ว.วิทย. มข. 41(3) 664-670 (2556) KKU Sci. J. 41(3) 664-670 (2013)

ผลเฉลยฟังก์ชันกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันเชิงทำซ้ำกับบางเงื่อนไข

Power Function Solutions of Iterative Functional Differential Equations with Some Conditions

ศุกระวรรณ มะเวชะ (ตาลวงค์)[1]

บทคัดย่อ

สมการเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันเชิงทำซ้ำเกิดขึ้นในหลายปัญหาในด้านฟิสิกส์และวิทยาศาสตร์อื่น ๆ บทความนี้เกี่ยวข้องกับ 3 สมการต่อไปนี้ $x^{(n)}(z)=Az^{j}\left(x^{[m]}(z)\right)^{k}$, $x^{(n)}(z)=A\prod_{i=1}^{l}\left(x^{[m_i]}(q_iz)\right)^{k_i}$ และรูปแบบทั่วไปมากขึ้น $\prod_{i=1}^{a}\left(x^{(n_i)}(p_iz)\right)^{N_i}=Az^{j}\prod_{i=1}^{b}\left(x^{[m_i]}(q_iz)\right)^{M_i}$ เราจะพิจารณาการมีจริงของผลเฉลยกำลังที่มีรูปแบบ $x(z)=\lambda z^{\mu}$ สำหรับ 3 สมการนั้นกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ โดยค้นพบว่าผลเฉลยกำลัง เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันเชิงทำซ้ำ

ABSTRACT

Iterative functional differential equations occur in many problems of physics and other sciences. This article is concerned with three equations $x^{(n)}(z)=Az^{j}\left(x^{[m]}(z)\right)^{k}$, $x^{(n)}(z)=A\prod_{i=1}^{l}\left(x^{[m_i]}(q_iz)\right)^{k_i}$ and a more general equation $\prod_{i=1}^{a}\left(x^{(n_i)}(p_iz)\right)^{N_i}=Az^{j}\prod_{i=1}^{b}\left(x^{[m_i]}(q_iz)\right)^{M_i}$. We consider the existence of power solutions of the form $x(z)=\lambda z^{\mu}$ for those three equations with given conditions.

คำสำคัญ: สมการเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันเชิงทำซ้ำ ฟังก์ชันกำลัง

Keywords: Iterative functional differential equations, Power functions

[1]สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

E-mail: ktsukraw@kmitl.ac.th

บทนำ

พิจารณารูปแบบของผลเฉลยที่เป็นฟังก์ชันกำลัง (power functions) ของสมการเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันเชิงทำซ้ำ (iterative functional differential equations) สำหรับบางเงื่อนไขของสมการ ซึ่งเป็นสมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์และการทำซ้ำของฟังก์ชัน ให้ $x = x(z)$ เป็นฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน **การทำซ้ำ** (iterates) ของฟังก์ชัน $x(z)$ นิยามโดย $x^{[0]}(z) = z, x^{[1]}(z) = x(z), x^{[2]}(z) = x(x(z)), x^{[3]}(z) = x(x(x(z)))$ และ $x^{[n+1]}(z) = x(x^{[n]}(z)))$ ให้สัญลักษณ์ $x^{(n)}(z)$ แทน อนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน $x(z)$ นักคณิตศาสตร์ได้พยายามศึกษาว่าสมการเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันเชิงทำซ้ำมีผลเฉลยจริงและหารูปแบบของผลเฉลยนั้น นักคณิตศาสตร์มากมายสนใจศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันเชิงทำซ้ำรูปแบบ

$$x^{(n)}(t) = H(t, x^{[1]}(t), \ldots, x^{[m]}(t))$$

ซึ่งเกิดขึ้นในปัญหาที่สัมพันธ์กับแบบจำลองการติดเชื้อ (infection model) เริ่มจากเอ็ดเดอร์ (Eder, 1984) เริ่มวิเคราะห์ผลเฉลยของสมการรูปแบบเฉพาะ $x'(z) = x(x(z))$ และ 13 ปีต่อมา Si et al. (1997) ค้นพบรูปแบบผลเฉลยฟังชันกำลังวิเคราะห์ของสมการ $x'(z) = x^{[m]}(z)$ เมื่อ $m \geq 2$ นั่นคือ $x(z) = \beta z^{\gamma}$ เมื่อ β และ γ เป็นค่าคงตัวที่สอดคล้องกับสมการ $\gamma^m = \gamma - 1$ และ $\beta^{\gamma^{m-1}+\cdots+\gamma} = \gamma$ หลังจากนั้น Li et. al. (2001) ได้พิจารณาสมการที่กว้างมากขึ้นนั่นคือ

$$x^{(n)}(z) = Az^j \left(x^{[m]}(z)\right)^k \tag{1}$$

เมื่อ k, m, n เป็นจำนวนนับซึ่ง $m \geq 2$, j เป็นจำนวนนับหรือศูนย์ และ A เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ มีฟังก์ชันกำลัง $x(z) = \lambda z^{\mu}$ เป็นผลเฉลยของ (1) ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 (Li et. al., 2001) ให้ D เป็นโดเมนของระนาบจำนวนเชิงซ้อนซึ่งไม่รวมแกนจริงลบและศูนย์ ให้ $x(z)$ เป็นฟังชันบน D และให้ $\mu_1, \ldots, \mu_m$ เป็นค่ารากที่แตกต่างกันของพหุนาม $f(z) = kz^m - z + n + j$ แล้ว มีฟังก์ชันกำลังวิเคราะห์ไม่เป็นศูนย์ที่แตกต่างกัน m ฟังก์ชันซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (1) บน D และมีรูปแบบ $x_i(z) = \lambda_i z^{\mu_i}$ ซึ่ง $i = 1, \ldots, m$ เมื่อ

$$\lambda_i = \left[\frac{\mu_i(\mu_i - 1)\cdots(\mu_i - n + 1)}{A}\right]^{(1-\mu_i)/(k+n+j-1)}$$

บทพิสูจน์ (Li et. al., 2001) แทน $x(z) = \lambda z^{\mu}$ ในสมการ (1) จะได้

$$\lambda\mu(\mu\text{-}1)\cdots(\mu\text{-}n+1)\mathrm{z}^{\mu\text{-}n} = Az^j(\lambda^{\mu^{m-1}+\cdots+\mu+1}z^{\mu^m})^k$$

หรือ

$$\lambda\mu(\mu\text{-}1)\cdots(\mu\text{-}n+1)\mathrm{z}^{\mu\text{-}n} = A\lambda^{k(\mu^{m-1}+\cdots+\mu+1)}z^{k\mu^m+j} \tag{2}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์สมการ (2) ได้ระบบสมการดังนี้

$$\lambda\mu(\mu\text{-}1)\cdots(\mu\text{-}n+1) = A\lambda^{k(\mu^{m-1}+\cdots+\mu+1)} \tag{3}$$

และ

$$\mu\text{-}n = k\mu^m + j \tag{4}$$

ให้ $f(z) = kz^m - z + n + j$ เป็นฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน
พิจารณาหารากของฟังก์ชัน f เมื่อ z เป็นจำนวนจริง ดังต่อไปนี้

กรณี m เป็นจำนวนคู่ จากสมการ $f'(z) = kmz^{m-1} - 1 = 0$ พบว่าค่าต่ำสุดของ f อยู่ที่ $\rho = \dfrac{1}{\sqrt[m-1]{km}} \in (0,1)$

ดังนั้น $f(z) \geq f(\rho) = \rho\left(\dfrac{1}{m}-1\right) + n + j > \left(\dfrac{1}{m}-1\right) + n + j > 0$ ทุกจำนวนจริง z

กรณี m เป็นจำนวนคี่ $f'(z)$ มี 2 ราก คือ $\pm\rho$

เนื่องจาก $\min_{z\geq-\rho} f(z) = \min\{f(-\rho), f(\rho)\} = f(\rho) > 0$ ดังนั้น f ไม่มีราก ในช่วง $(-\rho,\infty)$
เนื่องจาก $f(-\rho) > 0$ และ $f(-\infty) < 0$ ดังนั้น f มีรากจริงอย่างน้อย 1 ราก ในช่วง $(-\infty,-\rho)$
เนื่องจาก $f'(z) > 0$ ทุก $z < -\rho$ และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง $(-\infty,-\rho)$ ดังนั้น รากจริงของ f มีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้นและเป็นจำนวนลบ
ดังนั้นในแต่ละกรณีสรุปได้ว่า รากจริงของ f ต้องไม่เป็น $0,1,\ldots,n-1$

จะแสดงว่าราก $f(z)$ เป็นรากเชิงเดียวเท่านั้น

สมมติว่าไม่จริง ให้ r เป็นรากซ้ำของ f ดังนั้น r เป็นรากของ f' และ

$$f(z) - \frac{z}{m}f'(z) = \frac{1-m}{m}z + n + j \tag{5}$$

จาก (5) ได้ว่า $r = m(n+j)/(m-1)$ เป็นจำนวนจริงบวก ขัดแย้งกับรากจริงของ f เป็นจำนวนลบเท่านั้น
ให้ $\mu_1,\ldots,\mu_m$ เป็นรากที่แตกต่างกันของสมการ (4)
แทน $\mu = \mu_i$ เมื่อ $i = 1,\ldots,m$ ใน (3) จะได้ $\lambda = \lambda_i$ ที่แตกต่างกัน m ค่าดังนี้

$$\lambda_i = \left[\frac{\mu_i(\mu_i-1)\cdots(\mu_i-n+1)}{A}\right]^{\frac{1}{k(\mu_i^{m-1}+\cdots+\mu_i+1)-1}}$$

$$= \left[\frac{\mu_i(\mu_i-1)\cdots(\mu_i-n+1)}{A}\right]^{\frac{1-\mu_i}{k+n+j-1}} \quad ; i = 1,\ldots,m$$

เนื่องจาก μ_i ไม่เป็น $0,1,\ldots,n-1$ ทุก $i = 1,2,\ldots,m$ ดังนั้น $\lambda_i \neq 0$ ทุก $i = 1,2,\ldots,m$ สรุปได้ว่า $x_i(z) = \lambda_i z^{\mu_i}$ เป็นฟังก์ชันกำลังไม่เป็นศูนย์ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (1) □

โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกับบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 1 จะได้ทฤษฎีบท 2 และ ทฤษฎีบท 3 ดังจะกล่าวต่อไปนี้ ทฤษฎีบท 2 เป็นการขยายสมการ (1) ในเทอมของฟังก์ชันเชิงทำซ้ำ พิสูจน์โดย Li et al. (2002) มีรูปแบบสมการดังนี้

$$x^{(n)}(z) = A\prod_{i=1}^{l}\left(x^{[m_i]}\left(q_i z\right)\right)^{k_i} \tag{6}$$

เมื่อ $n,l,k_1,\ldots,k_l \in \mathbb{N}, m_1,m_2,\ldots,m_l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ ซึ่ง $m_1 > m_2 > \cdots > m_l \geq 2$ และ $A,q_1,\ldots,q_l$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ ต่อมา Talwong et. al. (2004) ได้ขยายเป็นสมการในรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$\left(x^{(n_1)}(p_1 z)\right)^{N_1}\cdots\left(x^{(n_a)}(p_a z)\right)^{N_a} = Az^j\left(x^{[m_1]}\left(q_1 z\right)\right)^{M_1}\cdots\left(x^{[m_b]}\left(q_b z\right)\right)^{M_b} \tag{7}$$

เมื่อ $a,b,N_1,\ldots,N_a,M_1,\ldots,M_b,n_1,\ldots,n_a$, $m_1,\ldots,m_b \in \mathbb{N}$
ซึ่ง $n_1 > n_2 > \cdots > n_a, m_1 > m_2 > \cdots > m_b,\ j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ และ $p_1,\ldots,p_a$, $q_1,\ldots,q_b$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ ซึ่งจะกล่าวในทฤษฎีบท 3

ทฤษฎีบท 2 (Li et al., 2002) ให้ D เป็นโดเมนของระนาบจำนวนเชิงซ้อนซึ่งไม่รวมแกนลบและศูนย์ ให้ $x(z)$ เป็นฟังก์ชันบน D แล้ว มีฟังก์ชันกำลังวิเคราะห์ไม่เป็นศูนย์ที่แตกต่างกัน m ฟังก์ชัน เมื่อ $1 \leq m \leq m_1$ ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (6) และมีรูปแบบ $x_i(z) = \lambda_i z^{\mu_i}$ $,i = 1,2,\ldots,m$ เมื่อ $\mu_1,\ldots,\mu_m$ เป็นรากที่แตกต่างกันของพหุนาม $f(z) = \sum_{i=1}^{k} k_i z^{m_i} - z + n$ และ

$$\lambda_i = \left[\frac{\mu_i\left(\mu_i - 1\right)\cdots\left(\mu_i - n + 1\right)}{AQ_{\mu_i}}\right]^{\frac{1-\mu_i}{k+n-1}}$$

เมื่อ $Q_{\mu_i} = \prod_{j=1}^{l} q_j^{k_j \mu_i^{m_j}}$ $;i = 1,\ldots,m$

บทพิสูจน์ ทำนองเดียวกับการพิสูจน์ของทฤษฎีบท 1 หรือดูจากงานวิจัยของ Li et al. (2002)

ทฤษฎีบท 3 (Talwong et. al., 2004) ให้ D เป็นโดเมนของระนาบจำนวนเชิงซ้อนซึ่งไม่รวมแกนลบและศูนย์ ให้ $x(z)$ เป็นฟังก์ชันบน D กำหนด $s(N,a) = N_1 + \cdots + N_a, s(M,b) = M_1 + \cdots + M_b$ และ $s(nN,a) = N_1 n_1 + \cdots + N_a n_a$ ให้ $\mu_1,\ldots,\mu_m$ เป็นรากที่แตกต่างกันของพหุนาม

$$f(z) = M_1 z^{m_1} + \cdots + M_b z^{m_b} - s(N,a)z + s(Nn,a) + j$$

ถ้า $s(N,a) \leq s(M,b)$ แล้วสมการ (7) มีผลเฉลยเป็นฟังก์ชันกำลังวิเคราะห์ไม่เป็นศูนย์ที่แตกต่างกัน m ฟังก์ชันซึ่งมีรูปแบบ $x_i(z) = \lambda_i z^{\mu_i}$ $,i = 1,2,\ldots,m$ เมื่อ

$$\lambda_i = \left[\frac{\prod_{l=1}^{a} p_l^{N_l \mu_i}}{A \prod_{l=1}^{b} q_l^{M_l \mu_i^{m_l}}} \left(\mu_i\right)_{n_a}^{s(N,a)} \left(\mu_i - n_a\right)_{n_{a-1}-n_a}^{s(N,a-1)} \cdots \left(\mu_i - n_2\right)_{n_1-n_2}^{s(N,1)} \right]^{B_i}$$

และ
$$B_i = \frac{1-\mu_i}{s(M,b)+s(Nn,a)-s(N,a)+j}$$

บทพิสูจน์ อ้างอิงจากการพิสูจน์ของ Talwong et al. (2004)

แทน $x_i(z) = \lambda_i z^{\mu_i}$ ในสมการ (7) จะได้

$$P_\mu \lambda^{s(N,a)} \left(\mu\right)_{n_a}^{s(N,a)} \left(\mu - n_a\right)_{n_{a-1}-n_a}^{s(N,a-1)} \cdots \left(\mu - n_2\right)_{n_1-n_2}^{s(N,1)} z^{s(N,a)\mu - s(Nn,a)} = Q_\mu A \lambda^c z^r \quad (8)$$

เมื่อ $c = \sum_{l=1}^{b} M_l \left(1+\mu+\cdots+\mu^{m_l-1}\right)$

$r = \sum_{l=1}^{b} M_l \mu^{m_l} + j$

$P_\mu = \prod_{l=1}^{a} p_l^{N_l \mu}$

และ $Q_\mu = \prod_{l=1}^{b} q_l^{M_l \mu_i^{m_l}}$

เทียบสัมประสิทธิ์สมการ (8) ได้ระบบสมการดังนี้

$$P_\mu \lambda^{s(N,a)} \left(\mu\right)_{n_a}^{s(N,a)} \left(\mu - n_a\right)_{n_{a-1}-n_a}^{s(N,a-1)} \cdots \left(\mu - n_2\right)_{n_1-n_2}^{s(N,1)} = Q_\mu A \lambda^c \quad (9)$$

และ

$$s(N,a)\mu - s(Nn,a) = \sum_{l=1}^{b} M_l \mu^{m_l} + j \quad (10)$$

ให้ $f(z) = \sum_{l=1}^{b} M_l z^{m_l} - s(N,a)z + s(Nn,a) + j$ เป็นฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน

ต่อไปนี้จะแสดงว่า $f(z)$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริงบวกและศูนย์

เนื่องจาก $f(0) = s(N,a) + j > 0$

ถ้า $0 < z < 1$ แล้ว $f(z) > 0 - s(N,a) + s(Nn,a) + j > 0$

และ ถ้า $z \geq 1$ เนื่องจาก $s(N,a) \leq s(M,b)$ ได้ว่า

$$s(N,a)z \le s(M,b)z \le M_1 z^{m_1} + \cdots + M_b z^{m_b}$$

ดังนั้น $f(z) \ge s(Nn,a) + j > 0$

ให้ $\mu_1,\ldots,\mu_m$ เป็นรากที่แตกต่างกันของ $f(z)$

ดังนั้น $\mu_1,\ldots,\mu_m$ ไม่เป็นจำนวนจริงบวกและศูนย์

แทน $\mu = \mu_i$ เมื่อ $i = 1,\ldots,m$ ใน (9) จะได้ $\lambda = \lambda_i \ne 0$ ที่แตกต่างกัน m ค่า ดังแสดงไว้ในทฤษฎีบท 3 และสรุปได้ว่า $x_i(z) = \lambda_i z^{\mu_i}$ เป็นฟังก์ชันกำลังไม่เป็นศูนย์ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (7) □

ถ้าเงื่อนไข $s(N,a) \le s(M,b)$ ในทฤษฎีบท 3 ไม่จริง จะได้ว่าทฤษฎีบท 3 ไม่จริงด้วยดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง พิจารณาสมการ $\left(x^{(3)}(z)\right)\left(x^{(1)}(z)\right)^3 = x^{[1]}(z)$

สมการนี้มี $s(N,2) = 4 > s(M,1) = 1$ และ $f(z) = z - 4z + 6$ มีรากเดียวคือ $\mu = 2$ ดังนั้นสมการนี้มีผลเฉลยเป็นฟังก์ชันศูนย์ เนื่องจาก $\lambda = 0$ ซึ่งเห็นว่าทฤษฎีบท 3 ไม่จริง

บทตั้งต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นจริงว่าจำนวนของผลเฉลยของสมการ (7) ขึ้นอยู่กับจำนวนการทำซ้ำ m_1 ซึ่งในการพิสูจน์บทตั้งนี้ต้องใช้กฎการเปลี่ยนเครื่องหมายของเดการ์ตดังแสดงในทฤษฎีบท 4

ทฤษฎีบท 4 (กฎการเปลี่ยนเครื่องหมายของเดการ์ต) (Uspensky, 1948; Sheil-small, 2002) ถ้า $p(t)$ เป็นพหุนามจำนวนจริง แล้ว $p(t)$ มีจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงบวก (นับรวมรากซ้ำ) ไม่มากกว่าจำนวนการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายของสัมประสิทธิ์เรียงจากเทอมที่มีระดับขั้นต่ำสุดไปยังเทอมที่มีระดับขั้นสูงสุดของ $p(t)$ และผลต่างของจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงบวกและจำนวนการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายของสัมประสิทธิ์ต้องเป็นจำนวนคู่เสมอ จำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงลบ (นับรวมรากซ้ำ) ของ $p(t)$ คือ จำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงบวก (นับรวมรากซ้ำ) ของ $p(-t)$

บทตั้ง ถ้าเพิ่มสมมติฐานใน ทฤษฎีบท 3 ว่า $m_1, m_2, \ldots, m_b$ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ หรือ m_1 เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ แต่ $m_2,\ldots,m_b$ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ $f(z)$ ไม่มีรากเชิงซ้อนซ้ำกัน แล้ว สมการ (7) มีผลเฉลยเป็นฟังก์ชันกำลังวิเคราะห์ไม่เป็นศูนย์ที่แตกต่างกัน m_1 ฟังก์ชันจริง

บทพิสูจน์ อ้างอิงจากการพิสูจน์ของ Talwong et al. (2004)

จากการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 3 ได้ว่า $f(z)$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริงบวกและศูนย์

ต่อไปจะพิจารณาว่า $f(z)$ มีรากเป็นจำนวนจริงลบหรือไม่

กรณี $m_1, m_2, \ldots, m_b$ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่

เนื่องจาก $f(-z) = M_1 z^{m_1} + \cdots + M_b z^{m_b} + s(N,a)z + s(Nn,a) + j$ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงของเครื่องหมายของสัมประสิทธิ์ โดยกฎการเปลี่ยนเครื่องหมายของเดการ์ตได้ว่า $f(z)$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริงลบ

กรณี m_1 เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ แต่ $m_2,\ldots,m_b$ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่

เนื่องจาก $f(-z)$ มีการเปลี่ยนแปลงของเครื่องหมายของสัมประสิทธิ์ 1 ครั้ง โดยกฎการเปลี่ยนเครื่องหมายของเดการ์ตได้ว่า $f(z)$ มีรากเป็นจำนวนจริงลบ 1 รากเท่านั้น ดังนั้น $f(z)$ มีรากที่แตกต่างกันทั้งหมด m_1 □

ข้อสังเกตจากการพิสูจน์ของบทตั้ง ทราบดีว่าถ้าจำนวนเชิงซ้อน $x+iy; y \neq 0$ เป็นรากของ $f(z)$ สังยุคของจำนวนเชิงซ้อนนั้น คือ $x+iy$ เป็นรากของ $f(z)$ ด้วย ดังนั้นกรณี $m_1, m_2, \ldots, m_b$ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ สรุปได้ว่า $f(z)$ มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันทั้งหมด กรณี m_1 เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ แต่ $m_2, \ldots, m_b$ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ ได้ว่า $f(z)$ มีรากเป็นจำนวนจริงลบ 1 ราก และเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันทั้งหมด $m_1 - 1$ ราก

บทสรุป

จากวิธีการหาผลเฉลยของสมการที่กล่าวไปทั้งหมดนี้ ผู้เขียนคิดว่าสามารถหาผลเฉลยที่มีรูปแบบเป็นฟังก์ชันกำลังไม่เป็นศูนย์ของสมการที่ (7) ได้โดยขยายให้ $M_1, M_2, \ldots, M_b$ เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นศูนย์ได้ เช่น หาผลเฉลยฟังก์ชันกำลังไม่เป็นศูนย์ของสมการ $x'(z) = Az^j \dfrac{1}{x^{[m]}(z)}$ โดยใช้การวิเคราะห์รูปแบบผลเฉลยทำนองเดียวกับการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 3

เอกสารอ้างอิง

Eder, E. (1984). The functional differential equation $x'(t) = x(x(t))$. J. Diff. Eq.. 54: 390-400.

Li, W. R., Cheng, S. S. and Cheng, L. J. (2002). Analytic solution of an iterative differential equations (in Chinese). Math. in Practice and Theory 32: 994-998.

Li, W. R., Cheng, S. S. and Lu, T. T. (2001). Closed form solutions of iterative functional differential equations. Applied Math. E-Notes 1: 1-4.

Sheil-Small, T. (2002). Complex Polynomials. Cambridge studies in advanced mathematics 73. Cambridge University Press. 317.

Si, J.G., Si, W.R. and Cheng, S.S. (1997). Analytic Solutions of an iterative functional differential equation. Computers Math. Applic. 33(6): 47-51.

Talwong, S., Laohakosol, V. and Cheng, S. S. (2004) . Power function solutions of iterative functional differential equations. Applied Math. E-Notes 4: 160-163.

Uspensky, J. V. (1948). Theory of Equation. India: McGraw-Hill. 121-124.

❑❑❑❑❑