจำนวนเชิงซ้อน (ซึ่งเป็นสิ่งที่มีอิทธิพลต่อรูปแบบของผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชัน) ซึ่งนักคณิตศาสตร์ท่านแรกที่เริ่มศึกษา คือ Kannappan ในปี ค.ศ. 1968 โดยพิจารณากรณีที่โดเมนเป็นกรุป $(G,*)$ ใด ๆ และสมการเชิงฟังก์ชันของดาลองแบร์ คือ

$$f(x*y)+f(x*y^{-1})=2f(x)f(y) \tag{1.4}$$

และได้แสดงว่าภายใต้เงื่อนไข

$$f(x*y*z)=f(x*z*y) \text{ เมื่อ } x,y,z\in G$$

ผลเฉลยของสมการ (1.4) อยู่ในรูป

$$f(x)=\frac{E(x)+E^*(x)}{2}$$

เมื่อ E คือฟังก์ชันเลขชี้กำลังที่ส่งจากกรุป $(G,*)$ ไปยังเซตของจำนวนเชิงซ้อนไม่รวมศูนย์ และ $E^*(x)=\dfrac{1}{E(x)}$

ตัวอย่างต่อไปเป็นตัวอย่างของสมการเชิงฟังก์ชันที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่ามากกว่าหนึ่งฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 2 พิจารณาสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y) \tag{1.5}$$

จะเห็นว่าผลเฉลยหนึ่งที่สอดคล้องกับสมการ (1.5) คือ $f(x)=\cos(x)$ และ $g(x)=\sin(x)$

ยิ่งไปกว่านั้นยังพบว่า ผลเฉลย f และ g ข้างต้นยังสอดคล้องกับอีกสามสมการเชิงฟังก์ชันต่อไปนี้อีกด้วย นั่นคือ

$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y) \tag{1.6}$$

$$g(x+y)=g(x)f(y)+f(x)g(y) \tag{1.7}$$

$$g(x-y)=g(x)f(y)-f(x)g(y) \tag{1.8}$$

สังเกตเห็นว่า สมการ (1.5) – (1.8) มีลักษณะคล้ายคลึงกับเอกลักษณ์ของฟังก์ชันโคไซน์และไซน์

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

ตามลำดับ

ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบันมีผลงานมากมายที่เกี่ยวข้องกับสมการ (1.5) – (1.8) อาทิเช่น Kannappan (2003) ได้แสดงว่าฟังก์ชันคำตอบทั่วไป f และ g ที่ส่งจากอาบีเลียนกรุปที่หารลงตัวด้วย 2 (a two-divisible abelian group) ไปยังเซตของจำนวนเชิงซ้อนของสมการ (1.5) คือ

$$f(x) = b_0\left(E(x) - E^*(x)\right) \text{ และ } g(x) = \frac{1}{2}\left(E(x) + E^*(x)\right)$$

เมื่อ $b_0^2 = -\frac{1}{4}$ และ E คือฟังก์ชันเลขชี้กำลังที่ส่งจากกรุป $(G,*)$ ไปยังเซตของจำนวนเชิงซ้อนไม่รวมเซตของศูนย์ และ $E^*(x) = \frac{1}{E(x)}$ ยิ่งไปกว่านั้นยังพบว่าผลเฉลยทั่วไป f และ g ข้างต้นยังสอดคล้องกับสมการ (1.6) (1.7) และ (1.8) อีกด้วย

สำหรับผลเฉลยทั่วไป f และ g ที่สอดคล้องกับสมการ (1.7) และ (1.8) นั้นพบได้ใน Aczel and Dhombres (1988) กล่าวคือ ผลเฉลยทั่วไป f และ g ที่ส่งจากกรุปใด ๆ ไปยังเซตของจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ (1.7) อยู่ใน 3 รูปแบบต่อไปนี้

1. f เป็นฟังก์ชันใด ๆ และ $g(x) \equiv 0$ หรือ
2. $f(x) = \frac{E_1(x) + E_2(x)}{2}$ และ $g(x) = \frac{E_1(x) - E_2(x)}{2\beta}$ หรือ
3. $f(x) = E(x)$ และ $g(x) = E(x)A(x)$

เมื่อ E E_1 และ E_2 เป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง A เป็นฟังก์ชันเชิงการบวก และ β เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ และ ผลเฉลยทั่วไป f และ g ที่ส่งจากอาบีเลียนกรุปใด ๆ ไปยังเซตของจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ (1.8) อยู่ใน 3 รูปแบบต่อไปนี้

1. f เป็นฟังก์ชันใด ๆ และ $g(x) \equiv 0$ หรือ
2. $f(x) = \frac{1}{2}\left(E(x) + E^*(x)\right) + \frac{\beta}{2}\left(E(x) - E^*(x)\right)$ และ $g(x) = \frac{\gamma}{2}\left(E(x) - E^*(x)\right)$ หรือ
3. $f(x) = 1 + \gamma A(x)$ และ $g(x) = A(x)$

เมื่อ E และ E^* เป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง A เป็นฟังก์ชันเชิงการบวก และ γ กับ β เป็นจำนวนเชิงซ้อน แต่ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1.6) เท่าที่ความสามารถของผู้เขียนจะรวบรวมได้นั้นยังไม่พบนักคณิตศาสตร์ท่านใดศึกษา ดังนั้นเพื่อความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น ในบทความนี้จะหาผลเฉลยทั่วไป f และ g ที่ส่งจากอาบีเลียนกรุป $(G,+)$ ใด ๆ ไปยังเซตของจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ (1.6) ซึ่งเมื่อรวมกับผลงานของแคนแนพพันจะได้การจำแนกที่สมบูรณ์ยิ่งขึ้นของฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์และโคไซน์

การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1.6)

ถ้า $g(x) \equiv 0$ แล้วสมการ (1.6) คือ $f(x+y) = f(x)f(y)$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ต่อไปสมมติว่า $g(x) \not\equiv 0$ และให้ $\alpha \in G$ ที่ $g(\alpha) \neq 0$ โดยสมการ (1.6) ได้ว่า

$$\begin{aligned} f\left((x+y)+z\right) &= f(x+y)f(z) - g(x+y)g(z) \\ &= f(x)f(y)f(z) - g(x)g(y)f(z) - g(x+y)g(z) \end{aligned} \tag{1.9}$$

และ

$$\begin{aligned} f\big(x+(y+z)\big) &= f(x)f(y+z)-g(x)g(y+z) \\ &= f(x)f(y)f(z)-f(x)g(y)g(z)-g(x)g(y+z) \end{aligned} \tag{1.10}$$

จาก (1.9) และ (1.10) ได้ว่า

$$g(x)g(y)f(z)+g(x+y)g(z)=f(x)g(y)g(z)+g(x)g(y+z)$$

นั่นคือ

$$g(x+y)=g(x)h(y)+g(y)f(x) \tag{1.11}$$

เมื่อ $h(y)=\dfrac{g(y+z)-g(y)f(z)}{g(z)}$ โดยที่ $g(z)\neq 0$

อาศัยเทคนิคการเปลี่ยนตัวแปร ได้ว่า

$$g(x+y)=g(y)h(x)+g(x)f(y) \tag{1.12}$$

จาก (1.11) ได้ว่า $g(x)h(y)+g(y)f(x)=g(y)h(x)+g(x)f(y)$

ดังนั้น $g(x)\big[h(y)-f(y)\big]=g(y)\big[h(x)-f(x)\big]$

จากสมการข้างต้น ให้ $y=\alpha$ ได้ว่า $h(x)=\gamma g(x)+f(x)$ เมื่อ $\gamma:=\dfrac{h(\alpha)-f(\alpha)}{g(\alpha)}$

จากสมการ (1.11) และ (1.12) ได้ว่า

$$2g(x+y)=g(x)\big[h(y)+f(y)\big]+g(y)\big[h(x)+f(x)\big] \tag{1.13}$$

ต่อไปนิยามฟังก์ชัน $\mathcal{F}:G\to\mathbb{C}$ โดย $\mathcal{F}(x)=\dfrac{h(x)+f(x)}{2}$

ดังนั้นสมการ (1.13) กลายเป็น

$$g(x+y)=g(x)\mathcal{F}(y)+g(y)\mathcal{F}(x) \tag{1.14}$$

สังเกตว่าสมการ (1.14) คล้ายกับสมการ (1.7) ซึ่งเราทราบผลเฉลยทั่วไป ดังที่ได้กล่าวไว้ในส่วนของบทนำข้างต้น ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1.14) จึงอยู่ใน 2 รูปแบบต่อไปนี้

1. $\mathcal{F}(x)=E(x)$ และ $g(x)=E(x)A(x)$ หรือ
2. $\mathcal{F}(x)=\dfrac{E_1(x)+E_2(x)}{2}$ และ $g(x)=\dfrac{E_1(x)-E_2(x)}{2\beta}$

เมื่อ E E_1 และ E_2 เป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง A เป็นฟังก์ชันเชิงการบวก และ β เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์

แต่เนื่องจาก $h(x)=\gamma g(x)+f(x)$ และ $\mathcal{F}(x)=\dfrac{h(x)+f(x)}{2}$ จึงได้ว่า $\mathcal{F}(x)=f(x)+\dfrac{\gamma}{2}g(x)$

หรือได้ว่า
$$f(x)=\mathcal{F}(x)-\frac{\gamma}{2}g(x) \tag{1.15}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1.6) อยู่ใน 2 รูปแบบต่อไปนี้

1. เมื่อแทนค่า $\mathcal{F}(x)=E(x)$ และ $g(x)=E(x)A(x)$ ใน (1.15) ได้ว่า $f(x)=E(x)\left(1-\frac{\gamma A(x)}{2}\right)$
   หรือ
2. เมื่อแทนค่า $\mathcal{F}(x)=\frac{E_1(x)+E_2(x)}{2}$ และ $g(x)=\frac{E_1(x)-E_2(x)}{2\beta}$ ใน (1.15) ได้ว่า
   $f(x)=E_1(x)\left(\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{4\beta}\right)+E_2(x)\left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{4\beta}\right)$

แทนค่าดังกล่าวข้างต้นลงในสมการ (1.6) ได้ว่า
$$\left(\frac{\gamma^2}{4}-1\right)E(x)E(y)A(x)A(y)=0 \tag{1.16}$$

ต่อไปแทนค่า $y=-x$ ใน (1.16) และเพราะว่า $E(-x)=\frac{1}{E(x)}$ และ $A(-x)=-A(x)$ จึงได้ว่า
$$0=\left(\frac{\gamma^2}{4}-1\right)E(x)E(-x)A(x)A(-x)=\left(\frac{\gamma^2}{4}-1\right)\left(-A(x)^2\right)$$

นั่นคือ $\left(\frac{\gamma^2}{4}-1\right)=0$ หรือ $A(x)=0$

ถ้า $A(x)=0$ แล้ว $g(x)\equiv 0$ และ $f(x)=E(x)$

ถ้า $\frac{\gamma^2}{4}-1=0$ แล้ว $\gamma=\pm 2$ ดังนั้นสมการ (1.15) กลายเป็น $f(x)=E(x)\left(1\pm A(x)\right)$ และ $g(x)=E(x)A(x)$

บทสรุป

โดยใช้เทคนิคของแคนแนพพัน ในปี 2003 พบว่าผลเฉลยทั่วไป f และ g ที่ส่งจากอาบีเลียนกรุปใด ๆ ไปยังเซตของจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ (1.6) อยู่ในรูป

f เป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และ $g(x)\equiv 0$

หรือ $f(x)=E(x)\left(1\pm A(x)\right)$ และ $g(x)=E(x)A(x)$

เมื่อ E เป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และ A เป็นฟังก์ชันเชิงการบวก จากผลลัพธ์ดังกล่าวซึ่งเมื่อรวมกับผลงานของแคนแนพพันจะได้การจำแนกที่สมบูรณ์ยิ่งขึ้นของฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์และโคไซน์

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนได้รับทุนสนับสนุนการวิจัย กองทุนวิจัยมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

เอกสารอ้างอิง

ภัททิรา เรืองสินทรัพย์ และ วัชรพล พิมพ์เสริฐ. (2548). อสมการและสมการเชิงฟังก์ชัน. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพ: มูลนิธิ สอวน.

Aczel, J. (1966). Lectures on Functional Equation and their Applications. NewYork: Academic Press.

Aczel, J. and Dhombres, J. (1988). Functional Equations in Several Variables. Cambridge: Cambridge University Press.

Flett, T.M. (1963). Continuous solutions of the functional equation $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$. Amer. Math. Monthly. 70: 392–397.

Kannappan, Pl. (1968). The functional equations $f(xy)+f(xy^{-1})=2f(x)f(y)$ for groups. Proc. Amer. Math. Soc. 19: 69-74.

Kannappan, Pl. (2003). Klee's trigonometry problem, Amer. Math. Monthly. 110: 940-944.

Kannappan, Pl. (2009). Functional Equations and Inequalities with Applications.NewYork: Springer.

❑❑❑❑❑