ว.วิทย. มข. 41(2) 373-382 (2556) KKU Sci. J. 41(2) 373-382 (2013)

การประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงแบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไป

Parameters Estimation when Random Variables are Generalized Poisson Distribution

บรรทม สุระพร[1]

บทคัดย่อ

ในลักษณะของข้อมูลที่เป็นการนับความถี่ (frequency data) ในช่วงเวลาที่กำหนดหรืออาณาบริเวณหนึ่ง เราทราบกันดีว่าใช้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบปัวส์ซง $f(x;\lambda)$ เพื่ออธิบายลักษณะของข้อมูล โดยที่ฟังก์ชันนั้นเมื่อหาคุณสมบัติแล้วได้ว่าค่าเฉลี่ย (mean) กับค่าความแปรปรวน (variance) มีค่าเท่ากันคือ λ แต่ในบางลักษณะของข้อมูลที่เราได้มานั้นมีค่าทั้งสองไม่เท่ากัน เราเรียกเกิด dispersion คืออัตราส่วนของค่าเฉลี่ยเทียบกับค่าความแปรปรวน แล้วต่างไปจาก 1 จึงมีผู้คิดหาฟังก์ชันใหม่เพื่อนำมาอธิบายข้อมูลดังกล่าวให้ดีขึ้น ซึ่งเราเรียกฟังก์ชันใหม่ว่าฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไป $f(x;\lambda,\theta)$ โดยจะมีสองพารามิเตอร์ จากข้อมูลที่นำมาเป็นตัวอย่างแสดงในตารางที่ 1 จะเห็นว่าถ้าข้อมูลนั้นมีค่าเฉลี่ย กับค่าความแปรปรวนใกล้กันเราจะ fit ด้วยฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบปัวส์ซงกับ fit ด้วยความน่าจะเป็นแบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไป จะได้ผลใกล้เคียงกัน (ดูจากค่า χ^2) แต่เมื่อค่าทั้งสองต่างกันมากขึ้น ฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบปัวส์ซงจะเริ่ม fit ได้ไม่ดีเท่ากับฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไป ดังนั้นหากเราพบข้อมูลว่าเกิด dispersion มาก ๆ เราควรอธิบายข้อมูลนั้นด้วยฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไปจะให้ผลที่ดีกว่า

[1]ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถิติและคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี อำเภอเมือง จังหวัดอุบลราชธานี 34190

E-mail: scbuntsu@ubu.ac.th

ABSTRACT

The nature of frequency data in a fixed period of time, it is known to use Poisson probability function to describe the given frequency data. The function was investigated, it found that mean and variance is equal λ. However, some characteristics of the data obtained were dispersion. It means that the average proportion compared with variance values was different from 1. A new function was discovered to describe for better result. The new function was called generalized Poisson distribution which consists of 2 parameters. The data is used as examples shown in Table 1. We will see that if the value of average and variance of the data is close, it can be described fitting with Poisson probability function and generalized Poisson distribution. The results will be similar (see from χ^2). When the two values are more different, Poisson probability function can not be described fitting data as well as generalized Poisson distribution does. Therefore, if the data is over dispersion, generalized Poisson distribution should be used for better result.

คำสำคัญ: ฟังก์ชันความน่าจะเป็นปัวส์ซง ฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไป การกระจาย
Keywords: Poisson probability distribution, Generalized Poisson distribution, Dispersion

1. บทนำ

เป็นที่ทราบกันดีเกี่ยวกับค่าเฉลี่ย (mean) และค่าความแปรปรวน (variance) มีค่าเท่ากันเป็นคุณสมบัติของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปัวส์ซง (usual Poisson distribution variable) ซึ่งมีพารามิเตอร์เพียงตัวเดียว คือค่าเฉลี่ยของการเกิดเหตุการณ์ (events) ที่มีค่าคงที่ ณ หนึ่งหน่วยเวลาที่เรากำหนด แต่ในสภาพความเป็นจริงหลายครั้งที่เรารวบรวมข้อมูลที่เป็นจำนวนนับ (count data) ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยของข้อมูลมีค่าต่างไปจากค่าความแปรปรวน จึงมีผู้ศึกษาหาทางเลือกใหม่ของการแจกแจง ครั้นเมื่อปี 1973 Consul และ Jain ได้เสนอรูปแบบการแจกแจง เพื่อนำมาอธิบายข้อมูลจำนวนนับที่มีสองพารามิเตอร์ โดยเรียกว่าการแจกแจง แบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไป (generalized Poisson distribution: GPD) ซึ่งมีพารามิเตอร์ที่อธิบายทั้งค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของข้อมูลด้วย และต่อมามีผู้พัฒนาเรื่อยมา เช่น Janardan และ Schacffer ปี 1977 ได้นำไปประยุกต์กับข้อมูลทางด้านชีววิทยา ในปี 1989 Consul ได้ศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ ของการแจกแจง GPD เพิ่มเติม ในปี 1992 Johnson Kotz และ Kemp และในปีเดียวกัน Consul และ Famoye ได้ศึกษาและประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ถดถอย ในปี 1994 Ambagaspitiya และ Balakrishnan ได้นำไปประยุกต์ใช้ทางด้านการประภัย และในปี 1995 Scollnik ได้ศึกษาและประยุกต์ใช้ทางด้านประกันภัยเช่นกัน จนถึงปัจจุบันการนำการแจกแจง GPD ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้ในหลายแขนงวิชาที่มีลักษณะข้อมูลนับ

สำหรับในเรื่องของการประมาณค่า (estimation) ของพารามิเตอร์ในบทความนี้ได้นำเสนอการประมาณค่าโดยวิธีโมเมนต์ (method of moment) และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood estimators) และได้ทำการเปรียบเทียบการประมาณโดยวิธีเดียวกันกับการแจกแจงแบบปัวส์ซงในสถานะการณ์ต่าง ๆ กัน

2. The Generalized Poisson Distribution (GDP)

นิยาม: การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไป X ซึ่งแสดงจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้น ในช่วงเวลาหนึ่ง หรือในอาณาบริเวณหนึ่ง คือ

$$\mathrm{f}(x;\lambda,\theta) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\lambda+\theta x)^{x-1}e^{-\lambda-\theta x}}{x!} \\ 0 \end{cases}$$

โดยที่พารามิเตอร์ $\lambda > 0$ และ max $(-1,\lambda/m) \le \theta < 1$ และค่า m เป็นค่าจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่ทำให้ $\lambda + \theta m > 0$ เมื่อ θ มีค่าเป็นลบ จะเห็นว่าการแจกแจงแบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไปจะกลายเป็นการแจกแจงแบบปัวส์ซงเมื่อค่า $\theta = 0$

3. คุณสมบัติบางประการของ GPD

3.1 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน

ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไป $\mathrm{f}(x;\lambda,\theta)$ มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน คือ

$$E[X] = \frac{\lambda}{(1-\theta)} \quad \text{และ} \quad V[X] = \frac{\lambda}{(1-\theta)^3}$$

พิสูจน์

ในการพิสูจน์จะค่อนข้างลำบากหากเราทำการพิสูจน์โดยตรงคือการรวมค่าของตัวแปรตั้งแต่ศูนย์ถึงค่าอนันต์ของฟังก์ชันการแจกแจง

จากเราทราบว่า $\sum_{all\ x} f(x;\lambda,\theta) = 1$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda+\theta x)^{x-1}\ e^{-\lambda-\theta x}}{x!} = 1 \quad \text{หรือ} \quad \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda+\theta x)^{x-1}\ e^{-\theta x}}{x!} = e^{\lambda} \tag{1}$$

สำหรับ $\lambda > 0$ และจะพิจารณาในกรณี $0 \le \theta < 1$ จากกรณี $\lambda > 0$ และ $\theta > 0$ จะมีจำนวนจริง δ ที่ทำให้ $\theta = \delta\lambda$ ดังนั้นจึงได้สมการที่ (1) เป็นดังนี้

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda+\delta\lambda x)^{x-1}\ e^{-\delta\lambda x}}{x!} = e^{\lambda} \quad \text{หรือ} \quad \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x}(1+\delta x)^{x-1}\ e^{-\delta\lambda x}}{x!} = e^{\lambda} \ldots \tag{2}$$

เราทำการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งทั้งสองข้างของสมการที่ (2) โดยเทียบกับ λ เราได้

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(1+\delta x)^{x-1}}{x!}\left[x\lambda^{x-1}e^{-\delta\lambda x} - x\delta\lambda^{x}e^{-\delta\lambda x}\right] = e^{\lambda}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} x\left[\frac{(1+\delta x)^{x-1}}{x!}\lambda^{x}e^{-\delta\lambda x}\right]\left(\frac{1-\delta\lambda}{\lambda}\right) = e^{\lambda} \quad (3)$$

เราจะได้ว่า

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x\left[\frac{(1+\delta x)^{x-1}}{x!}\lambda^{x}e^{-\lambda-\delta\lambda x}\right] = \frac{\lambda}{1-\delta\lambda} = \frac{\lambda}{1-\theta}$$

ต่อไปเราจะหา $V[X]$ ซึ่งต้องหา $E[X^2]$ โดยใช้วิธีการเดิม จากสมการที่ (3) เราได้ว่า

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{x(1+\delta x)^{x-1}}{x!}\left[\lambda^{x-1}e^{-\delta\lambda x} - \delta\lambda^{x}e^{-\delta\lambda x}\right] = e^{\lambda}$$

ทำการหาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง โดยเทียบกับ λ เราจะได้

$$e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x(1+\delta x)^{x-1}}{x!}\left[(x-1)\lambda^{x-2}e^{-\delta\lambda x} - \lambda^{x-1}e^{-\delta\lambda x}(\delta x) + \delta\lambda^{x}e^{-\delta\lambda x}(\delta x) - \delta e^{-\delta\lambda x}x\lambda^{x-1}\right]$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x(1+\delta x)^{x-1}}{x!}\lambda^{x}e^{-\delta\lambda x}\left[\frac{x}{\lambda^2} - \frac{\delta x}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} + x\delta^2 - \frac{\delta x}{\lambda}\right]$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x(1+\delta x)^{x-1}}{x!}\lambda^{x}e^{-\delta\lambda x}\left[\frac{x(1-\delta\lambda)^2 - 1}{\lambda^2}\right]$$

$$1 = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x}(1+\delta x)^{x-1}}{x!}e^{-\lambda-\delta\lambda x}\left[\frac{x^2(1-\delta\lambda)^2 - x}{\lambda^2}\right]$$

$$1 = \sum_{x=0}^{\infty} P[X=x]\left[x^2\left(\frac{1-\delta\lambda}{\lambda}\right)^2 - \frac{x}{\lambda^2}\right]$$

$$1 = E[X^2]\left(\frac{1-\delta\lambda}{\lambda}\right)^2 - E[X]\frac{1}{\lambda^2}$$

เราได้ว่า

$$E[X^2]\left(\frac{1-\delta\lambda}{\lambda}\right)^2 = 1 + E[X]\frac{1}{\lambda^2} = 1 + \left(\frac{\lambda}{1-\theta}\right)\frac{1}{\lambda^2}$$

$$E[X^2] \;=\; \left[1+\left(\frac{\lambda}{1-\theta}\right)\frac{1}{\lambda^2}\right]\left(\frac{\lambda}{1-\delta\lambda}\right)^2$$

$$E[X^2] \;=\; \frac{\lambda^2}{(1-\theta)^2}+\frac{\lambda}{1-\theta}\frac{1}{(1-\theta)^2}$$

$$= \frac{\lambda}{(1-\theta)^3}+\frac{\lambda^2}{(1-\theta)^2}$$

เมื่อเราหาค่าของ $E[X^2]$ ได้แล้ว สามารถหาค่าความแปรปรวนจาก

$$V[X] = E[X^2] - \left(E[X]\right)^2$$

$$= \frac{\lambda}{(1-\theta)^3}+\frac{\lambda^2}{(1-\theta)^2}-\frac{\lambda^2}{(1-\theta)^2} = \frac{\lambda}{(1-\theta)^3}$$

3.2 Convolution Property

การแจกแจงที่จะมีคุณสมบัติ convolution หมายความถึงตัวแปรสุ่มสองตัวที่อิสระกัน และมีการแจกแจงเดียวกัน เมื่อเรานำตัวแปรทั้งสองมารวมกันและยังรักษาสภาพการแจกแจงเดิม เช่นการแจกแจกแบบปกติ (normal distribution) หากเราบวกกันสองตัวขึ้นไป ผลที่ได้ก็ยังเป็นการแจกแจงปกติ หรือการแจกแจงแบบปัวส์ซงปกติและปัวส์ซงวางนัยทั่วไปก็มีคุณสมบัตินี้ โดยแสดงได้ตามทฤษฎีดังนี้

ทฤษฎีบท X_1 และ X_2 เป็นตัวแปรสุ่มที่อิสระกัน ซึ่งต่างมีการแจกแจงเป็นปัวส์ซงวางนัยทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ (λ_1,θ) และ (λ_2,θ) ตามลำดับ ผลรวม $X_1 + X_2$ จะมีการแจกแจงเป็นปัวส์ซงวางนัยทั่วไปเดิม โดยที่มีพารามิเตอร์ $(\lambda_1 + \lambda_2,\theta)$

พิสูจน์ ให้ $Y = X_1 + X_2$ และ $Z = X_2$

เราได้ว่าฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม (joint probability mass function) ของ X_1 และ X_2 คือ

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$$

$$= \frac{\lambda_1(\lambda_1+\theta x_1)^{x_1-1}\,e^{-\lambda_1-\theta x_1}}{x_1!}\frac{\lambda_2(\lambda_2+\theta x_2)^{x_2-1}\,e^{-\lambda_2-\theta x_2}}{x_2!}$$

$$= \lambda_1\lambda_2\frac{(\lambda_1+\theta x_1)^{x_1-1}}{x_1!}\frac{(\lambda_2+\theta x_2)^{x_2-1}}{x_2!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)-\theta(x_1+x_2)}$$

เราจะใช้การหาการแจกแจงใหม่ (ตัวแปร Y และ Z) โดยวิธีการแปลงค่าตัวแปร (transformation technique) เราได้ว่า $X_1 = Y - Z$ และ $X_2 = Z$ โดยที่ $0 \le Z \le Y$ และ $Z = 0,1,2,\ldots,Y$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ Y และ Z คือ

$$f_{Y,Z}(y,z) \;=\; f_{X_1,X_2}(y-z,z)$$

$$= \lambda_1\lambda_2 \frac{(\lambda_1+\theta(y-z))^{(y-z)-1}}{(y-z)!}\frac{(\lambda_2+\theta z)^{z-1}}{z!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)-\theta y}$$

ดังนั้นเราจะหาการแจกแจงชายขอบ (marginal distribution) ของ ***Y*** คือ

$$f_Y(y) \quad = \quad \sum_{all\ z} f(y,z) = \sum_{z=0}^{y} \lambda_1\lambda_2 \frac{(\lambda_1+\theta(y-z))^{(y-z)-1}}{(y-z)!}\frac{(\lambda_2+\theta z)^{z-1}}{z!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)-\theta y} \qquad (4)$$

จากที่เราทราบว่าผลรวมของฟังก์ชันความน่าจะเป็น ทุกค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้ (sample space) จะมีค่าเป็น 1 เสมอ ดังนั้นเราจะได้

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda+\theta x)^{x-1}\ e^{-\lambda-\theta x}}{x!} = 1 \text{ หรือ } \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda+\theta x)^{x-1}\ e^{-\theta x}}{x!} = e^{\lambda}$$

แล้วเราก็ทราบว่า $e^{\lambda_1+\lambda_2} = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}$ จึงได้ว่า

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2+\theta x)^{x-1}\ e^{-\theta x}}{x!} = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_1(\lambda_1+\theta i)^{i-1}\ e^{-\theta i}}{i!}\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_2(\lambda_2+\theta j)^{j-1}\ e^{-\theta j}}{j!}\right]$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty}\left[\lambda_1\lambda_2\sum_{i=0}^{x}\frac{(\lambda_1+\theta i)^{i-1}[\lambda_2+\theta(x-i)]^{(x-i)-1}}{i!(x-i)!}\right]e^{-\theta x} \qquad (5)$$

จากสมการที่ (5) เราจะเห็นว่าทั้งสองข้างต่างเป็นสัมประสิทธิ์ของ $e^{-\theta x}$ ดังนั้น

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2+\theta x)^{x-1}}{x!} = \lambda_1\lambda_2\sum_{i=0}^{x}\frac{(\lambda_1+\theta i)^{i-1}[\lambda_2+\theta(x-i)]^{(x-i)-1}}{i!(x-i)!}$$

ดังนั้นเมื่อเราพิจารณาดูผลที่ได้จากสมการที่ (5) ทำให้เราสรุปได้ว่าสมการที่ (4) เป็นดังนี้

$$\lambda_1\lambda_2\sum_{z=0}^{y}\frac{(\lambda_2+\theta z)^{z-1}[\lambda_1+\theta(y-z)]^{(y-z)-1}}{z!(y-z)!} = \frac{(\lambda_2+\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_1+\theta y)^{y-1}}{y!}$$

จากสมการที่ (4) เราจะได้ว่าฟังก์ชันชายขอบของ ***Y*** เป็นดังนี้

$$f(y) \quad = \quad \frac{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2+\theta y)^{y-1}}{y!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)-\theta y}$$

โดยที่ $\lambda_1+\lambda_2 > 0$ และ y = 0,1,2,3,... ซึ่งเป็นฟังก์ชันการแจกแจงแบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไปที่มีพารามิเตอร์เป็น ($\lambda_1 + \lambda_2$,θ)

4. การประมาณค่าพารามิเตอร์

ให้ $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\lambda,\theta)$ ที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ λ และ θ เราต้องการหาตัวประมาณ $\hat{\lambda}=\hat{\lambda}(X_1,X_2,...,X_n)$ และ $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,...,X_n)$ ที่ใช้เป็นตัวประมาณค่าของ λ และ θ ตามลำดับ โดยในบทความนี้ขอเสนอ 2 วิธี คือวิธีแบบโมเมนต์ (method of moment) และ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (method of maximum likelihood)

4.1 วิธีโมเมนต์

เป็นวิธีการหาตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ที่เก่าแก่ที่สุดเสนอโดย คาร์ล เพียร์สัน (Karl Pearson) เมื่อประมาณปี ค.ศ.1894 โดยหลักเกณฑ์ที่สำคัญที่นำมา ใช้ได้แก่ การถือว่าโมเมนต์ของตัวอย่าง (sample moments) เป็นตัวประมาณของโมเมนต์ของประชากร (population moments) ที่สมนัยกัน กล่าวคือ

$$E(X^k) = \mu'_k \text{ และ } M'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

ดังนั้นเรากำหนดให้ $\mu'_k = M'_k$

ในที่นี้เรามี $\mu'_1 = E(X) = \dfrac{\lambda}{1-\theta} = M'_1 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$

จะได้ว่า $\hat{\lambda}=(1-\theta)\bar{X}$

ในกรณี $\theta = \delta\lambda$ เราได้ตัวประมาณ λ คือ

$$\hat{\lambda} = \frac{\bar{X}}{1+\delta\bar{X}} \text{ เมื่อ } \delta \text{ ทราบค่า}$$

ส่วนในกรณีที่ δ ไม่ทราบค่า

$$\mu'_2 = E(X^2) = \frac{\lambda}{(1-\delta\lambda)^3}+\frac{\lambda^2}{(1-\delta\lambda)^2}$$

$$M'_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

เราได้ $\hat{\lambda} = \sqrt{\dfrac{\bar{X}^3}{S^2}}$ และ $\hat{\delta} = \sqrt{\dfrac{S^2}{\bar{X}^3}}-\dfrac{1}{\bar{X}}$ โดยที่ $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

4.2 วิธีแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

ให้ $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\lambda,\theta)$ เราจะได้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (likelihood function) ของตัวอย่างสุ่ม ได้แก่ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ $X_1, X_2, ..., X_n$ โดยถือว่าเป็นฟังก์ชันพารามิเตอร์ เรามักแทนฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นด้วย $L(X_1, X_2, ..., X_n;\lambda,\theta)$ กล่าวคือ

$$L(X_1, X_2, ..., X_n;\lambda,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i;\lambda,\theta)$$

ในการหาด้วยวิธีการนี้จะเป็นการหาจุดที่สูงที่สุดของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น ดังนั้นจึงเป็นที่นิยมที่จะใช้การหา log ของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นก่อนแล้วค่อยหาจุดสูงสุด เพราะฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นส่วนใหญ่จะเป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential function)

สำหรับในกรณีที่พารามิเตอร์ทั้งสองคือ λ และ θ ต่างไม่ทราบค่า เราจะได้ตัวประมาณคือ $\hat{\lambda} = (1-\hat{\theta})\bar{x}$ และ $\hat{\theta}$ ได้จากการใช้ *Newton-Raphson procedure* จากฟังก์ชันที่ได้จากการหาอนุพันธ์เทียบกับ θ คือ

$$H(\theta) = \sum_{x=1}^{k} n_x \left[\frac{(x-1)x}{\bar{x} + (x-\bar{x})\theta} \right] - n\bar{x} = 0$$

เมื่อ k เป็นจำนวนชั้นของข้อมูลของการแจกแจงความถี่

5. ประสิทธิภาพของตัวประมาณ

ในหัวข้อที่แล้วเราได้หาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไป ในสภาวการณ์ต่าง ๆ ในหัวข้อนี้จะเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการประมาณข้อมูลความถี่ ด้วยการแจกแจงแบบปัวส์ซง (usual poisson distribution: UPD) ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีว่าตัวประมาณพารามิเตอร์ λ คือค่าเฉลี่ยของข้อมูล ($\bar{x}$) กับการแจกแจงแบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไป (generalized poisson distribution: GPD) ที่เสนอไว้ในหัวข้อที่แล้ว

จากตารางทั้งสามด้านบน เมื่อข้อมูลมีค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$) และค่าความแปรปรวน (S^2) ใกล้กัน เช่นตารางแรก $\bar{X}$ = 1.84 และ S^2 = 1.77 เราใช้ตัวประมาณของ UPD กับ GPD ให้ผลใกล้กันดูที่ค่า χ^2 แต่หากข้อมูลเรามีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนต่างกันมาก เช่นตารางสุดท้ายมีค่าเฉลี่ย $\bar{X}$ = 3.64 ในขณะที่ค่าความแปรปรวน S^2 = 12.24 จะเห็นว่าหากเราใช้ตัวประมาณพารามิเตอร์แบบ GPD ให้ผลดีกว่า χ^2 = 3.27 แต่หากใช้ตัวประมาณแบบ UPD จะได้ค่า χ^2 = 35.79

ตารางที่ 1 การเปรียบเทียบการ fit ของความถี่จากการสังเกตด้วยการแจกแจงแบบปัวส์ซงกับการแจกแจงแบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไป เมื่อค่าเฉลี่ย = 1.84 และความแปรปรวน = 1.77

Value of *X*	Observed	UPD	GPD
0	7	7.9	7.5
1	16	14.6	14.7
2	14	13.4	13.9
3	6	8.2	8.5
4	5	3.8	3.7
5	2	1.9	1.7
≥6			
	$\bar{x}$ = 1.84 S^2 = 1.77	χ^2 = 1.23	χ^2 = 1.39

ตารางที่ 2 การเปรียบเทียบการ fit ของความถี่จากการสังเกต ด้วยการแจกแจงแบบปัวส์ซงกับการแจกแจงแบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไป เมื่อค่าเฉลี่ย = 2.68 และความแปรปรวน = 5.69

Value of X	Observed	UPD	GPD
0	7	3.4	7.8
1	12	9.2	10.7
2	9	12.3	9.7
3	10	11.0	7.4
4	3	7.4	5.2
5	2	3.9	3.4
≥ 6	7	2.8	5.8
	$\bar{x}$ = 2.68 S^2 = 5.69	χ^2 = 15.48	χ^2 = 2.96

ตารางที่ 3 การเปรียบเทียบการ fit ของความถี่จากการสังเกต ด้วยการแจกแจงแบบปัวส์ซงกับการแจกแจงแบบปัวส์ซงวางนัยทั่วไป เมื่อค่าเฉลี่ย = 3.64 และความแปรปรวน = 12.24

Value of X	Observed	UPD	GPD
0	7	1.3	7.2
1	9	4.8	8.7
2	9	8.7	7.9
3	4	10.6	6.4
4	8	9.6	4.9
5	3	7.0	3.7
≥ 6	10	8.1	11.1
	$\bar{x}$ = 3.64 S^2 = 12.24	χ^2 = 35.79	χ^2 = 3.27

ตารางที่ 4 ค่าของการประมาณของพารามิเตอร์ λ และ θ โดยวิธีโมเมนต์ (MME) กับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE)

n	λ	θ	MME		MLE	
			$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$
10	0.5	0.0	0.48989	-0.22474	0.40000	0.00000
		0.1	0.50000	0.00000	0.53333	-0.06667
		0.3	0.50000	0.00000	0.53333	-0.06667
		0.5	0.48107	0.19822	0.50000	0.16667
	2.0	0.0	2.33827	-0.29904	2.32938	-0.29498
		0.1	2.37979	-0.25252	2.44887	-0.28887
		0.3	2.13159	0.07322	2.25314	0.02037
		0.5	2.49157	0.24498	2.49157	0.24498

ตารางที่ 4 ค่าของการประมาณของพารามิเตอร์ λ และ θ โดยวิธีโมเมนต์ (MME) กับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE) (ต่อ)

n	λ	θ	MME $\hat{\lambda}$	MME $\hat{\theta}$	MLE $\hat{\lambda}$	MLE $\hat{\theta}$
	5.0	0.0	7.50000	-0.50000	7.58285	-0.51657
		0.1	7.32673	-0.35680	7.41153	-0.37251
		0.3	7.20799	-0.07582	7.49159	-0.11815
		0.5	6.42821	0.30128	6.96755	0.24265
100	0.5	0.0	0.51862	0.07389	0.51709	0.07662
		0.1	0.53555	0.22383	0.51718	0.25045
		0.3	0.55018	0.41469	0.51526	0.45185
		0.5	0.58287	0.58953	0.51131	0.63996
	2.0	0.0	1.97265	0.10737	1.98659	0.10108
		0.1	1.93523	0.21011	1.96433	0.19823
		0.3	1.90089	0.40412	1.93717	0.39274
		0.5	1.93580	0.58725	1.95771	0.58258
	5.0	0.0	4.89104	0.07191	4.93331	0.06387
		0.1	4.88324	0.17513	4.96312	0.16164
		0.3	5.42621	0.25770	5.53924	0.24224
1000	0.5	0.0	0.51294	0.04303	0.51223	0.04434
		0.1	0.51631	0.15773	0.51256	0.16385
		0.3	0.52229	0.34957	0.51221	0.36212
		0.5	0.53064	0.54452	0.51011	0.56213
	2.0	0.0	2.06014	0.02456	2.06294	0.02323
		0.1	2.05867	0.12359	2.07023	0.11868
		0.3	2.01961	0.33680	2.05063	0.32345
		0.5	2.01508	0.53344	2.06265	0.52242
	5.0	0.0	5.10543	0.01096	5.10986	0.01010
		0.1	5.08676	0.11519	5.10833	0.11144
		0.3	5.00816	0.32423	5.07134	0.31570

6. เอกสารอ้างอิง

Ambagaspitiya, R.S. and Balakrishnan, N. (1994). On the Compound Generalized Poisson Distribution. ASTIN BULLETIN. 24(2).

Consul, P.C.(1989). Generalized Poisson Distribution : Properties and Applications. New York/Basel: Marcel Dekker, Inc.

❑❑❑❑❑