ว.วิทย. มข. 41(3) 648-656 (2556) KKU Sci. J. 41(3) 648-656 (2013)

การจัดการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบโดยใช้ 1-แฟกเตอร์

Round Robin Tournament and One-Factor

ธนวัฒน์ วิเชียรไพศาล[1*] *มงคล ตุ้นทัพไทย*[1] *และ จริยา อุ่ยยะเสถียร*[1]

บทคัดย่อ

การแข่งขันกีฬาแบบทัวร์นาเมนต์ทุกทีมที่เข้าร่วมแข่งขันจะพบกันหมด บางครั้งถ้าเป็นการแข่งขันระหว่างสองทีมในแต่ละนัดจะมีการแบ่งประเภทของทีมออกเป็นทีมเหย้าและทีมเยือน ถ้าจัดตารางการแข่งขันได้ไม่ดีอาจจะทำให้บางทีมเกิดความได้เปรียบเสียเปรียบต่อทีมอื่นได้ ในบทความนี้เราจะนำเสนอวิธีการจัดการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบโดยใช้ความรู้ในเรื่องของ 1-แฟกเตอร์ มาช่วยในการจัดการแข่งขันเพื่อให้เกิดความยุติธรรมสำหรับแต่ละทีม

ABSTRACT

In a sport tournament, each team plays with all other teams. In many two-team sports, there is a home team and an away team in each match. If the tournament has no suitable schedule, some teams will have a disadvantage. This paper constructs a suitable schedule for some sport tournaments by using 1-factorization.

คำสำคัญ: กีฬา ทัวร์นาเมนต์ 1-แฟกเตอร์

Keywords: Sport, Tournament, One-factor

[1] ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เขตปทุมวัน จ.กรุงเทพฯ 10330

*Corresponding Author, E-mail: tanawat.wp@gmail.com

บทนำ

ในการแข่งขันกีฬาบางประเภท เช่น ฟุตบอล บาสเก็ตบอล หมากรุก ฯลฯ มีลักษณะของการจัดการแข่งขันหลายแบบ เช่น แข่งแบบแพ้คัดออก แข่งแบบพบกันหมด สำหรับในบทความนี้เราจะพิจารณาการจัดการแข่งขันที่เป็นแบบพบกันหมดซึ่งมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ทัวร์นาเมนต์ (tournament)

ถ้าเราทำการจัดการแข่งขันอย่างไม่เป็นระเบียบแล้วอาจจะทำให้มีบางทีมที่ต้องแข่งในนัดติด ๆ กันหลายนัดซึ่งทำให้ทีมนั้นเกิดความเสียเปรียบต่อทีมอื่นได้ ดังนั้นเราจะพยายามกระจายการแข่งขันของแต่ละทีมให้ไม่ต้องแข่งในนัดติด ๆ กันโดยแบ่งการแข่งขันออกเป็นรอบ ๆ ซึ่งในหนึ่งรอบแต่ละทีมจะทำการแข่งขันเพียงครั้งเดียว

Premiership 2011/12 Season Results Away Team Home Team	Arsenal	Aston Villa	Blackburn Rovers	Bolton	Chelsea	Everton	Fulham	Liverpool	Manchester City	Manchester United	Newcastle United	Norwich	QPR	Stoke City	Sunderland	Swansea	Tottenham Hotspur	West Bromich Albion	Wigan Athletic	Wolves
Arsenal		3-0	7-1	3-0	0-0	1-0	1-1	0-2	1-0	1-2	2-1	3-3	1-0	3-1	2-1	1-0	5-2	3-0	1-2	1-1
Aston Villa	1-2		3-1	1-2	2-4	1-1	1-0	0-2	0-1	0-1	1-1	3-2	2-2	1-1	0-0	0-2	1-1	1-2	2-0	0-0
Blackburn Rovers	4-3	1-1		1-2	0-1	0-1	3-1	2-3	0-4	0-2	0-2	2-0	3-2	1-2	2-0	4-2	1-2	1-2	0-1	1-2
Bolton	0-0	1-2	2-1		1-5	0-2	0-3	3-1	2-3	0-5	0-2	1-2	2-1	5-0	0-2	1-1	1-4	2-2	1-2	1-1
Chelsea	3-5	1-3	2-1	3-0		3-1	1-1	1-2	2-1	3-3	0-2	3-1	6-1	1-0	1-0	4-1	0-0	2-1	2-1	3-0
Everton	0-1	2-2	1-1	1-2	2-0		4-0	0-2	1-0	0-1	3-1	1-1	0-1	0-1	4-0	1-0	1-0	2-0	3-1	2-1
Fulham	2-1	0-0	1-1	2-0	1-1	1-3		1-0	2-2	0-5	5-2	2-1	6-0	2-1	2-1	0-3	1-3	1-1	2-1	5-0
Liverpool	1-2	1-1	1-1	3-1	4-1	3-0	0-1		1-1	1-1	3-1	1-1	1-0	0-0	1-1	0-0	0-0	0-1	1-2	2-1
Manchester City	1-0	4-1	3-0	2-0	2-1	2-0	3-0	3-0		1-0	3-1	5-1	3-2	3-0	3-3	4-0	3-2	4-0	3-0	3-1
Manchester United	8-2	4-0	2-3	3-0	3-1	4-4	1-0	2-1	1-6		1-1	2-0	2-0	2-0	1-0	2-0	3-0	2-0	5-0	4-1
Newcastle United	0-0	2-1	3-1	2-0	0-3	2-1	2-1	2-0	0-2	3-0		1-0	1-0	3-0	1-1	0-0	2-2	2-3	1-0	2-2
Norwich	1-2	2-0	3-3	2-0	0-0	2-2	1-1	0-3	1-6	1-2	4-2		2-1	1-1	2-1	3-1	0-2	0-1	1-1	2-1
QPR	2-1	1-1	1-1	0-4	1-0	1-1	0-1	3-2	2-3	0-2	0-0	1-2		1-0	2-3	3-0	1-0	1-1	3-1	1-2
Stoke City	1-1	0-0	3-1	2-2	0-0	1-1	2-0	1-0	1-1	1-1	1-3	1-0	2-3		0-1	2-0	2-1	1-2	2-2	2-1
Sunderland	1-2	2-2	2-1	2-2	1-2	1-1	0-0	1-0	1-0	0-1	0-1	3-0	3-1	4-0		2-0	0-0	2-2	1-2	0-0
Swansea	3-2	0-0	3-0	3-1	1-1	0-2	2-0	1-0	1-0	0-1	0-2	2-3	1-1	2-0	0-0		1-1	3-0	0-0	4-4
Tottenham Hotspur	2-1	2-0	2-0	3-0	1-1	2-0	2-0	4-0	1-5	1-3	5-0	1-2	3-1	1-1	1-0	3-1		1-0	3-1	1-1
West Bromich Albion	2-3	0-0	3-0	2-1	1-0	0-1	0-0	0-2	0-0	1-2	1-3	1-2	1-0	0-1	4-0	1-2	1-3		1-2	2-0
Wigan Athletic	0-4	0-0	3-3	1-3	1-1	1-1	0-2	0-0	0-1	1-0	4-0	1-1	2-0	2-0	1-4	0-2	1-2	1-1		3-2
Wolves	0-3	2-3	0-2	2-3	1-2	0-0	2-0	0-3	0-2	0-5	1-2	2-2	0-3	1-2	2-1	2-2	0-2	1-5	3-1	

Image © Paul Edwards Premiership Football Site http://www.pedwards.co.uk

รูปที่ 1 ผลการแข่งขันฟุตบอล F.A. Barclays Premiership 2011 / 2012 (http://www.pedwards.co.uk)

ทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบ (round robin tournament)

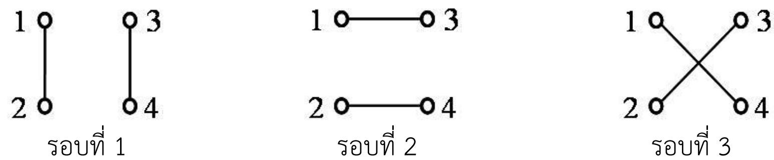
การจัดการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบ (round robin tournament) คือการจัดการแข่งขันโดยแบ่งออกเป็นรอบ ๆ ซึ่งในแต่ละรอบทุกทีมต้องเข้าร่วมการแข่งขัน และเมื่อแข่งขันครบทุกรอบแล้วแต่ละคู่จะได้เจอกันเพียงครั้งเดียวเท่านั้น เช่น มีทีมที่เข้าแข่งขันฟุตบอลทั้งหมด 4 ทีมคือ แมนเชสเตอร์ยูไนเต็ด ลิเวอร์พูล อาร์เซ-นอล และ เชลซี จะได้ว่ามีการแข่งขันทั้งหมด 3 รอบ โดยแต่ละรอบมีการแข่งขัน 2 คู่ เราสามารถจัดการแข่งขันซึ่งเป็นแบบหนึ่งของการแข่งทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบได้ดังนี้

รอบที่ 1: แมนเชสเตอร์ยูไนเต็ด-ลิเวอร์พูล, อาร์เซนอล-เชลซี

รอบที่ 2: แมนเชสเตอร์ยูไนเต็ด-อาร์เซนอล, ลิเวอร์พูล-เชลซี

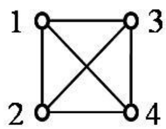
รอบที่ 3: แมนเชสเตอร์ยูไนเต็ด-เชลซี, ลิเวอร์พูล–อาร์เซนอล

ถ้าเราแทนแต่ละทีมด้วยจุดยอด (vertex) โดยแทนทีมแมนเชสเตอร์ยูไนเต็ด ลิเวอร์พูล อาร์เซนอล และเชลซี ด้วยจุดยอด 1 2 3 และ 4 ตามลำดับ และให้เส้นเชื่อม (edge) แทนการจับคู่แข่งขัน จะได้แต่ละรอบออกมาเป็นกราฟ (graph) ที่มี 4 จุดดังรูป



รูปที่ 2 การใช้กราฟแทนการจับคู่แข่งขันสำหรับ 4 ทีม

เมื่อทำการรวมกันทั้ง 3 รอบแล้วจะได้ว่าทั้ง 4 จุดมีเส้นเชื่อมหากันหมดซึ่งเป็นกราฟแบบบริบูรณ์[1] ที่มี 4 จุด ใช้สัญลักษณ์ $\{x,y\}$ แทนเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด x และจุดยอด y



รูปที่ 3 กราฟแบบบริบูรณ์ K_4

ถ้าจำนวนทีมทั้งหมดเป็นจำนวนคี่จะไม่สามารถจัดการแข่งขันแบบทัวร์นาเมนต์ได้เพราะในแต่ละรอบจะมีบางทีมที่ไม่ได้เข้าร่วมการแข่งขัน ดังนั้นจึงพิจารณาเฉพาะการแข่งขันที่มีจำนวนทีมทั้งหมดเป็นจำนวนคู่ สมมติให้จำนวนทีมทั้งหมดมีอยู่ $2n$ ทีม จะได้ว่ามีการแข่งขันอยู่ทั้งหมด $\binom{2n}{2} = \frac{(2n)(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ คู่ และเนื่องจากในแต่ละรอบมีการแข่งขันอยู่จำนวน $\frac{2n}{2} = n$ คู่ ดังนั้นจะมีการแข่งขันทั้งหมด $\frac{n(2n-1)}{n} = 2n-1$ รอบ ถ้าพิจารณาในเชิงของกราฟการจัดการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบคือการแบ่งกราฟแบบบริบูรณ์ K_{2n} ออกเป็น $2n-1$ กราฟย่อยแผ่ทั่ว[2] ซึ่งแต่ละกราฟย่อยแผ่ทั่วมีจำนวนเส้นเชื่อม n เส้น ดังนั้นแต่ละกราฟย่อยแผ่ทั่วจะไม่ใช้เส้นเชื่อมซ้ำกัน เรียกแต่ละกราฟย่อยแผ่ทั่วดังกล่าวของ K_{2n} ว่า 1-แฟกเตอร์ (one-factor) ของ K_{2n} และเรียกเซตของกราฟย่อยแผ่ทั่วดังกล่าวทั้งหมดว่าเป็น การแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ (one-factorization) ของ K_{2n}

สำหรับกราฟแบบบริบูรณ์ที่มีจำนวนจุดเป็นจำนวนคู่จะมีการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ เสมอ ซึ่งเป็นที่รู้จักกันดีดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

[1] กราฟแบบบริบูรณ์ (complete graph) คือกราฟที่แต่ละจุดในกราฟมีเส้นเชื่อมหากันหมด แทนกราฟแบบบริบูรณ์ที่มี n จุดด้วยสัญลักษณ์ K_n

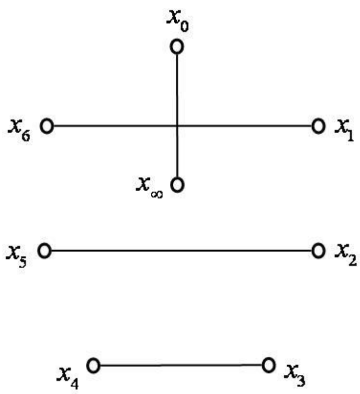
[2] กราฟย่อยแผ่ทั่ว (spanning subgraph) ของกราฟ G คือกราฟย่อยของ G ซึ่งใช้จุดยอดของ G ครบทุกจุด

ทฤษฎีบทที่ 1 กราฟแบบบริบูรณ์ K_{2n} มีการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ ทุกจำนวนนับ n

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x_\infty, x_0, x_1, ..., x_{2n-2}$ เป็นชื่อของจุดยอดใน K_{2n} ซึ่งมีจำนวนจุดยอดอยู่ทั้งหมด $2n$ จุด และสำหรับแต่ละ $0 \le i \le 2n-2$ ให้ F_i เป็นกราฟย่อยแผ่ทั่วของ K_{2n} ซึ่งประกอบไปด้วยเส้นเชื่อมดังนี้

$$\{x_\infty, x_i\}, \{x_{i+1}, x_{i-1}\}, ..., \{x_{i+j}, x_{i-j}\}, ..., \{x_{i+n-1}, x_{i-n+1}\}$$

โดยที่แต่ละตัวห้อยของ x (ยกเว้น ∞) คือจำนวนเต็มภายใต้มอดุโล (modulo) $2n-1$ แล้วจะได้ว่าแต่ละ F_i เป็น 1-แฟกเตอร์ ของ K_{2n}



รูปที่ 4 1-แฟกเตอร์ F_0 ของกราฟ K_8

สังเกตว่าแต่ละเส้นเชื่อมของ K_{2n} ที่มีจุดปลายข้างหนึ่งเป็น x_∞ จะได้ว่า $\{x_\infty, x_i\}$ จะปรากฏเพียงครั้งเดียวและเป็นเส้นเชื่อมใน F_i ต่อมาพิจารณาเส้นเชื่อม$\{x_p, x_q\}$ ถ้า p และ q ไม่เป็น ∞ แล้วเราสามารถเขียน $p+q$ ให้อยู่ในรูป $2i$ ภายใต้มอดุโล $2n-1$ ได้ เพราะว่า $p+q$ หรือ $p+q+2n-1$ เป็นจำนวนเต็มคู่ และเนื่องจากค่า i ซึ่ง $p+q=2i$ มีได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น ดังนั้น $\{x_p, x_q\}$ จะเป็นเส้นเชื่อมของ F_i เพียงตัวเดียวเท่านั้น จึงได้ว่า $\{F_0, F_1, ..., F_{2n-2}\}$ เป็นการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ ของ K_{2n} □

จากทฤษฎีบทที่ 1 ทำให้ได้ว่าถ้าจำนวนทีมทั้งหมดเป็นจำนวนคู่แล้วจะสามารถหาวิธีการจัดการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบได้เสมอ

ทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบโดยมีทีมเหย้า-เยือน (home and away round robin tournament)

ในการแข่งขันกีฬาบางประเภท เช่น ฟุตบอล จะมีการแบ่งทีมออกเป็นสองประเภทคือ ทีมเหย้า (home team) กับ ทีมเยือน (away team) เรียกการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่มีการระบุทีมเหย้าและทีมเยือนว่า ทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบโดยมีทีมเหย้า-เยือน (home and away round robin tournament)

เมื่อพิจารณาในเชิงของกราฟจะได้ว่าการจัดการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบโดยมีทีมเหย้าทีมเยือน เมื่อจำนวนทีมที่เข้าแข่งขันมีอยู่ทั้งหมด $2n$ ทีม คือการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ ของ K_{2n} โดยมีการระบุ

ทิศทางให้กับเส้นเชื่อม ซึ่งจะเรียกว่า การแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์แบบระบุทิศทาง (oriented one-factorization) ของ K_{2n}

รูปที่ 5 โปรแกรมการแข่งขันฟุตบอลสปอนเซอร์ไทยพรีเมียร์ลีก ฤดูกาล 2012 นัดเปิดสนามวันที่ 17 มีนาคม 2555 (http://www.keelamun.com/ตารางการแข่งขันไทยลีค-2012-2013.html)

การเบรก (break) แต่ละครั้งของการแข่งขัน คือการที่มีทีม ๆ หนึ่งเป็นทีมเหย้าหรือทีมเยือนในสองรอบที่อยู่ติดกัน ให้ x เป็นทีม ๆ หนึ่ง จะเรียกการจัดการแข่งขันว่าเป็น ไอดีล (ideal) สำหรับทีม x ถ้าตลอดการแข่งขันนั้นไม่มีการเบรกที่ทีม x เลย เช่น มีทีมที่เข้าแข่งขันทั้งหมด 4 ทีมคือ a, b, c และ d ใช้สัญลักษณ์ $x \rightarrow y$ แทนการแข่งขันระหว่างทีม x กับทีม y โดยทีม x เป็นทีมเหย้าและทีม y เป็นทีมเยือน ทำการจัดการแข่งขันในแต่ละรอบดังนี้

ตารางที่ 1 ตัวอย่างการจัดการแข่งขันแบบมีทีมเหย้า-เยือนสำหรับ 4 ทีม

รอบที่	คู่ที่ 1	คู่ที่ 2
1	$a \rightarrow d$	$c \rightarrow b$
2	$a \rightarrow c$	$b \rightarrow d$
3	$b \rightarrow a$	$c \rightarrow d$

จากตารางการแข่งขัน จะเห็นได้ว่าในรอบที่ 1 กับ 2 ทีม a เป็นทีมเหย้าติดกัน แต่ในรอบที่ 2 กับ 3 ทีม a มีการสลับจากทีมเหย้าเป็นทีมเยือน ดังนั้นจะได้ว่ามีการเบรก 1 ครั้งที่ทีม a สำหรับทีม b มีการเบรก 1 ครั้ง ทีม d มีการเบรก 2 ครั้ง ส่วนทีม c นั้นไม่มีการเบรก เพราะฉะนั้นการจัดการแข่งขันนี้เป็นไอดีลสำหรับทีม c

ถ้าในการแข่งขันมีจำนวนของการเบรกเกิดขึ้นมาก ๆ อาจจะทำให้มีบางทีมเกิดการเสียเปรียบต่อทีมอื่นได้ทั้งในแง่ของรายได้และจำนวนผู้ชม ดังนั้นเราจึงสนใจการจัดการแข่งขันที่ทำให้เกิดจำนวนของการเบรกน้อยที่สุด เพื่อให้เกิดความยุติธรรมมากที่สุดสำหรับแต่ละทีม

ในปี ค.ศ. 1981 เวอร์รา (Werra) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบโดยมีทีมเหย้าทีมเยือน และได้หาว่าแต่ละการจัดการแข่งขันจะเป็นไอดีลสำหรับอย่างมากกี่ทีม ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 การจัดการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบโดยมีทีมเหย้า-เยือนซึ่งมีจำนวนทีมที่เข้าแข่งขันเป็นจำนวนคู่ จะเป็นไอดีลสำหรับอย่างมาก 2 ทีม

การพิสูจน์ ให้ a เป็นทีม ๆ หนึ่งในทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่มีจำนวนทีมที่เข้าแข่งขันเป็นจำนวนคู่ นิยามเวกเตอร์ t_a ดังนี้ ให้ $t_{aj} = 1$ ถ้า a เป็นทีมเหย้าในรอบที่ j และให้ $t_{aj} = 0$ ถ้า a เป็นทีมเยือนในรอบที่ j สมมติว่าการจัดการแข่งขันนี้เป็นไอดีลสำหรับทีม a แล้วจะได้ว่าเวกเตอร์ t_a เป็นได้เพียง 2 แบบเท่านั้นคือ

(0, 1, 0, 1, … ,0 ,1) หรือ (1, 0, 1, 0, … ,1 ,0)

ถ้า $a \neq b$ แล้ว $t_a \neq t_b$ เพราะว่าทุกทีมต้องได้พบกันหมดดังนั้นต้องมีรอบหนึ่งของการแข่งขันที่ทีม a แข่งกับทีม b ซึ่งในการแข่งขันจะต้องมีทีมหนึ่งเป็นทีมเหย้าและอีกทีมหนึ่งเป็นทีมเยือน เพราะฉะนั้นจะได้ว่าการจัดการแข่งขันจะเป็นไอดีลสำหรับอย่างมาก 2 ทีม $\square$

จากทฤษฎีบทที่ 2 ทำให้เกิดคำถามว่าเราจะสามารถหาวิธีการจัดการแข่งขันที่เป็นไอดีลสำหรับ 2 ทีมได้หรือไม่ ยกตัวอย่างเช่น ในกรณีที่มีผู้เข้าแข่งขัน 8 ทีม a,b,c,d,e,f,g และ h ทำการจัดการแข่งขันในแต่ละรอบดังนี้

ตารางที่ 2 ตัวอย่างการจัดการแข่งขันแบบมีทีมเหย้า-เยือนสำหรับ 8 ทีม

รอบที่	คู่ที่ 1	คู่ที่ 2	คู่ที่ 3	คู่ที่ 4
1	$h \to a$	$g \to b$	$c \to f$	$e \to d$
2	$b \to h$	$a \to c$	$d \to g$	$f \to e$
3	$h \to c$	$b \to d$	$e \to a$	$g \to f$
4	$d \to h$	$c \to e$	$f \to b$	$a \to g$
5	$h \to e$	$d \to f$	$g \to c$	$b \to a$
6	$f \to h$	$e \to g$	$a \to d$	$c \to b$
7	$h \to g$	$f \to a$	$b \to e$	$d \to c$

จากตารางการแข่งขันจะได้ว่าเป็นการจัดการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบซึ่งเกิดเบรกดังนี้

- รอบที่ 2 กับ 3 ทำให้เกิดการเบรกที่ทีม b และทีม c
- รอบที่ 4 กับ 5 ทำให้เกิดการเบรกที่ทีม d และทีม e
- รอบที่ 6 กับ 7 ทำให้เกิดการเบรกที่ทีม f และทีม g
- ไม่มีการเบรกที่ทีม a และทีม h

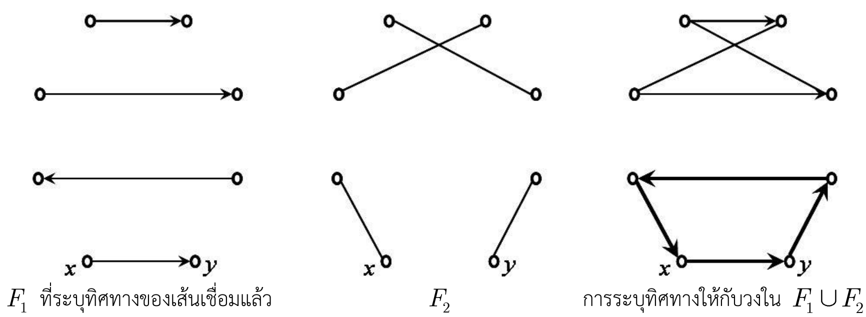
ดังนั้นการจัดการแข่งขันนี้เป็นไอดีลสำหรับ 2 ทีม คือทีม a กับทีม h ส่วนอีก 6 ทีมที่เหลือมีการเบรกทีมละหนึ่งครั้ง

สำหรับในกรณีทั่วไปซึ่งมีจำนวนทีมที่เข้าแข่งขันทั้งหมด $2n$ ทีม เวอร์ราได้แสดงว่ามีวิธีการจัดการแข่งขันที่เป็นไอดีลสำหรับ 2 ทีม และได้ด้วยว่ามีการเบรกเกิดขึ้นทั้งหมด $2n-2$ ครั้ง ซึ่งเป็นจำนวนที่น้อยที่สุดของการเบรกที่เป็นไปได้นั่นคือมี 2 ทีมที่ไม่มีการเบรก ส่วนทีมอื่น ๆ ที่เหลือมีการเบรกทีมละหนึ่งครั้ง

ในการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบโดยมีทีมเหย้า-เยือนอาจจะมีเหตุการณ์อื่น ๆ เพิ่มเติม เช่น มีทีมบางคู่ที่ใช้สนามแข่งขันเป็นสนามเดียวกันซึ่งทำให้ในแต่ละรอบของการแข่งขัน ทีมคู่นั้นจะเป็นทีมเหย้าพร้อมกันไม่ได้ สำหรับปัญหาดังกล่าวนี้ ในปี ค.ศ.1983 วอลลิส (Wallis) ได้แสดงว่าเมื่อกำหนดทีมสองทีมมาให้ แล้วจะมีวิธีการจัดการแข่งขันซึ่งในแต่ละรอบ ทีมสองทีมที่กำหนดมาให้จะไม่เป็นทีมเหย้าพร้อมกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3 กำหนดให้ $\mathbf{F}$ เป็นการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์ ของ K_{2n} และให้ x กับ y เป็นสองจุดใด ๆ ใน K_{2n} แล้วมีการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์แบบระบุทิศทางของ K_{2n} โดยที่ x กับ y มีทิศทางของเส้นเชื่อมต่างกันในแต่ละ 1-แฟกเตอร์ ของ $\mathbf{F}$

การพิสูจน์ โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ F_1 เป็น 1-แฟกเตอร์ ของ $\mathbf{F}$ ที่มีเส้นเชื่อม $\{x,y\}$ ทำการระบุทิศทางให้กับแต่ละเส้นเชื่อมของ F_1 จะได้ว่าสำหรับ 1-แฟกเตอร์ F_1 นี้ จุด x กับ y มีทิศทางของเส้นเชื่อมต่างกัน นั่นคือ ทีม x กับทีม y ไม่เป็นทีมเหย้าพร้อมกัน ต่อมาเลือก 1-แฟกเตอร์ ของ $\mathbf{F}$ ที่ไม่ใช่ F_1 สมมติเป็น F_2 พิจารณา $F_1 \cup F_2$ (เอาเส้นเชื่อมของ F_1 กับ F_2 มารวมกัน) เนื่องจาก F_1 และ F_2 เป็น 1-แฟกเตอร์ ดังนั้น F_1 และ F_2 จะไม่มีการใช้เส้นเชื่อมซ้ำกัน เราได้ว่าจะมีวง (cycle) ของ $F_1 \cup F_2$ ซึ่งมีเส้นเชื่อม $\{x,y\}$ อยู่ในวงนั้น ทำการระบุทิศทางของเส้นเชื่อมในวงดังกล่าวไปตามทิศทางของเส้นเชื่อม $\{x,y\}$ สำหรับเส้นเชื่อมอื่น ๆ ที่เหลือของ F_2 จะระบุทิศทางแบบใดก็ได้ ซึ่งโดยการระบุทิศทางของวงดังกล่าวนั้นทำให้ได้ว่าจุดยอด x กับจุดยอด y จะมีทิศทางของเส้นเชื่อมต่างกันใน F_2



รูปที่ 6 การระบุทิศทางให้กับเส้นเชื่อมใน 1-แฟกเตอร์ F_1 และ F_2

สำหรับ 1-แฟกเตอร์ F_i ตัวอื่น ๆ ของ $\mathbf{F}$ นั้นก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกับ F_2 โดยการพิจารณาวงใน $F_1 \cup F_i$ ซึ่งจะทำให้ได้ว่าจุด x กับ y มีทิศทางของเส้นเชื่อมต่างกันในแต่ละ 1-แฟกเตอร์ของ $\mathbf{F}$ $\square$

ทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับสภาวะเกินตัว (round robin tournament balanced for carryover)

ในการแข่งขันอาจจะมีบางทีมที่เก่งมาก ๆ ซึ่งจะทำให้ทีมที่เจอกับทีมที่เก่งนั้นมีความเสียเปรียบต่อทีมที่ตัวเองต้องเจอในรอบถัดไป เราจะเรียกสถานการณ์ของทีมที่เสียเปรียบนี้ว่าสภาวะเกินตัว (carryover) ยกตัวอย่างเช่น มีทีมที่เข้าแข่งขันทั้งหมด 6 ทีม คือ a,b,c,d,e และ f ทำการจัดการแข่งขันในแต่ละรอบดังนี้

ตารางที่ 3 ตัวอย่างการจัดการแข่งขันที่มีทีมที่มีสภาวะเกินตัว

รอบที่	คู่ที่ 1	คู่ที่ 2	คู่ที่ 3
1	$\{a,b\}$	$\{c,d\}$	$\{e,f\}$
2	$\{a,c\}$	$\{e,b\}$	$\{d,f\}$
3	$\{a,d\}$	$\{b,f\}$	$\{e,c\}$
4	$\{a,e\}$	$\{b,d\}$	$\{c,f\}$
5	$\{a,f\}$	$\{b,c\}$	$\{d,e\}$

พิจารณาคู่ $\{a,b\}$ ในรอบที่ 1 กับ $\{e,b\}$ ในรอบที่ 2 และ $\{a,c\}$ ในรอบที่ 2 กับ $\{e,c\}$ ในรอบที่ 3 ถ้าทีม a เป็นทีมที่เก่งมาก จะทำให้ทีม e ได้เปรียบทีม b และทีม c เพราะสองทีมนี้เพิ่งแข่งกับทีม a มาในรอบก่อนหน้าที่จะมาเจอกับทีม e คำถามคือ เราจะสามารถจัดการแข่งขันที่แต่ละทีมพบเจอกับเหตุการณ์ดังกล่าวพอ ๆ กันเพื่อให้เกิดความยุติธรรมสำหรับทุกทีมได้หรือไม่

กำหนดให้ $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, ..., F_{2n-1}\}$ เป็นการแยกตัวประกอบ 1-แฟกเตอร์แบบระบุทิศทางของ K_{2n} โดยมี S เป็นเซตของจุดยอด สำหรับแต่ละทีม x ให้ x_i เป็นทีมที่แข่งกับ x ในรอบที่ i ดังนั้น $F_i = \{(x, x_i) \mid x \in S\}$ สมมติว่าในรอบที่ i ทีม z พบกับทีม x และในรอบที่ $i+1$ ทีม z พบกับทีม y เราจะเรียก x ว่าเป็น ตัวนำหน้า (predecessor) y ในรอบที่ i ซึ่งเขียนแทนด้วย $p_i(y)$ ดังนั้นจะได้ว่า $x_i = y_{i+1}$ และสำหรับตัวนำหน้าของทีมในรอบที่ 1 ให้พิจารณาจากการแข่งขันในรอบที่ $2n-1$ ให้ $P(y) = \{p_i(y) \mid 1 \le i \le 2n-1\}$ ถ้า $P(y) = S \setminus \{y\}$ ทุก y ใน S แล้วเราจะเรียก $\mathbf{F}$ ว่า สมดุลสำหรับสภาวะเกินตัว (balanced for carryover)

ในตัวอย่างข้างต้นซึ่งเป็นกรณีที่มีผู้เข้าร่วมการแข่งขัน 6 ทีมนั้น เมื่อให้ $S = \{a,b,c,d,e,f\}$ จะได้ว่า $p_2(e) = a = p_3(e)$ ซึ่งทำให้ $P(e) \neq S \setminus \{e\}$ ดังนั้นการจัดการแข่งขันนี้ไม่สมดุลสำหรับสภาวะเกินตัว ต่อไปลองมาดูตัวอย่างของการจัดการแข่งขันที่สมดุลสำหรับสภาวะเกินตัวบ้าง สมมติว่ามีทีมที่เข้าแข่งขันทั้งหมด 4 ทีม คือ a, b, c และ d ($S = \{a,b,c,d\}$) ทำการจัดการแข่งขันออกเป็น 3 รอบดังนี้

ตารางที่ 4 ตัวอย่างการจัดการแข่งขันที่สมดุลสำหรับสภาวะเกินตัว

รอบที่	คู่ที่ 1	คู่ที่ 2
1	$\{a,b\}$	$\{c,d\}$
2	$\{a,c\}$	$\{b,d\}$
3	$\{b,c\}$	$\{a,d\}$

จากตารางจะได้ว่า $p_1(a) = c$, $p_2(a) = d$ และ $p_3(a) = b$ ดังนั้น $P(a) = \{b,c,d\} = S \setminus \{a\}$ และสำหรับทีม b, c และ d ได้ว่า $P(b) = S \setminus \{b\}$, $P(c) = S \setminus \{c\}$ และ $P(d) = S \setminus \{d\}$ เพราะฉะนั้นการจัดการแข่งขันนี้สมดุลสำหรับสภาวะเกินตัว

สำหรับปัญหาการจัดการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับสภาวะเกินตัวนี้ ในปี ค.ศ.1980 รัสเซลล์ (Russell) ได้แสดงว่ามีวิธีการจัดการแข่งขันถ้าจำนวนทีมอยู่ในรูปเลขยกกำลังของสอง ซึ่งใช้ความรู้ในเรื่องของฟีลด์กาลัว (Galois field) มาช่วยในการจัด และรัสเซลล์ก็ได้ตั้งข้อความคาดการณ์ (conjecture) เอาไว้ว่ามีวิธีการจัดการแข่งขันทัวร์นาเมนต์แบบแบ่งรอบที่สมดุลสำหรับสภาวะเกินตัวเมื่อจำนวนทีมอยู่ในรูปเลขยกกำลังของสองเท่านั้น แต่ต่อมาในปี ค.ศ.1999 แอนเดอร์สัน (Anderson) ได้หาตัวอย่างค้านซึ่งทำให้ข้อความคาดการณ์ดังกล่าวไม่เป็นจริง โดยเขาได้แสดงว่ามีวิธีการจัดการแข่งขันในกรณีที่มีจำนวนทีมที่เข้าแข่งขัน 20 และ 22 ทีม ซึ่งไม่อยู่ในรูปเลขยกกำลังของสอง

บทสรุป

บทความนี้ได้ใช้ความรู้ทางด้านทฤษฎีกราฟในเรื่องของ 1-แฟกเตอร์ มาช่วยในการจัดการแข่งขันกีฬาแบบทัวร์นาเมนต์เพื่อให้เกิดความยุติธรรมสำหรับแต่ละทีม และเพื่อแก้ไขปัญหาบางประการที่อาจเกิดขึ้นได้ในการแข่งขัน เช่น มีทีมบางคู่ใช้สนามแข่งขันเป็นสนามเดียวกันซึ่งทำให้ทีมคู่นั้นเป็นทีมเหย้าพร้อมกันไม่ได้ โดยวิธีการจัดการแข่งขันเหล่านี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้จริงกับการแข่งขันกีฬาแบบทัวร์นาเมนต์ เช่น ฟุตบอลพรีเมียร์ลีกของประเทศอังกฤษ เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

Anderson, I. (1999). Balancing carry-over effects in tournaments. In Combinatorial Designs and their Applications. Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math. 403 Boca Raton, FL: 1-16.

de Werra, D. (1981). Scheduling in sports. In Hansen, P., editor, Studies on graphs and discrete programming. Amsterdam: 381–395.

Gerhard, P. and Gerhard, W. J. (2006). Sports tournaments. home-away assignments. and the break, Discrete Optimization 3: 165–173.

Russell, K. G. (1980). Balancing carry-over effects in round robin tournaments. Biometrika 67: 127-131.

Wallis, W. D. (1983). A tournament problem. J. Austral. Math. Soc. 24B: 289-291.

Wallis, W. D. (1987). One-factorizations of graphs : tournament applications. The College Mathematics Journal 18(2): 116-123.

Wallis, W. D. (2007) Introduction to combinatorial designs. second edition. Chapman and Hall/CRC.

❑❑❑❑❑