ว.วิทย. มข. 41(3) 657-663 (2556) KKU Sci. J. 41(3) 657-663 (2013)

การประยุกต์ทฤษฎีบทจุดตรึง สำหรับการส่งแบบหลายค่าบนปริภูมิเมตริกที่มีกราฟ

The Applications of Fixed Point Theorems for Multi-Valued Mappings on a Metric Space with a Graph

จักรกฤษ กลิ่นเอี่ยม[1]

บทคัดย่อ

บทความนี้มีวัตถุประสงค์หลักเพื่อเรียบเรียงถึงทฤษฎีบทการมีจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่าบางทฤษฎี รวมทั้งยังเชื่อมโยงให้เห็นถึงการนำเอาทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่ามาประยุกต์ใช้กับความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ นั่นคือ ถ้าให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T: X \to 2^X$ เป็นการส่งแบบหลายค่าแล้วเราจะได้เงื่อนไขเพียงพอต่อการมีจุดตรึงสำหรับการส่ง T ในปริภูมิเมตริก X ที่มีกราฟ G ซึ่งประกอบด้วยเซต $V(G)$ ของจุดยอดของกราฟ G ที่เกิดขึ้นพร้อมกับ X และเซตของเส้นเชื่อมของกราฟ G คือ $E(G)=\{(x,y):(x,y)\in X\times X\}$

ABSTRACT

The main purposes of this article are to review some existing fixed point theorems for multi-valued mappings and to introduce the application of these fixed point theorems for a multi-valued mappings to the basic knowledge of graph. Let (X,d) be a metric space and $T: X \to 2^X$ be a multi-valued mapping. We then obtained sufficient conditions for the fixed point existence of the mapping T in the metric space X endowed with a graph G such that the set $V(G)$ of vertices of G coincides with X and the set of edges of G is $E(G)=\{(x,y):(x,y)\in X\times X\}$.

คำสำคัญ: การส่งแบบหลายค่า ปริภูมิเมตริก กราฟ ทฤษฎีบทจุดตรึง

Keywords: Multi-valued mappings, Metric space, Graph, Fixed point theorems

[1] ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร จังหวัดพิษณุโลก 65000

E-mail: chakkridk@nu.ac.th

บทนำ

ทฤษฎีจุดตรึง (fixed point theory) นับเป็นศาสตร์แขนงหนึ่งซึ่งมีความสำคัญมากในทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะในสาขาการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน ให้ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $T: X \to X$ เป็นการส่งใด ๆ เราจะกล่าวว่า การส่ง T มีจุดตรึงถ้ามี $x \in X$ ที่ทำให้ $Tx = x$ ซึ่งปัญหาลักษณะดังกล่าวนี้คือปัญหาของการมีจริง (existence) ของจุดตรึง โดยทั่วไปแล้วอาจมีหรือไม่มีก็ได้ อาทิเช่น การส่ง $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $Tx = x+1$ พบว่า ไม่มีสมาชิก $u \in \mathbb{R}$ ที่จะทำให้ $Tu = u$ นั่นคือ T ไม่มีจุดตรึง คำถามต่อไปคือ ภายใต้เงื่อนไข กฎเกณฑ์ หรือสมบัติใด ที่จะทำให้การส่งที่เราพิจารณานั้น มีจุดตรึงอยู่จริง ซึ่งปัญหาในลักษณะนี้จะมีบทบาทสำคัญ ที่จะนำไปสู่การหาผลเฉลยของปัญหาต่าง ๆ ในทางคณิตศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ ฯลฯ ดังนั้นจึงมีนักคณิตศาสตร์เป็นจำนวนมากที่หันมาศึกษาปัญหาการมีจุดตรึงของการส่งแบบต่าง ๆ ในปริภูมิที่แตกต่างกันไป ดังตัวอย่างเช่น ในงานวิจัยของ Chakkrid และ Suthep (Klin-eam and Suantai, 2010) ที่ได้พิสูจน์การมีจริงของจุดตรึงสำหรับการส่งแบบไม่เชิงเส้นที่เรียกว่า การส่งแอลฟาแบบไม่ขยายในปริภูมิบานาคภายใต้เงื่อนไขและสมบัติบางอย่างบนปริภูมิบานาค (ดูรายละเอียดในเอกสารอ้างอิง) ซึ่งบางท่านอาจยังไม่เห็นถึงการนำทฤษฎีบทจุดตรึงไปเชื่อมโยงกับสาขาอื่น ๆ ของคณิตศาสตร์ แต่ในบทความนี้เราจะเชื่อมโยงให้เห็นถึงบทบาทสำคัญของทฤษฎีการมีจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่าว่าสามารถนำเอาไปประยุกต์กับสาขาอื่น ๆ ของคณิตศาสตร์ได้อย่างลงตัวนั่นก็คือนำมาประยุกต์ใช้เกี่ยวกับสาขาของทฤษฎีกราฟเบื้องต้นนั่นเอง

ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่านั้นได้ถูกพัฒนามาอย่างรวดเร็วและต่อเนื่องหลังจากการตีพิมพ์ผลงานของ Nadler (Nadler, 1969) ซึ่งเป็นการขยายแนวคิดของหลักการหดตัวของบานาค (Banach' contraction principle)

ให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ $CB(X)$ แทนวงศ์ของเซตย่อยปิดที่มีขอบเขตและไม่เป็นเซตว่างของ X และ $K(X)$ แทนวงศ์ของเซตย่อยกระชับที่ไม่เป็นเซตว่างของ X สำหรับ $A, B \in CB(X)$ กำหนดให้ $H(A,B) := \max\{\sup_{b\in B} d(b,A), \sup_{a\in A} d(a,B)\}$ โดยที่ $d(a,B) := \inf_{b\in B} d(a,b)$ คือ ระยะทางจากจุด a ไปยังเซต B แล้วการส่ง H จะถูกเรียกว่า *เมตริกเฮาส์ดอร์ฟ (Hausdorff metric)* ที่เกิดจากเมตริก d

ทฤษฎีบท 1 (Nadler, 1969) ให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์และ $T: X \to CB(X)$ เป็นการส่งแบบหลายค่า ถ้ามีค่าคงที่ $\alpha \in (0,1)$ ซึ่งทำให้ $H(Tx,Ty) \le \alpha d(x,y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ แล้ว การส่ง T จะมีจุดตรึงใน X

หลังจากนั้น Reich (1972) ได้ขยายแนวคิดของ Nadler โดยการนิยามการส่งแบบหลายค่าที่ทั่วไปกว่านั่นคือ

ทฤษฎีบท 2 (Reich, 1972) ให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์และ $T:X\to K(X)$ เป็นการส่งแบบหลายค่า ซึ่ง $H(Tx,Ty)\le \phi(d(x,y))d(x,y)$ สำหรับทุกๆ $x,y\in X$ เมื่อ $\phi:[0,\infty)\to[0,1)$ ซึ่ง $\limsup_{r\to t^+}\phi(r)<1$ สำหรับแต่ละ $t\in(0,\infty)$ แล้ว การส่ง T จะมีจุดตรึงใน X

หลังจากนั้น Reich ได้ทิ้งปัญหาเปิดไว้ว่า ถ้าเราแทนวงศ์ของ $K(X)$ ด้วยวงศ์ของเซตย่อยที่มีขอบเขตและไม่เป็นเซตว่างของ X เขียนแทนด้วย $B(X)$ ทฤษฎีบทข้างต้นยังเป็นจริงอยู่หรือไม่

ต่อมาในปี ค.ศ.1989 Mizoguchi และ Takahashi ได้ทำการพิสูจน์ปัญหาของ Reich เป็นผลสำเร็จ ดังนั้นจากที่กล่าวมาข้างต้นคงพอที่จะเห็นภาพการพัฒนาแนวความคิดที่จะศึกษาหรือค้นคว้าวิจัยความรู้ทางด้านทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่าพอสมควร แต่เราก็ยังคงไม่เห็นว่าทฤษฎีบทดังกล่าวนั้นเกี่ยวข้องกับสาขาอื่นอย่างไร

ดังนั้นในบทความนี้จะเชื่อมโยงให้เห็นถึงการนำเอาทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่านั้นมาประยุกต์กับความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ ซึ่งจะทำให้เราได้เห็นภาพส่วนหนึ่งของการนำทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่านั้นมาประยุกต์กับสาขาอื่น ๆ ของคณิตศาสตร์อย่างลงตัว

นิยามและความรู้พื้นฐาน

ก่อนที่เราจะกล่าวถึงการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่ากับทฤษฎีกราฟเบื้องต้น เราจำเป็นต้องศึกษาความรู้พื้นฐาน กฎ บทนิยาม เบื้องต้นที่ใช้ประกอบการศึกษาบทความนี้ให้เข้าใจมากยิ่งขึ้น ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1 สมาชิก $x\in X$ จะเรียกว่า *จุดตรึง (fixed point)* ของการส่ง T ถ้า $x\in Tx$

ให้ $F(T):=\{x\in X: x\in Tx\}$ แทนเซตของจุดตรึงทั้งหมดของการส่ง T และ $\Delta:=\{(x,x):x\in X\}$ แทน แนวทะแยง (diagonal) ของผลคูณคาร์ทีเซียน $X\times X$

บทนิยาม 2 กราฟ G คือ คู่อันดับ $(V(G),E(G))$ โดยที่ $V(G)$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่างของสมาชิกที่เรียกว่า *จุดยอด (vertex)* และ $E(G)$ เป็นวงศ์จำกัดของคู่ไม่อันดับของสมาชิกใน $V(G)$ ซึ่งเรียกสมาชิกของ $E(G)$ ว่า *เส้นเชื่อม (edge)*

พิจารณากราฟระบุทิศทางหรือไดกราฟ (digraph) G (บนเส้นเชื่อมของกราฟจะระบุทิศทางโดยการใช้หัวลูกศร) ซึ่งเซตของจุดยอดของมันเกิดขึ้นพร้อมกับ X นั่นคือ $V(G)=X$ และ เซตของเส้นเชื่อม มี $\Delta\subseteq E(G)$ เราจะสมมติให้กราฟ G ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และกราฟถ่วงน้ำหนัก (weighted graph) โดยกำหนดค่าน้ำหนักแต่ละเส้นเชื่อมตามระยะทางระหว่างจุดยอดของกราฟ เราใช้สัญลักษณ์ G^{-1} แทนการแปลงผัน (conversion) ของกราฟ G โดยการเปลี่ยนทิศทางตรงข้ามของเส้นในกราฟ G และใช้สัญลักษณ์

$\tilde{G}$ แทน กราฟไม่ระบุทิศทางที่ได้จากกราฟ G โดยการละเว้นทิศทางบนเส้นเชื่อมของกราฟ G เราจะพิจารณาไดกราฟ G ที่เซตของเส้นเชื่อมสมมาตร (symmetric) นั่นคือ $E(\tilde{G}) := E(G) \cup E(G^{-1})$

บทนิยาม 3 จะเรียกกราฟ F ว่าเป็น *กราฟย่อย (subgraph)* ของ G ถ้าทุกจุดยอดของ F เป็นจุดยอดของ G และทุกเส้นเชื่อมของ F เป็นเส้นเชื่อมของ G นั่นคือ $V(F) \subseteq V(G)$ และ $E(F) \subseteq E(G)$

บทนิยาม 4 ให้ x และ y เป็นจุดยอดในกราฟ G แล้ว *วิถี (path)* ใน G จาก x ถึง y ความยาว n โดยที่ $n \in N \cup \{0\}$ คือลำดับ $(x_i)_{i=0}^{n}$ ของ $n+1$ จุดยอดที่แตกต่างกัน นั่นคือ $x_0 = x$ และ $x_n = y$ ซึ่ง $(x_{i-1}, x_i) \in E(G)$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, ..., n$

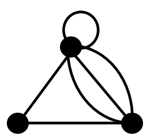
บทนิยาม 5 จำนวนของเส้นเชื่อมในกราฟ G ประกอบเป็นวิถี จะถูกเรียกว่า *ความยาวของวิถี (length of the path)*

บทนิยาม 6 กราฟ G จะถูกเรียกว่าเป็น *กราฟเชื่อมโยง (connected)* ถ้ามีวิถีเชื่อมระหว่างทุก ๆ สองจุดยอดของกราฟ G ส่วนกราฟที่ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยงก็จะถูกเรียกว่า *กราฟไม่เชื่อมโยง (disconnected)* และแต่ละวิถีที่แตกต่างกันของมันจะถูกเรียกว่า *ส่วนประกอบ (component)* ของกราฟ G

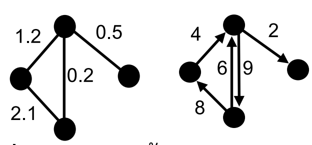
หมายเหตุ ทุก ๆ ส่วนประกอบของ G จะเป็นกราฟย่อยของ G และนอกจากนั้น กราฟ G จะถูกเรียกว่า *กราฟเชื่อมโยงอย่างอ่อน (weakly connected)* ถ้า $\tilde{G}$ เป็นกราฟเชื่อมโยง

ให้ G_x เป็นส่วนประกอบของกราฟ G ซึ่งบรรจุเส้นเชื่อมและจุดยอดทั้งหมดสำหรับบางวิถีในกราฟ G ที่มีจุดเริ่มต้นที่ x สมมติให้กราฟ G ซึ่งมี $E(G)$ สมมาตร แล้วชั้นสมมูล (equivalence class) $[x]_G$ นิยามบน $V(G)$ โดยความสัมพันธ์ R (xRy ก็ต่อเมื่อ มีวิถีเชื่อมจาก x ถึง y) นั่นคือ $V(G_x) = [x]_G$

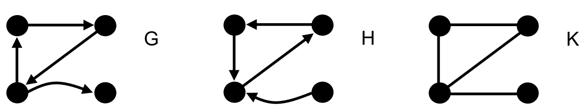
รูปภาพต่อไปนี้เป็นตัวอย่างกราฟแบบต่าง ๆ ตามบทนิยามที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น



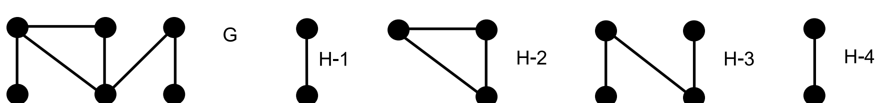
รูปที่ 1 กราฟที่มีเส้นเชื่อมขนาน



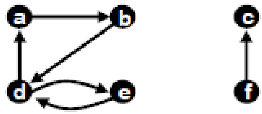
รูปที่ 2 กราฟถ่วงน้ำหนักและไดกราฟ



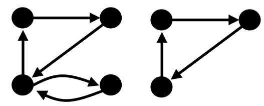
รูปที่ 3 กราฟ H เป็นการแปลงผันของกราฟ G และ กราฟ K เป็นกราฟไม่ระบุทิศทางที่ได้จากไดกราฟ G



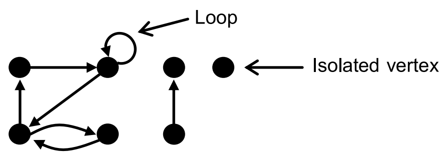
รูปที่ 4 กราฟ H-1, H-2, H-3, H-4 เป็นกราฟย่อยของกราฟ G



รูปที่ 5 a ถึง e เป็นวิถี มีความยาวเท่ากับ 3



รูปที่ 6 ไดกราฟที่เป็นกราฟเชื่อมโยง



รูปที่ 7 ไดกราฟที่มี 3 ส่วนประกอบ และทุก ๆ ส่วนประกอบเป็นกราฟย่อย

หมายเหตุ รายละเอียดเพิ่มเติมเกี่ยวกับความรู้เรื่องกราฟสามารถศึกษาได้ตามเอกสารอ้างอิง

การประยุกต์ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่าบนปริภูมิเมตริกที่มีกราฟ

การประยุกต์ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่ากับสาขากราฟนั้น ก่อนอื่นจะขอกล่าวถึงนิยามการส่งแบบหลายค่าบนปริภูมิเมตริกที่มีกราฟโดยใช้แนวคิดของ Nadler ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 7 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกและ $T: X \to CB(X)$ เป็นการส่งแบบหลายค่า แล้ว การส่ง T จะเรียกว่าเป็น *การส่งแบบหดตัวบนกราฟ* G (เรียกย่อ ๆ ว่า G-contraction) ถ้ามีค่าคงที่ $\alpha \in (0,1)$ ซึ่งทำให้ $H(Tx,Ty) \le \alpha d(x,y)$ สำหรับ $(x,y) \in E(G)$ และถ้า $u \in Tx$ และ $v \in Ty$ ซึ่งทำให้ $d(u,v) \le \alpha d(x,y) + \beta$ สำหรับ $\beta > 0$ แล้ว $(u,v) \in E(G)$

บทนิยาม 8 (Jachymski, 2008) สำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ใน X ถ้า $x_n \to x$ และ $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ สำหรับ $n \in N$ แล้ว $(x_n, x) \in E(G)$ จะเรียกปริภูมิเมตริก X ที่มีกราฟ G นี้ว่ามี *สมบัติ A (property A)*

ก่อนที่จะศึกษาทฤษฎีบทเราจำเป็นต้องทราบถึงบทตั้งที่สำคัญต่อไปนี้

บทตั้ง 9 (Assad and Kirk, 1972) ถ้า $A, B \in CB(X)$ และ $a \in A$ แล้ว สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก α จะมี $b \in B$ ซึ่งทำให้ $d(a,b) \le H(x,y) + \alpha$

บทตั้ง 10 (Assad and Kirk, 1972) ให้ $\{A_n\}$ เป็นลำดับใน $CB(X)$ และ $\lim_{n\to\infty} H(A_n, A) = 0$ สำหรับ $A \in CB(X)$ ถ้า $x_n \in A_n$ และ $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ แล้ว $x \in A$

จากบทนิยามและบทตั้งข้างต้นนำไปสู่ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่าบนปริภูมิเมตริก X ที่มีกราฟ G ดังนี้

ทฤษฎีบท 11 (Beg et al., 2010) ให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ที่มีกราฟ G ซึ่งมีสมบัติ A และให้ $T: X \to CB(X)$ เป็นการส่งแบบหลายค่าบนกราฟ G และ $X_T := \{x \in X : (x,u) \in E(G)\ \exists u \in Tx\}$ แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. สำหรับทุก ๆ $x \in X_T, T|_{[x]_{\tilde{G}}}$ มีจุดตรึง
2. ถ้า $X_T \neq \varnothing$ และ G เป็นกราฟเชื่อมโยงอย่างอ่อน แล้ว การส่ง T มีจุดตรึง
3. $F(T) \neq \varnothing$ ก็ต่อเมื่อ $X_T \neq \varnothing$

ข้อสังเกต ถ้าเราสมมติให้กราฟ G ซึ่งมี $E(G) := X \times X$ แล้วจะเห็นได้ชัดว่า กราฟ G จะเป็นกราฟเชื่อมโยง และทฤษฎีบทดังกล่าวจะกลายมาเป็นทฤษฎีบทของ Nadler และนอกจากนั้นแล้ว ถ้าการส่งดังกล่าวเป็นการส่งแบบค่าเดียว (single valued mapping) แล้วเราก็จะได้ทฤษฎีบทหลักการหดตัวของบานาค

ตัวอย่าง 12 ให้ $X = \{(0,0),(0,0.1),(0.1,0.1)\} := V(G)$ เป็นเซตย่อยของ R^2 และ $E(G) := \{((0.1,0.1),(0,0)),((0,0.1),(0.1,0.1))\}$ ซึ่งมี $\Delta \subseteq E(G)$ ให้ d เป็นเมตริกแบบยูคลิดบน X ถูกนิยามโดย $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ ดังนั้นเราได้ว่า X เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ ให้ $T: X \to CB(X)$ เป็นการส่งแบบหลายค่าที่นิยามโดย

$$Tx = \begin{cases} \{(0,0)\}\ ; x = (0,0), \\ X\ ; x = (0,0.1), \\ \varnothing\ ; x = (0.1,0.1) \end{cases}$$

นั่นคือเราสามารถแสดงได้ว่าสำหรับทุก ๆ $(x,y) \in E(G)$ การส่ง T เป็นการส่งแบบหดตัวบนกราฟ G และสอดคล้องเงื่อนไขทั้งหมดของทฤษฎีบท 11 ดังนั้นการส่ง T จะมีจุดตรึงใน X นั่นคือ $(0,0) \in T(0,0)$ และ $F(T) = \{(0,0)\}$

ตัวอย่าง 13 ให้ $X = \{(0,1),(1,0)\} := V(G)$ เป็นเซตย่อยของ R^2 และ $\Delta := E(G)$ ให้ d เป็นเมตริกแบบยูคลิดบน X ซึ่งถูกนิยามตามข้างบน ดังนั้นจะได้ว่า X เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ ให้ $T: X \to CB(X)$ เป็นการส่งแบบหลายค่าที่นิยามโดย

$$Tx = \begin{cases} \{(1,0)\}\ ; x = (0,1), \\ X\ ; x = (1,0) \end{cases}$$

เนื่องจาก $(1,0) \in X$ นั่นคือมี $(1,0) \in T(1,0)$ ซึ่งทำให้ $((1,0),(1,0)) \in E(G)$ ดังนั้น $X_T \neq \varnothing$ รวมทั้งการส่ง T เป็นการส่งแบบหดตัวบนกราฟ G และสอดคล้องเงื่อนไขของทฤษฎีบท 11 จึงทำให้ได้ว่า การส่ง T จะมีจุดตรึงใน X นั่นคือ $(1,0) \in T(1,0)$ หรือ $F(T) = \{(1,0)\}$

สำหรับตัวอย่างต่อไปแสดงให้เห็นว่าปริภูมิเมตริกที่มีกราฟถึงแม้จะมีสมบัติ A แต่การส่ง T ไม่มีจุดตรึง

ตัวอย่าง 14 ให้ $X = \{0, 0.5, 1\} := V(G)$ เป็นเซตย่อยของจำนวนจริงที่มีเมตริกปกติ นิยามโดย $d(x, y) = |x - y|$ ดังนั้นจะได้ว่า X เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ และให้ $E(G) := \{(1.0.5), (0,1)\}$ ซึ่งมี $\Delta \subseteq E(G)$ นิยามการส่ง $T : X \to CB(X)$ โดย

$$Tx = \begin{cases} \{0.5, 1\} \ ; x = 0, \\ \{0, 1\} \ ; x = 0.5, \\ \{0\} \ ; x = 1 \end{cases}$$

เนื่องจาก $(1, 0.5) \in E(G)$ และ $d(T1, T0.5) = 1, d(1, 0.5) = 0.5$ จะเห็นว่าทุก ๆ สมาชิกใน $E(G)$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขการส่งแบบหดตัวบนกราฟ G ถึงแม้ว่าเงื่อนไขอื่น ๆ จะสอดคล้องกับทฤษฎีบท 11 ก็ตาม แต่การส่ง T ไม่มีจุดตรึง

บทสรุป

จากบทความนี้จะเห็นอีกมุมมองหนึ่งที่เราสามารถนำเอาทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่ามาประยุกต์หรือเชื่อมโยงกับสาขาทฤษฎีกราฟได้อย่างลงตัวและเป็นตัวอย่างหนึ่งที่ชี้ให้เห็นถึงการใช้แนวความคิดทฤษฎีบทจุดตรึงของ Nadler มาประยุกต์กับความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟ ดังนั้นแนวทางในการศึกษาค้นคว้าวิจัยเกี่ยวกับทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่าต่อไปในอนาคตที่น่าสนใจก็คือการขยายแนวคิดของทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่าที่ทั่วไปกว่าทฤษฎีบทจุดตรึงของ Nadler มาประยุกต์บนปริภูมิเมตริกที่มีกราฟยังเป็นจริงหรือไม่ ซึ่งปัญหาเหล่านี้ก็ยังไม่มีนักวิจัยท่านใดให้ข้อสรุปผลของการมีจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่าที่ทั่วไปกว่าของ Nadler บนปริภูมิเมตริกที่มีกราฟ ซึ่งนี่ก็เป็นปัญหาหนึ่งที่น่าสนใจศึกษาต่อไปในอนาคต

เอกสารอ้างอิง

Assad, N.A. and Kirk, W.A. (1972). Fixed point theorems for set valued mappings of contractive type. Pacific J. Math. 43(3): 553-562.

Beg, I., Rashid, A. and Radojevic, S. (2010). The contraction principle for set valued mappings on a metric space with a graph. Comp. Math. Appl. (60): 1214-1219.

Klin-eam, C. and Suantai, S. (2010). Fixed point theorems for α-nonexpansive mappings. Appl. Math. Letters. (23): 728-731.

Jachymski, J. (2008). The contraction principle for mappings on a metric space with a graph. Proc. Amer. Math. Soc. 1(136): 1359-1373.

Mizoguchi, N. and Takahashi, W. (1989). Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces. J. Math. Anal. Appl. 141: 177-188.

Nadler, S.B. (1969). Multivalued contraction mappings. Pacific J. Math. 5: 285-309.

Reich, S. (1972). Fixed points of contractive function. Boll. Unione Math. Ital. 5(4): 26-42.

❑❑❑❑❑