ว.วิทย. มข. 41(2) 497-506 (2556) KKU Sci. J. 41(2) 497-506 (2013)

สมการที่สมมูลกับสมการเพนเลฟ

Equations Equivalent to the Painlevé Equations

โสภิตา ขำรอด[1]

บทคัดย่อ

สมการเพนเลฟ (Painlevé equations) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองไม่เชิงเส้น ซึ่งถูกศึกษาและประยุกต์สำหรับการวิเคราะห์ปรากฏการณ์ทางกายภาพในหลาย ๆ ด้านทางฟิสิกส์รวมถึงกลศาสตร์เชิงสถิติ (statistical mechanics), ฟิสิกส์พลาสมา (plasma physics), คลื่นไม่เชิงเส้น (nonlinear waves) และทฤษฎีสนามควอนตัม (quantum field theory) งานวิจัยนี้ได้ศึกษาปัญหาสมมูล (equivalence problems) ของสมการเพนเลฟภายใต้การแปลงแบบจุดทั่วไป (general point transformation) เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ทำให้สมการในรูป $y'' = F(x, y, y')$ สมมูลกับสมการเพนเลฟได้ถูกค้นพบ

ABSTRACT

The Painlevé equations are nonlinear second-order ordinary differential equations which are studied and applied for analyzing physical phenomena in many fields of Physics including statistical mechanics, plasma physics, nonlinear waves and quantum field theory. This research is devoted to the equivalence problems of the Painlevé equations under a general point transformation. The necessary and sufficient conditions that an equation of the form $y'' = F(x, y, y')$ is to be equivalent to the Painlevé equations are found.

คำสำคัญ: ปัญหาสมมูล สมการเพนเลฟ การแปลงแบบจุด

Keywords: Equivalence problems, Painlevé equations, Point transformations

[1]ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร จังหวัดพิษณุโลก 65000

E-mail: kuntimak@nu.ac.th

บทนำ

การศึกษาปรากฏการณ์ทางธรรมชาติที่สำคัญต่าง ๆ ในทางฟิสิกส์ ทางชีววิทยา ทางเศรษฐศาสตร์ หรืออื่น ๆ สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ถูกสร้างขึ้นในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ ในศตวรรษที่ 19 ปัญหาของการจำแนกประเภทของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เป็นปัญหาที่มีความน่าสนใจเป็นอย่างยิ่ง ปัญหาการสมมูล (Equivalence problems) เป็นปัญหาของการจำแนกประเภทของสมการเชิงอนุพันธ์ชนิดหนึ่ง กล่าวคือ สมการเชิงอนุพันธ์หนึ่งจะสมมูลกับสมการอื่น ถ้ามีการแปลงที่มีตัวผกผัน (invertible transformation) ของตัวแปรต้นและตัวแปรตาม ซึ่งแปลงสมการหนึ่งไปยังอีกสมการหนึ่งได้ โดยทั่วไปสมการที่ถูกแปลงจะอยู่ในรูปสมการที่ง่ายกว่าซึ่งสามารถหาผลเฉลยได้ง่ายกว่าสมการตั้งต้น ดังนั้นประโยชน์ที่ได้จากปัญหาสมมูลคือ ถ้าสามารถหาผลเฉลยจากสมการที่สมมูลแล้วจะสามารถใช้การแปลงผกผัน แปลงผลเฉลยที่ได้นั้นไปเป็นผลเฉลยของสมการตั้งต้นได้

ในการแก้ปัญหาการสมมูลของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง Tresse (1896) ได้ใช้ตัวยืนยงสัมพัทธ์ (relative invariants) ของกลุ่มสมมูล (equivalence group) ภายใต้การแปลงแบบจุด (point transformations) ซึ่งสามารถลดรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองไม่เชิงเส้นไปยังสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองเชิงเส้นได้ และเทคนิคในการหาตัวยืนยงสัมพัทธ์ (relative invariants) สำหรับกลุ่มสมมูลอนันต์ (infinite equivalence groups) ได้พัฒนาขึ้นโดย Ibragimov (1997) สำหรับ Cartan (1924) ได้คิดวิธีการแก้ปัญหาโดยมีแนวความคิดที่ว่า สมการเชิงอนุพันธ์สองสมการจะสมมูลกันภายใต้การกระทำของกลุ่มการแปลง (group of transformations) ซึ่งวิธีการนั้นเรียกว่า Cartan's approach

สมการเพนเลฟ (The Painlevé equations)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{PI}: \quad y'' = 6y^2 + x,\\
&\mathrm{PII}: \quad y'' = 2y^3 + xy + \alpha,\\
&\mathrm{PIII}: \quad y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{(\alpha y^2 + \beta)}{x} + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y},\\
&\mathrm{PIV}: \quad y'' = \frac{y'^2}{2y} + \frac{3y^3}{2} + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y},\\
&\mathrm{PV}: \quad y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)y'^2 - \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma y}{x} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1},\\
&\mathrm{PVI}: \quad y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right)y'^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right)y'\\
&\qquad + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{x}{y^2} + \gamma\frac{x-1}{(y-1)^2} + \left(\frac{1}{2} - \delta\right)\frac{x(x-1)}{(x-1)^2}\right)
\end{aligned} \tag{1}
$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองชนิดไม่เชิงเส้น ปัจจุบันนี้ ได้มีการศึกษาและพัฒนาอย่างกว้างขวางเพื่อพยายามนำไปใช้กับงานวิจัยในสาขาต่าง ๆ สมการนี้มีบทบาทสำคัญและได้นำไปประยุกต์ใช้เป็นอย่างมากในทางฟิสิกส์ ประกอบไปด้วย statistical mechanics, plasma physics, nonlinear waves, quantum gravity, quantum field theory, general relativity, nonlinear optics และ fiber optics ดังนั้นสิ่งที่น่าสนใจที่สุดคือ

การหาผลเฉลยของสมการนี้และเป็นที่ทราบกันดีว่าการได้มาซึ่งผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytic solution) เป็นสิ่งที่ยากมาก เพราะเนื่องมาจากสมบัติไม่เชิงเส้นของสมการนี้เอง งานวิจัยนี้ต้องการประยุกต์กลุ่มวิเคราะห์ (group analysis) ซึ่งเป็นวิธีหนึ่งในการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่าง ๆ โดยหาการแปลงสมมูลภายใต้การแปลงแบบจุดธรรมดา (equivalence transformation under point transformations) ซึ่งสามารถลดรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองไปยังสมการเพนเลฟ

วิธีการดำเนินการวิจัย

หาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการทำให้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง $y'' = F(x, y, y')$ สมมูลกับสมการ (PI) และ (PII)

ทฤษฎีทั่วไปของตัวยืนยงสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองที่อยู่ในรูป

$$y'' = F(x, y, y') \tag{2}$$

ภายใต้การแปลงแบบจุด

$$x = \varphi(t,u), \quad y = \psi(t,u) \tag{3}$$

โดยที่ φ และ ψ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรใหม่ของตัวแปรต้นและตัวแปรตาม t และ u ตามลำดับ ได้พัฒนามาจากงานวิจัยของ (Lie, 1883; Liouville, 1889; Tresses, 1896)

รูปแบบที่ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง (2) ยังคงสภาพภายใต้การแปลงแบบจุด (3) คือ

$$y'' + a_1(x,y)y'^3 + 3a_2(x,y)y'^2 + 3a_3(x,y)y' + a_4(x,y) = 0 \tag{4}$$

พิจารณาการแปลงในสมการ (3) หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและสองได้ดังนี้

$$\begin{aligned} u' &= g(x,y,y') = \frac{D_x\psi}{D_x\varphi} = \frac{\psi_x + y'\psi_y}{\varphi_x + y'\varphi_y}, \\ u'' &= P(x,y,y',y'') = \frac{D_x g}{D_x\varphi} = \frac{g_x + y'g_y + y''g_{y'}}{\varphi_x + y'\varphi_y} \\ &= (\varphi_x + y'\varphi_y)^{-3}(y''(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x) + y'^3(\varphi_y\psi_{yy} - \varphi_{yy}\psi_y) + y'^2(\varphi_x\psi_{yy} - \varphi_{yy}\psi_x \\ &\quad + 2(\varphi_y\psi_{xy} - \varphi_{xy}\psi_y)) + y'(\varphi_y\psi_{xx} - \varphi_{xx}\psi_y + 2(\varphi_x\psi_{xy} - \varphi_{xy}\psi_x)) + \varphi_x\psi_{xx} - \varphi_{xx}\psi_x) \end{aligned} \tag{5}$$

โดยที่ $D_x = \partial_x + y'\partial_y + y''\partial_{y'} + \ldots$

เนื่องจาก $\Delta = \varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x \neq 0$ แทนสมการ (5) ในสมการ

$$u'' + b_1(t,u)u'^3 + 3b_2(t,u)u'^2 + 3b_3(t,u)u' + b_4(t,u) = 0 \tag{6}$$

จะได้ว่าสามารถจัดรูปสมการ (6) ให้อยู่ในรูปสมการ (4) ได้โดยที่

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \Delta^{-1}\left(\varphi_y\psi_{yy} - \varphi_{yy}\psi_y + \varphi_y^3 b_4 + 3\varphi_y^2\psi_y b_3 + 3\varphi_y\psi_y^2 b_2 + \psi_y^3 b_1\right),\\
a_2 &= \Delta^{-1}\left(3^{-1}(\varphi_x\psi_{yy} - \varphi_{yy}\psi_x + 2(\varphi_y\psi_{xy} - \varphi_{xy}\psi_y)) + \varphi_x\varphi_y^2 b_4\right.\\
&\quad \left. + \varphi_y(2\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x)b_3 + (\varphi_x\psi_y^2 + 2\varphi_y\psi_x\psi_y)b_2 + \psi_x\psi_y^2 b_1\right),\\
a_3 &= \Delta^{-1}\left(3^{-1}(\varphi_y\psi_{xx} - \varphi_{xx}\psi_y + 2(\varphi_x\psi_{xy} - \varphi_{xy}\psi_x)) + \varphi_x^2\varphi_y b_4\right.\\
&\quad \left. + (\varphi_x^2\psi_y + 2\varphi_x\varphi_y\psi_x)b_3 + (2\varphi_x\psi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x^2)b_2 + \psi_x^2\psi_y b_1\right),\\
a_4 &= \Delta^{-1}\left(\varphi_x\psi_{xx} - \varphi_{xx}\psi_x + \varphi_x^3 b_4 + 3\varphi_x^2\psi_x b_3 + 3\varphi_x\psi_x^2 b_2 + \psi_x^3 b_1\right)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ตัวยืนยงสัมพัทธ์ที่มีบทบาทสำหรับการศึกษาสมการ (6) คือ

$$
\begin{aligned}
L_1 &= -\frac{\partial \Pi_{11}}{\partial u} + \frac{\partial \Pi_{12}}{\partial t} - b_4\Pi_{22} - b_2\Pi_{11} + 2b_3\Pi_{12},\\
L_2 &= -\frac{\partial \Pi_{12}}{\partial u} + \frac{\partial \Pi_{22}}{\partial t} - b_1\Pi_{11} - b_3\Pi_{22} + 2b_2\Pi_{12}
\end{aligned}
$$

โดยที่ $\Pi_{11} = 2(b_3^2 - b_2b_4) + b_{3t} - b_{4u}, \Pi_{12} = b_2b_3 - b_1b_4 + b_{2t} - b_{3u}, \Pi_{22} = 2(b_2^2 - 3b_1b_3) + b_{1t} - b_{2u}$

ภายใต้การแปลงแบบจุดในสมการ (3) ทำให้ตัวยืนยงสัมพัทธ์แปลงไปในรูปดังต่อไปนี้

$$
\tilde{L}_1 = \Delta(L_1\varphi_x + L_2\psi_x), \quad \tilde{L}_2 = \Delta(L_1\varphi_y + L_2\psi_y) \tag{8}
$$

ซึ่งเป็นค่าที่สมนัยกับสมการ (4) โดยที่ สัมประสิทธิ์ b_i ถูกเปลี่ยนด้วย $a_i, (i = 1,2,3,4)$ ส่วนตัวแปร t และ u ถูกเปลี่ยนด้วย x และ y ตามลำดับ

Lie (1883) พิสูจน์ว่าสำหรับสมการที่สอดคล้องกับ $L_1 = 0$ และ $L_2 = 0$ จะสมมูลกับสมการ $u'' = 0$ ส่วนสำหรับสมการเพนเลฟนั้น สามารถตรวจสอบได้ว่าสอดคล้องกับ $L_1 \neq 0$ และ $L_2 = 0$ และยังพบอีกว่ามีตัวยืนยงสัมพัทธ์อื่น ๆ ด้วยเช่น

$$
v_5 = L_2(L_1L_{2t} - L_2L_{1t}) + L_1(L_2L_{1u} - L_1L_{2u}) - b_1L_1^3 + 3b_2L_1^2L_2 - 3b_3L_1L_2^2 + b_4L_2^3 \tag{9}
$$

และ

$$
w_1 = L_1^{-4}\left(-L_1^3(\Pi_{12}L_1 - \Pi_{11}L_2) + R_1(L_1^2)_t - L_1^2R_{1t} + L_1R_1(b_3L_1 - b_4L_2)\right)
$$

เมื่อ

$$
R_1 = L_1L_{2t} - L_2L_{1t} + b_2L_1^2 - 2b_3L_1L_2 + b_4L_2^2 \tag{10}
$$

สำหรับสมการเพนเลฟสอดคล้องกับตัวยืนยงสัมพัทธ์ข้างต้นคือ $v_5 = 0$ และ $w_1 = 0$

งานวิจัยนี้ได้เริ่มศึกษาสมการที่อยู่ในรูปแบบสมการ (6) ซึ่งสมมูลกับสมการที่หนึ่งและสองของสมการเพนเลฟ $y'' = F_i(x, y, y'), i = 1,2$ โดยที่ ฟังก์ชัน $F(x, y, y')$ ของสมการเพนเลฟ (PI) และ (PII) คือ

$$
F_1 = 6y^2 + x \text{ และ } F_2 = 2y^3 + xy + \alpha
$$

เนื่องจากสมการเพนเลฟ (PI) และ (PII) อยู่ในรูปของสมการที่ (4) ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าเงื่อนไขจำเป็นอย่างแรก สำหรับทำสมการ (2) ให้สมมูลกับสมการเพนเลฟนั้น สมการต้องอยู่ในรูปแบบสมการ (4) ด้วย และเนื่องจากคุณสมบัติ $v_5 = 0$ และ $w_1 = 0$ เป็นตัวยืนยงสัมพัทธ์ที่ขึ้นอยู่กับสมการที่ (3) จึงกล่าวได้ว่าคุณสมบัตินี้เป็นเงื่อนไขจำเป็น (necessary condition) สำหรับทำสมการ (2) ให้สมมูลกับสมการเพนเลฟด้วยเหมือนกัน

วิธีการได้มาสำหรับเงื่อนไขเพียงพอ (sufficient condition) คือการหาเงื่อนไขที่การันตีการมีอยู่จริงของฟังก์ชัน $\varphi(x,y)$ และ $\psi(x,y)$ ซึ่งแปลงสัมประสิทธิ์ $b_1(t,u)$,$b_2(t,u)$,$b_3(t,u)$ และ $b_4(t,u)$ ของสมการ (7) ไปยังสัมประสิทธิ์ $a_1(x,y)$,$a_2(x,y)$,$a_3(x,y)$ และ $a_4(x,y)$ ของสมการเพนเลฟ (PI) และ (PII)

เนื่องจาก สมการเพนเลฟมีคุณสมบัติของ $L_1 \neq 0$ พิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ของสมการเพนเลฟ (PI) และ (PII) ได้ดังนี้

$$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = -F_i(x,y,y'),\ i = 1,2 \tag{11}$$

จากคุณสมบัติ $\tilde{L}_2 = 0$ และ $\Delta \neq 0$ ทำให้ฟังก์ชัน $\varphi(x,y)$ และ $\psi(x,y)$ สอดคล้องกับสมการ

$$\varphi_y L_1 + \psi_y L_2 = 0$$

เมื่อนำค่าดังกล่าวไปแทนในสมการ (7) จะได้สมการดังนี้

$$\psi_{yy} L_1^2 + \psi_y^2 (3b_4 L_2^2 - 6b_3 L_1 L_2 + 3b_2 L_1^2 - 2L_{1t} L_2 + 2L_{2t} L_1) = 0, \tag{12}$$

$$\begin{gathered} 2\psi_{xy} L_1^2 - \Delta_{1x} \psi_y \Delta_1^{-1} L_1^2 + \psi_y \Delta_1 (L_{1t} - 3b_4 L_2 + 3b_3 L_1) \\ +\psi_x \psi_y (6b_4 L_2^2 - 12b_3 L_1 L_2 + 6b_2 L_1^2 - 4L_{1t} L_2 + L_{1u} L_1 + 3L_{2t} L_1) = 0, \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} \psi_{xx} L_1^2 - \Delta_{1x} \psi_x \Delta_1^{-1} L_1^2 + b_4 \Delta_1^2 + \psi_x \Delta_1 (L_{1t} - 3b_4 L_2 + 3b_3 L_1) \\ +\psi_x^2 (3b_4 L_2^2 - 6b_3 L_1 L_2 + 3b_2 L_1^2 - 2L_{1t} L_2 + L_{1u} L_1 + L_{2t} L_1) + \psi_y L_1^2 F_i = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

โดยที่ $\Delta_1 = \varphi_x L_1 + \psi_x L_2$ และ $i = 1,2$ พิจารณา Δ_1 จากการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร y จะได้

$$L_1 \Delta_{1y} = \psi_y \Delta_1 (L_{1u} - L_{2t}) \tag{15}$$

ทำให้สมการ (12) – (14) อยู่ในรูป

$$\psi_{yy} = L_1^{-2} \psi_y^2 (2L_{1t} L_2 - 2L_{2t} L_1 - 3b_4 L_2^2 + 6b_3 L_1 L_2 - 3b_2 L_1^2) \tag{16}$$

$$L_1^2 \psi_{xx} = 2\psi_{xy} \psi_x \psi_y^{-1} L_1^2 - b_4 \Delta_1^2 - \psi_y L_1^2 F_i + \psi_x^2 (3b_4 L_2^2 - 6b_3 L_1 L_2 + 3b_2 L_1^2 - 2L_{1t} L_2 + 2L_{2t} L_1) \tag{17}$$

$$\begin{gathered} L_1^2 \Delta_{1x} = 2\psi_{xy} \psi_y^{-1} \Delta_1 L_1^2 + \Delta_1^2 (L_{1t} - 3b_4 L_2 + 3b_3 L_1) \\ +\psi_x \Delta_1 (L_{1u} L_1 - 4L_{1t} L_2 + 3L_{2t} L_1 + 6b_4 L_2^2 - 12b_3 L_1 L_2 + 6b_2 L_1^2) \end{gathered} \tag{18}$$

โดยที่ $\Delta_1 = \varphi_x L_1 + \psi_x L_2$ และ $i = 1,2$

ผลการวิจัย

สมการที่สมมูลกับสมการเพนเลฟ (PI)

จากสมการ (16), (17) และ (18) หาอนุพันธ์อันดับสูงและจากคุณสมบัติการผสมอนุพันธ์ $(\psi_{xx})_{yy} = (\psi_{yy})_{xx}$ จะได้ว่า

$$\psi_y \Delta_1^2 + 12L_1 = 0 \text{ หรือ } \psi_y = -12L_1 / \Delta_1^2 \tag{19}$$

จากสมการ $\psi_{xy} - (\psi_y)_x = 0$ และสมการ $(\psi_y)_y - (\psi)_{yy} = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{gathered} 5\psi_{xy}\Delta_1^2 L_1 - 12\psi_x(12(b_4L_2^2 - 2b_3L_1L_2 + b_2L_1^2) - 7L_{1t}L_2 + L_{1u}L_1 + 6L_{2t}L_1) \\ -12\Delta_1(L_{1t} - 6b_4L_2 + 6b_3L_1) = 0, \end{gathered} \tag{20}$$

$$3b_4L_2^2 - 6b_3L_1L_2 + 3b_2L_1^2 - 3L_{1t}L_2 - L_{1u}L_1 + 4L_{2t}L_1 = 0 \tag{21}$$

หาอนุพันธ์ L_{2u} จากสมการ $v_5 = 0$, หา L_{2tt} จากสมการ $w_1 = 0$ และ หา L_{2t} จากสมการ (21) แล้วแทนค่าในสมการ $(L_{2t})_t - L_{2tt} = 0,\ (L_{2t})_u - (L_{2u})_t = 0$
จะได้ว่า

$$\begin{gathered} L_{1tu} = (4b_4^2L_2^3 - 18b_4b_3L_1L_2^2 + 60b_4b_2L_1^2L_2 + 80b_4b_1L_1^3 - 3b_4L_{1t}L_2^2 \\ -36b_3^2L_1^2L_2 - 90b_3b_2L_1^3 - 12b_3L_{1t}L_1L_2 + 30b_3L_{1u}L_1^2 - 15b_2L_{1t}L_1^2 \\ +20b_{4u}L_1^2L_2 + 80b_{3u}L_1^3 - 100b_{2t}L_1^3 - L_{1t}^2L_2 + 25L_{1t}L_{1u}L_1 + 2KL_2)/(20L_1^2), \end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered} L_{1uu} = (-b_4^2L_2^4 + 12b_4b_3L_1L_2^3 + 40b_4b_1L_1^3L_2 + 2b_4L_{1t}L_2^3 - 36b_3^2L_1^2L_2^2 \\ +120b_3b_1L_1^4 - 12b_3L_{1t}L_1L_2^2 - 135b_2^2L_1^4 + 30b_2L_{1u}L_1^3 - 20b_1L_{1t}L_1^3 \\ +40b_{3u}L_1^3L_2 - 20b_{2t}L_1^3L_2 + 60b_{2u}L_1^4 - 80b_{1t}L_1^4 - L_{1t}^2L_2^2 + 25L_{1u}^2L_1^2 + 2KL_2^2)/(20L_1^3) \end{gathered} \tag{23}$$

เมื่อ ฟังก์ชัน $K(t,u)$ ถูกกำหนดโดย

$$\begin{gathered} K(t,u) = 3b_4^2L_2^2 - 6b_4b_3L_1L_2 - 105b_4b_2L_1^2 + 9b_4L_{1t}L_2 - 15b_4L_{1u}L_1 + 108b_3^2L_1^2 \\ +6b_3L_{1t}L_1 - 10b_{4t}L_1L_2 - 50b_{4u}L_1^2 + 60b_{3t}L_1^2 + 10L_{1tt}L_1 - 12L_{1t}^2 \end{gathered} \tag{24}$$

พิจารณาสมการที่ (16), (17) และ (20) เนื่องจากอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน $\psi(x,y)$ หาค่าได้ทำให้สมการ $(\psi_{xy})_x - (\psi_{xx})_y = 0$ และ $(\psi_{xy})_y - (\psi_{yy})_x = 0$ ลดรูปไปยังสมการ

$$\Delta_1^2 K - 600L_1^4 y = 0 \tag{25}$$

พิจารณาสมการ $(L_{1tt})_u - (L_{1tu})_t = 0$ ทำให้ได้ว่า

$$2L_1(K_uL_1 - K_tL_2) + 3K(b_4L_2^2 - 2b_3L_1L_2 + b_2L_1^2) + 5K(L_{1t}L_2 - L_{1u}L_1) + 100L_1^5 = 0 \tag{26}$$

จากสมการที่ (25) หาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x จะได้

$$\psi_x = (\Delta_1(-6b_4KL_2 + 6b_3KL_1 + 5K_tL_1 - 14L_{1t}K))/(250L_1^5)$$

พิจารณาจากสมการ $(\psi_x)_y - (\psi_y)_x = 0,\ \psi_{xy} - (\psi_x)_y = 0$ และ $\psi_{xx} - (\psi_x)_x = 0$ จะได้ว่า

$$Qy^2 + x = 0 \tag{27}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} Q(t,u) = 6K^{-2}(&-390b_4^2KL_2^2 + 780b_4b_3KL_1L_2 + 2850b_4b_2KL_1^2 + 300b_4K_tL_1L_2 \\ &-1170b_4L_{1t}KL_2 + 450b_4L_{1u}KL_1 - 5000b_4L_1^5 - 3240b_3^2KL_1^2 - 300b_3K_tL_1^2 \\ &+720b_3L_{1t}KL_1 + 400b_{4t}KL_1L_2 + 1400b_{4u}KL_1^2 - 1800b_{3t}KL_1^2 - 100K_{tt}L_1^2 \\ &+600K_tL_{1t}L_1 - 840L_{1t}^2K + 29K^2) \end{aligned} \tag{28}$$

พิจารณาสมการ (27) ทำให้ฟังก์ชัน $Q(t,u) \neq 0$ แล้วหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x และ y จะได้ว่า

$$\Delta_1 y^2 R - 5K^2L_1^2 = 0, \tag{29}$$

$$K(L_1Q_u - Q_tL_2) - 100QL_1^4 = 0 \tag{30}$$

เมื่อ $$R(t,u) = K(4QK(3b_4L_2 - 3b_3L_1 + 7L_{1t}) - 5L_1(Q_tK + 2K_tQ)) \tag{31}$$

พิจารณาสมการ (29) หาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x และ y จะได้ว่า

$$R_tL_1 - R(7L_{1t} + 3b_4L_2 - 3b_3L_1) = 0 \tag{32}$$

หาฟังก์ชัน Δ_1 จากสมการ (29) แล้วแทนในสมการ (15), (18) และ (25) จะได้ว่า

$$24y^5R^2 - K^5 = 0 \tag{33}$$

สังเกตว่า

$$4L_1(L_1R_u - R_tL_2) + 25R(L_{1t}L_2 - L_{1u}L_1) + 15R(b_4L_2^2 - 2b_3L_1L_2 + b_2L_1^2) = 0 \tag{34}$$

ดังนั้น เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการทำสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง $y'' = F(x,y,y')$ ให้สมมูลกับสมการ (PI) คือ สมการต้องอยู่ในรูปแบบของสมการ (6) โดยที่สัมประสิทธิ์ $b_i(t,u),\ (i = 1,2,3,4)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการ $v_5 = 0$, (21), (22), (23), (26), (30) และ (34) โดยที่ฟังก์ชัน $K(t,u), R(t,u)$ และ $Q(t,u)$ ถูกกำหนดโดยสมการ (24), (28) และ (31)

สมการที่สมมูลกับสมการเพนเลฟ (PII)

โดยวิธีการทำนองเดียวกันกับสมการเพนเลฟ (PI) ดังนั้นหาอนุพันธ์อันดับสูงและจากคุณสมบัติการผสมอนุพันธ์ $(\psi_{xx})_{yy} = (\psi_{yy})_{xx}$ จะได้ว่า

$$\psi_y\Delta_1^2 + 12yL_1 = 0 \text{ หรือ } \psi_y = -12yL_1/\Delta_1^2 \tag{35}$$

จากสมการ $\psi_{xy} - (\psi_y)_x = 0$ และสมการ $(\psi_y)_y - (\psi)_{yy} = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{gathered} 5\psi_{xy}\Delta_1^2L_1 - 12y(\Delta_1(L_{1t} - 6b_4L_2 + 6b_3L_1) \\ +\psi_x(12b_4L_2^2 - 24b_3L_1L_2 + 12b_2L_1^2 - 7L_{1t}L_2 + L_{1u}L_1 + 6L_{2t}L_1)) = 0, \end{gathered} \tag{36}$$

$$\Delta_1 - 12yK = 0 \tag{37}$$

เมื่อ ฟังก์ชัน $\boldsymbol{K(t,u)}$ ถูกกำหนดโดย

$$K^2(t,u) = (12L_1)^{-1}(3b_4L_2^2 - 6b_3L_1L_2 + 3b_2L_1^2 - 3L_{1t}L_2 - L_{1u}L_1 + 4L_{2t}L_1) \tag{38}$$

พิจารณาจาก $\Delta_1 \neq 0$ ทำให้ $K \neq 0$ ดังนั้นสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง ψ_{xy} จากสมการ (36) และจากสมการ (37) จะได้ $\Delta_1 = 12yK$ ดังนั้นสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง $\psi_{xx}, \psi_{xy}, \psi_{yy}$ ได้ทั้งหมด
หลังจากแทนค่า Δ_1 ลงในสมการ (15) และ (18) จะได้ว่า

$$4L_1(K_uL_1 - K_tL_2) - 3K(L_{1u}L_1 - L_{1t}L_2 + 12K^2L_1 + b_4L_2^2 - 2b_3L_1L_2 + b_2L_1^2) = 0, \tag{39}$$

$$3KL_1\psi_x = y\left(9(L_{1t} - b_4L_2 + b_3L_1) - 5K^{-1}K_tL_1\right) \tag{40}$$

เนื่องด้วยสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ ψ_x และ ψ_y จากสมการที่ (35) และ (40) และหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของ $\psi_{xx}, \psi_{xy}, \psi_{yy}$ และ ψ_{xy} ได้ทั้งหมด ดังนั้นตรวจสอบเงื่อนไขของการผสมอนุพันธ์ต่าง ๆ ดังนี้

$$(\psi_x)_x = \psi_{xx}, \quad (\psi_x)_y = \psi_{xy}, \quad (\psi_y)_x = \psi_{xy}, \quad (\psi_y)_y = \psi_{yy}$$

จากคุณสมบัติการผสมอนุพันธ์ $(\psi_x)_x = \psi_{xx}$ จะได้ว่า $(\psi_x)_x - \psi_{xx} = 0$ นั่นคือ

$$\begin{gathered} 4y^3K(60K_{tt}L_1 + 4K_t(51(b_3L_1 - b_4L_2) + 36L_{1t} - 50K^{-1}K_tL_1) \\ +9b_4K(L_{1u} - 3b_2L_1) + 99b_4KL_1^{-1}L_2(L_{1t} - b_4L_2 + 2b_3L_1) \\ -36K(L_{1tt} + 3b_3L_{1t} - b_{4t}L_2 + b_{3t}L_1 + 9b_4K^2 + 2b_3^2L_1)) \\ +L_1^3(2y^3 + yx + \alpha) = 0 \end{gathered} \tag{41}$$

จากสมการ (41) หาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร y แล้วแยก x ออกมา และเอาไปแทนในสมการที่ (41) จะได้

$$\begin{gathered} 144y^3(2KL_1(K_{tt}L_1 + 2K_tL_{1t} - 3b_4K_tL_2 + 3b_3K_tL_1) - 6K_t^2L_1^2 \\ +K^2(3b_4L_{1t}L_2 - 3b_3L_{1t}L_1 - L_{1tt}L_1 + b_{4t}L_1L_2 - b_{4u}L_1^2 - 3b_4^2L_2^2 \\ +6b_4b_3L_1L_2 - 3b_4b_2L_1^2 - 12b_4K^2L_1)) - L_1^4(4y^3 - \alpha) = 0 \end{gathered} \tag{42}$$

จากสมการ (42) แยก α ออกมาแล้วนำไปแทนในสมการ (41) จะได้

$$2y^2Q - x = 0, \tag{43}$$

$$\begin{gathered} Q(t,u) = L_1^{-4}(8L_1(3K_{tt}KL_1 - 4K_t^2L_1 - 3b_4K_tKL_2 + 3b_3K_tKL_1) \\ -18K^2(b_4^2L_2^2 - 2b_4b_3L_1L_2 + 9b_4b_2L_1^2 - b_4L_{1t}L_2 + b_4L_{1u}L_1 + 12b_4K^2L_1 \\ -8b_3^2L_1^2 + 4b_{4u}L_1^2 - 4b_{3t}L_1^2)) - 3 \end{gathered} \tag{44}$$

จากสมการ (43) หาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x และ y ตามลำดับจะได้ว่า

$$\begin{gathered} 2y^3((Q_tL_2 - Q_uL_1)(3b_4KL_2 - 3b_3KL_1 + 5K_tL_1 - 3L_{1t}K) \\ +36Q_tK^3L_1) - 3K^2L_1^2 = 0, \end{gathered} \tag{45}$$

$$Q_tL_2 - Q_uL_1 + 24QK^2 = 0 \tag{46}$$

เพราะว่า $KL_1 \neq 0$ และสัมประสิทธิ์ของ y^3 ในสมการ (45) ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น สมการที่ (43) และ (45) ถูกกำหนดด้วยตัวแปร x และ y ทำให้สมการที่ (42) กลายเป็น

$$\begin{gathered}18K^2(2L_{1tt}-21b_4b_2L_1-3b_4L_{1t}L_1^{-1}L_2-3b_4L_{1u}+24b_3^2L_1-12b_4K^2\\-2b_{4t}L_2-10b_{4u}L_1+12b_{3t}L_1+3b_4^2L_1^{-1}L_2^2-6b_4b_3L_2+6b_3L_{1t})\\+6K(12K_t+\alpha QL_1)(b_4L_2-b_3L_1-L_{1t})+120K_t^2L_1\\-6Q_t\alpha KL_1^2+QL_1^2(20K_t\alpha-3L_1)-8L_1^3=0\end{gathered} \tag{47}$$

จากสมการ (45) หาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x และ y ตามลำดับ แล้วแยก x และ y ออก ทำให้ได้สมการลดรูปเป็น

$$\begin{gathered}-36Q_{tt}K^2L_1^2+12Q_tKL_1(22K_tL_1-15b_3KL_1+15b_4KL_2-12L_{1t}K-\alpha QL_1^2)\\-2Q(6K(L_{1t}-b_4L_2+b_3L_1)-10K_tL_1)^2\\-4\alpha Q^2L_1^2(6K(b_3L_1-b_4L_2+L_{1t})-10K_tL_1)+864b_4QK^4L_1-QL_1^4-Q^2L_1^4=0\end{gathered} \tag{48}$$

ดังนั้น เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการทำสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง $y''=F(x,y,y')$ ให้สมมูลกับสมการ (PII) คือ สมการต้องอยู่ในรูปแบบของสมการ (6) โดยที่สัมประสิทธิ์ $b_i(t,u),(i=1,2,3,4)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการ $v_5=0$, $w_1=0$, (38), (46), (47) และ (48) โดยที่ฟังก์ชัน $K(t,u)$ และ $Q(t,u)$ ถูกกำหนดโดยสมการ (38) และ (44)

ตัวอย่าง สมการ

$$u''+(1/t)u'-u-u^2/2-392/(625t^4)=0 \tag{49}$$

เป็นสมการที่สมมูลกับสมการเพนเลฟ (*PI*) เนื่องจากว่า (49) เป็นสมการที่อยู่ในรูปของสมการ (6) โดยมีสัมประสิทธิ์คือ

$$b_1=0,\ b_2=0,\ b_3=1/(3t),\ b_4=-u-u^2/2-392/(625t^4)$$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการ $v_5=0, L_1=-1, L_2=0$, (21), (22), (23), (26), (30) และ (34) โดยที่ $K=2s/t^2$, $Q=6\cdot5^4t^4s^{-2}, R=6\cdot10^4t^{-1}$ เมื่อ $s=25t^2(u+1)-4$ จากสมการ (27) และ (33) จะได้ว่า $x=-Qy^2$ และ $y=3^{-3}10^{-8}t^{-8}s$ ดังนั้นการแปลงของตัวแปร คือ $t=(1/10)(1/1944x)^{1/12}$ และ $u=\sqrt{6/x}\,y+16(3)^{1/3}\sqrt{6x}-1$

สรุปผลการวิจัย

เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการทำให้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง $y''=F(x,y,y')$ สมมูลกับสมการ (PI) คือ สมการต้องอยู่ในรูปแบบของสมการ (6) โดยที่สัมประสิทธิ์ $b_i(t,u)$, $(i=1,2,3,4)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการ $v_5=0$, (21), (22), (23), (26), (30) และ (34) การแปลงสมมูลภายใต้การแปลงแบบจุดธรรมดากำหนดโดย $Qy^2+x=0$ และ $24y^5R^2-K^5=0$ โดยที่ฟังก์ชัน $K(t,u), R(t,u)$ และ $Q(t,u)$ ถูกกำหนดโดยสมการ (24), (28) และ (31)

เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการทำสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง $y''=F(x,y,y')$ ให้สมมูลกับสมการ (PII) คือ สมการต้องอยู่ในรูปแบบของสมการ (6) โดยที่สัมประสิทธิ์ $b_i(t,u),\ (i=1,2,3,4)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการ $v_5=0,\ w_1=0,$ (38), (44), (45) และ (46)

การแปลงสมมูลภายใต้การแปลงแบบจุดธรรมดากำหนดโดย $2y^2Q-x=0$ และ $2y^3((Q_tL_2-Q_uL_1)(3b_4KL_2-3b_3KL_1+5K_tL_1-3L_{1t}K)+36Q_tK^3L_1)-3K^2L_1^2=0$ โดยที่ฟังก์ชัน $K(t,u)$ และ $Q(t,u)$ ถูกกำหนดโดยสมการ (38) และ (44)

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา (สกอ.) และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) สำหรับทุนสนับสนุนการวิจัยจากทุนพัฒนาศักยภาพในการทำงานวิจัยของอาจารย์รุ่นใหม่ สัญญาเลขที่ MRG-4980154

เอกสารอ้างอิง

Babich M. V. and Bordag L. A. (1999). Projective Differential Geometrical Structure of the Painlevé Equations. Journal of differential equations, 157: 452-485.

Cartan E. (1924), Sur les variétés àconnexion projective. Bull. Soc. Math. France 52: 205-241.

Hearn A. C. (1999), REDUCE. User's and contributed packages manual, version 3.7. Santa Monica, Carifornia: Rand Corp.

Ibragimov N.H. (1997), Infinitesimal method in the theory of invariants of algebraic and differential equations. Notices of the South African Mathematical Society 29, 61-70.

Ibragimov N.H. (2002), Laplace type invariants for parabolic equations. Nonlinear Dynamics 28: 125-133.

Ibragimov N.H. and Meleshko S.V. (2004), Linearization of third-order ordinary differential equations by point transformations. Archives of ALGA 1, 71-93.

Ibragimov N.H. and Meleshko S.V. (2005), Linearization of third-order ordinary differential equations by point transformations and contact transformation. J. Math. Anal. Appl. 308: 266-289.

Lie S. (1883), Klassifikation und Integration von gewönlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestaten. III. Archiv for Matematik og Natur-videnskab, 8, 371-458.

Liouville R. (1889). Sur les invariants de certaines equations differentielles et sur leurs applications. J. Ecole Polytechnique. 59: 7-76.

Ovsiannikov L. V. (1982), Group Analysis of Differential Equations, New York: Academic Press.

Tresse A.M. (1896), Détermination des Invariants Ponctuels de lÉquation Différentielle Ordinaire du Second Ordre $y''=\omega(x, y, y')$. Preisschriften der fürstlichen Jablonowski'schen Geselschaft XXXII, Leipzig, S.Herzel,.

❑❑❑❑❑