ว.วิทย. มข. 41(1) 92-100 (2556) KKU Sci. J. 41(1) 92-100 (2013)

อสมการไฮเพอร์เซอร์เคิล และการประยุกต์

Hypercircle Inequality and Its Application

กรรณิการ์ ขำพึ่งสน[1]

บทคัดย่อ

ในบทความนี้เราจะกล่าวถึงอสมการไฮเพอร์เซอร์เพอร์เคิลซึ่งเป็นอสมการที่มีชื่อเสียงในสาขาคณิตศาสตร์ นอกจากนี้เรายังนำความรู้จากอสมการดังกล่าวมาประยุกต์ในปัญหาการประมาณค่าของฟังก์ชันในปริภูมิรีโพรดิวซิ่งเคอร์เนลฮิลเบิร์ต

ABSTRACT

In this paper, we present the hypercircle inequality which is well known in mathematics. Moreover, we apply the available material of it to the problem of learning the value of a function in a reproducing kernel Hilbert space.

คำสำคัญ: อสมการไฮเพอร์เซอร์เคิล ปริภูมิรีโพรดิวซิ่งเคอร์เนลฮิลเบิร์ต การหาค่าเหมาะสมที่สุด

Keywords: Hypercircle inequality, Reproducing Kernel Hilbert space, Optimization

บทนำ

ปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีวิวัฒนาการก้าวหน้าเป็นอย่างมาก จึงทำให้มีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากสนใจศึกษาการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ทางวิทยาศาสตร์และหนึ่งในวิธีการดังกล่าวคือ การนำข้อมูลจากการทดลองมาหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ปรากฏในการทดลอง แล้วเขียนฟังก์ชันหรือสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นตัวแทนใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์เหล่านั้น อสมการไฮเพอร์เซอร์เคิล (hypercircle inequality) ถือเป็นอีกเครื่องมือหนึ่งที่ถูกนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาแขนงนี้

[1]สาขาคณิตศาตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อำเภอเมือง จังหวัดพะเยา 56000

E-mail: kannika.kh@up.ac.th

ในบทความนี้จึงขอกล่าวถึงอสมการไฮเพอร์เซอร์เพอร์เคิลซึ่งเป็นอสมการที่มีชื่อเสียงในสาขาคณิตศาสตร์ และนำความรู้จากอสมการดังกล่าวมาประยุกต์ในปัญหาการประมาณค่าของฟังก์ชันในปริภูมิรีโพรดิวซิ่งเคอร์เนลฮิลเบิร์ต

เนื้อความ

กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตบนสนามจำนวนจริง (Hilbert space) ซึ่งผลคูณภายใน (inner product) และนอร์ม (norm) นิยามโดย $\langle \bullet,\bullet \rangle : H\times H \to \mathbb{R}$ และ $\|\bullet\| : H \to \mathbb{R}$ ตามลำดับ กำหนดให้เวกเตอร์ $x_1,\ldots,x_n$ เป็นเวกเตอร์อิสระเชิงเส้นใน H ให้ $M=\{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n : \alpha_i\in R, i\in\mathbb{N}_n\}$ ซึ่งเป็นปริภูมิย่อยของ H เมื่อเราใช้สัญลักษณ์ $\mathbb{N}_n=\{1,2,\ldots,n\}$ กำหนดให้ X เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น (linear operator) จาก H ไปยัง $\mathbb{R}^n$ และสำหรับทุก ๆ $x\in H$

$$Xx=\left(\left\langle x,x_j\right\rangle : j\in\mathbb{N}_n\right)$$

และกำหนดให้ X^T เป็นตัวดำเนินการผูกพันของ X (adjoin operator) จาก $\mathbb{R}^n$ ไปยัง M และสำหรับทุก ๆ $a\in\mathbb{R}^n$

$$X^T(a)=\sum_{j\in\mathbb{N}_n} a_jx_j$$

เรานิยามแกรมเมทริกซ์ (Gram matrix) ของเวกเตอร์ $x_1,\ldots,x_n$ โดย

$$G=XX^T=\begin{bmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle \\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle & \cdots & \langle x_2,x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n,x_1\rangle & \langle x_n,x_2\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle \end{bmatrix}$$

จากนิยามแกรมเมทริกซ์ของเวกเตอร์ $x_1,\ldots,x_n$ จะสามารถแสดงได้ว่าเป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน (positive definite) และเมทริกซ์สมมาตร นั่นคือ $G=G^T$

บทนิยามที่ 1 กำหนดให้ $d=(d_j : j\in\mathbb{N}_n)\in\mathbb{R}^n$ เรานิยาม**เซตระนาบเกิน (hyperplan)** คือเซตที่มีสมาชิกสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$Xx=d \tag{1}$$

นั่นคือ $\left\{x : x\in H, \left\langle x,x_i\right\rangle = d_i \quad \forall i\in\mathbb{N}_n\right\}$

จากนิยามดังกล่าวเราพบว่าสำหรับทุก ๆ $d=(d_j : j\in\mathbb{N}_n)\in\mathbb{R}^n$ เราจะสามารถหาเวกเตอร์ใน H ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข (1) ได้เสมอ และผู้เขียนได้พิสูจน์ข้อความดังกล่าวในบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 2 สำหรับทุก $d \in \mathbb{R}^n$ เซตระนาบเกิน $\{x : x \in H, Xx = d\}$ ไม่เป็นเซตว่าง (Davis, 1975)

พิสูจน์ สมมุติให้ $x(d) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ เป็นเวกเตอร์ใน H ที่ทำให้ $Xx(d) = d$ นั่นคือ

$$\langle x(d), x_i \rangle = d_i \qquad \forall i \in \mathbb{N}_n$$

จากสมการดังกล่าวเราสามารถเขียนให้อยู่ในรูประบบสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
&a_1 \langle x_1, x_1 \rangle + a_2 \langle x_2, x_1 \rangle + \ldots + a_n \langle x_n, x_1 \rangle = d_1 \\
&a_1 \langle x_1, x_2 \rangle + a_2 \langle x_2, x_2 \rangle + \ldots + a_n \langle x_n, x_2 \rangle = d_2 \\
&\vdots \\
&a_1 \langle x_1, x_n \rangle + a_2 \langle x_2, x_n \rangle + \ldots + a_n \langle x_n, x_n \rangle = d_n
\end{aligned}$$

และเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก G เป็นเมทริกซ์สมาตร และกำหนดให้ $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ จึงสามารถเขียนสมการข้างต้นได้ว่า

$$Ga = d$$

เนื่องจากเวกเตอร์ $x_1, \ldots, x_n$ เป็นเวกเตอร์อิสระเชิงเส้นใน H ดังนั้น $\det(G) \neq 0$ และได้ว่า G เป็นนอน-ซิงกูลาร์เมทริกซ์ จึงทำให้ได้ว่า

$$a = G^{-1}d \tag{2}$$

เนื่องจากเรากำหนดให้ $x(d)$ คือเวกเตอร์ที่อยู่ในรุปผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ x_i สำหรับทุก ๆ $i \in \mathbb{N}_n$ และเนื่องจาก X^T เป็นตัวดำเนินการผูกพันของ X จาก $\mathbb{R}^n$ ไปยัง M ดังนั้นจากสมการที่ (2) จึงทำให้ได้ว่า

$$X^T(G^{-1}d) = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} a_i x_i = x(d)$$

นั่นคือจะมีสมาชิก

$$x(d) = X^T G^{-1} d \in H$$

ที่สอดคล้องเงื่อนไข (1) สำหรับทุก ๆ $d = (d_j : j \in \mathbb{N}_n) \in \mathbb{R}^n$

$\square$

บทนิยามที่ 3 **เซตไฮเพอร์เซอร์เคิล (hypercircle)** คือ เซตที่มีสมาชิกอยู่ในเซตระนาบเกิน และบอลหนึ่งหน่วยใน H และเราใช้สัญลักษณ์นี้แทนเซตไฮเพอร์เซอร์เคิล

$$\mathrm{H}(d)=\{x: x\in H, Xx=d, \|x\|\le 1\}$$

ก่อนจะพิสูจน์อสมการไฮเพอร์เซอร์เคิล ผู้เขียนขอกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญและจะถูกนำไปใช้การพิสูจน์อสมการดังกล่าว โดยขอเริ่มจากบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 4 สำหรับทุก ๆ $d\in\mathbb{R}^n$ แล้ว $\mathrm{H}(d)=\{x: x\in H, Xx=d, \|x\|\le 1\}\neq\phi$ ก็ต่อเมื่อ $(d, G^{-1}d)\le 1$ เมื่อ $(\bullet,\bullet)$ คือผลคูณภายในแบบยุคลิดใน $\mathbb{R}^n$ (Novaprateep et al., 2011)

พิสูจน์ เนื่องจาก $x(d)$ คือเวกเตอร์ที่อยู่ในเซตระนาบเกิน (hyperplan) ดังนั้น

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(d)=\{x: x\in H, Xx=d, \|x\|\le 1\}\neq\phi &\Leftrightarrow \|x(d)\|^2\le 1\\ &\Leftrightarrow \left\langle x(d), x(d)\right\rangle\le 1\\ &\Leftrightarrow \left\langle X^T G^{-1}d, x(d)\right\rangle\le 1\\ &\Leftrightarrow (G^{-1}d, Xx(d))\le 1\\ &\Leftrightarrow (G^{-1}d, d)\le 1\end{aligned}$$

□

บทตั้ง 5 กำหนดให้ $x_0\in H$ และ $x_0\notin M$ จะได้ว่า $\max\{\langle w, x_0\rangle : w\in H(0)\}\le dist(x_0, M)$ เมื่อ $dist(x_0, M)=\inf\{\|x_0-y\| : y\in M\}$ (Khompurngson and Micchelli, 2011)

พิสูจน์ สำหรับทุก ๆ $w\in H(0)$ และ $y\in M$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\langle w, x_0\rangle &= \langle w, x_0-y\rangle\\ &\le \|w\|\cdot\|x_0-y\|\end{aligned}$$

จากนิยามอินฟิมัมทำให้สามารถสรุปได้ว่า

$$\max\{\langle w, x_0\rangle : w\in H(0)\}\le dist(x_0, M)$$

□

ทฤษฎีบท (อสมการไฮเพอร์เซอร์เคิล)

ถ้า $\mathrm{H}(d)\neq\phi$ และ $x_0\in H$ จะได้ว่า

$$\left|\langle x(d), x_0\rangle-\langle x, x_0\rangle\right|\le dist(x_0, M)\sqrt{1-\|x(d)\|^2} \quad (3)$$

(Khompurngson and Micchelli, 2011)

พิสูจน์ กรณีที่ $H = M$ หรือ $x_0 \in M$ จะเห็นได้ชัดว่าทั้งสองข้างของอสมการมีค่าเป็นศูนย์ ต่อไปเราจึงพิจารณาในกรณีที่ $H \neq M$ และ $x_0 \notin M$ เนื่องจากบทตั้ง 2 จะได้ว่า

$$x(d) = X^T a \text{ เมื่อ } a = G^{-1}d$$

กำหนดให้ $e = x - x(d)$ เมื่อ $x \in H(d)$ เนื่องจาก $Xe = 0$ ทำให้ได้ว่า $\langle e, x(d) \rangle = 0$ ดังนั้น

$$\|e\|^2 = \|x\|^2 - \|x(d)\|^2 \leq 1 - \|x(d)\|^2$$

กรณีที่ $\|x(d)\| = 1$ จะสามารถแสดงว่าได้ว่า $H(d) = \{x(d)\}$ ดังนั้นทั้งสองข้างของอสมการมีค่าเป็นศูนย์เช่นกัน พิจารณากรณีที่ $\|x(d)\| < 1$ กำหนดให้ $u = \dfrac{e}{\sqrt{1 - \|x(d)\|^2}}$ และได้ว่า

$$X\left(\frac{e}{\sqrt{1 - \|x(d)\|^2}}\right) = 0 \text{ และ } \|u\| \leq 1$$

พิจารณาสำหรับทุก ๆ $x_0 \in H$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|\langle x, x_0 \rangle - \langle x(d), x_0 \rangle\right| &= \left|\langle x - x(d), x_0 \rangle\right| \\
&= \sqrt{1 - \|x(d)\|^2}\,\langle u, x_0 \rangle \\
&\leq \sqrt{1 - \|x(d)\|^2}\,\max\{\langle x, x_0 \rangle : x \in H(0)\} \\
&\leq \sqrt{1 - \|x(d)\|^2}\,dist(x_0, M)
\end{aligned}$$

□

จากอสมการข้างต้นจะเห็นว่า $\langle x(d), x_0 \rangle$ คือตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดในการประมาณค่า $\langle x, x_0 \rangle$ เมื่อ $x \in \mathrm{H}(d)$ หรือกล่าวได้ว่า $\langle x(d), x_0 \rangle$ คือจุดกึ่งกลางของช่วง $I(x_0, d) = \{\langle x, x_0 \rangle : x \in \mathrm{H}(d)\}$ นั่นเอง นอกจากนี้เรายังทราบว่า $x(d) = X^T G^{-1} d$ ซึ่งทำให้เห็นว่าตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดนั้นไม่ขึ้นอยู่กับเวกเตอร์ x_0

อสมการไฮเพอร์เซอร์เคิลกับปัญหาการประมาณค่าของฟังก์ชัน

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างของการประยุกต์ใช้ความรู้ของอสมการไฮเพอร์เซอร์เคิลมาพิจารณาปัญหาการประมาณค่าของฟังก์ชันในปริภูมิรีโพรดิวซิ่งเคอร์เนลฮิลเบิร์ต นั่นคือการหาฟังก์ชันในปริภูมิรีโพรดิวซิ่งเคอร์เนลฮิลเบิร์ต (Reproducing Kernel Hilbert space) (Aronszajn, 1950) เพื่อเป็นตัวแทนในการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ปรากฏในข้อมูล

ปริภูมิรีโพรดิวซิ่งเคอร์เนลฮิลเบิร์ต H ประกอบด้วยสมาชิกของฟังก์ชันจากเซต Γ ไปยังจำนวนจริง $\mathbb{R}$ เมื่อ Γ เป็นเซตย่อยของจำนวนจริง และ K เป็นฟังก์ชัน ของ s และ t เมื่อ $s, t \in \Gamma$ จะถูกเรียกว่า

รีโพรดิวซิ่งเคอร์เนล (Reproducing Kernel) (Aronszajn, 1950) ถ้าสำหรับทุก ๆ $t \in \Gamma$ และ ทุก ๆ ฟังก์ชัน $f \in H$ แล้ว

$$f(t) = \langle f, K_t \rangle$$

เมื่อ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ แทนผลคูณภายใน และ K_t แทนฟังก์ชันจากเซต Γ ไปยังจำนวนจริง $\mathbb{R}$ และกำหนดให้ ทุก ๆ $s \in \Gamma$, $K_t(s) = K(s,t)$ ในปี 1950 อารอนซาจน์ และมัวร์ (Aronszajn and Moore) (Aronszajn, 1950) ได้ค้นพบทฤษฎีบท กล่าวคือ ฟังก์ชัน K ข้างต้นจะเป็น รีโพรดิวซิ่งเคอร์เนล ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $\{t_1, t_2, ..., t_n\} \subseteq \Gamma$ และเมทริกซ์ $K(t_i, t_j)$ ซึ่งกำหนดโดย

$$K(t_i, t_j) = \begin{bmatrix} K(t_1,t_1) & \cdots & K(t_1,t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K(t_n,t_1) & \cdots & K(t_n,t_n) \end{bmatrix}$$

เป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน (positive semi-definite) ซึ่งนับได้ว่าเป็นทฤษฎีบทที่มีประโยชน์มาก นอกจากนี้ยังพบว่า ทุก ๆ รีโพรดิวซิ่งเคอร์เนล K จะมี ปริภูมิรีโพรดิวซิ่งเคอร์เนลฮิลเบิร์ต H เพียงปริภูมิเดียวที่สมนัยกับรีโพรดิวซิ่งเคอร์เนิล K

ตัวอย่าง 6 กำหนดให้ H เป็นปริภูมิรีโพรดิวซิ่งเคอร์เนลฮิลเบิร์ตและ K เป็น **Gaussian Kernel** ซึ่งกำหนดโดยทุก ๆ $s, t \in \mathbb{R}$

$$K(t,s) = K_s(t) = exp(-\frac{(t-s)^2}{10}) \quad t, s \in \mathbb{R}$$

ดังนั้นทุก ๆ $t \in \mathbb{R}$ และ ทุกๆ ฟังก์ชัน $f \in H$ จะได้ว่า

$$f(t) = \langle f, K_t \rangle$$

ในการทำการทดลองเชิงตัวเลขเรากำหนดฟังก์ชันแม่นตรง

$$g(t) = 4K_{0.75}(t) + 2K_{2.5}(t) - 0.5K_{-2.5}(t) + 5K_{-7.5}(t)$$

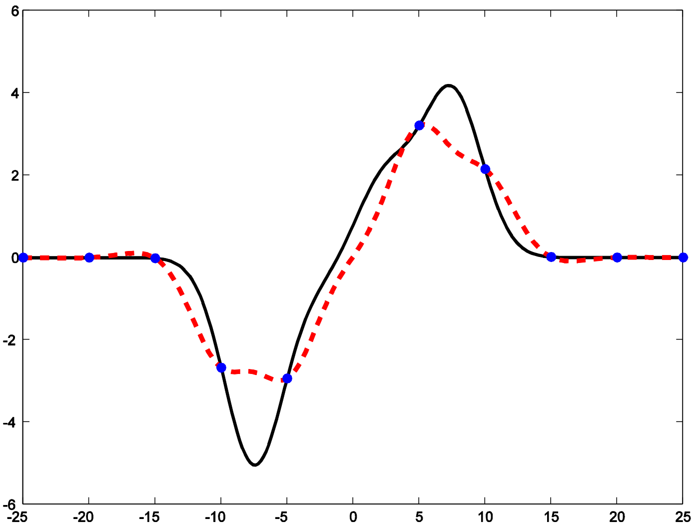
และเลือก $T = \{t_j : j \in N_{10}\} \subseteq \mathbb{R}$ แทนเซตของข้อมูล 10 ตัว ที่ถูกสร้างขึ้นจากความสัมพันธ์ $t_1 = -25, t_{j+1} = t_j + 5$ และ $t_6 = 5, t_{j+6} = t_{5+j} + 5$ สำหรับทุก ๆ $j \in \mathbb{N}_4$ จากการกำหนดดังกล่าวจะเห็นว่าเซตของเวกเตอร์ $\{K_{t_1}, K_{t_2}, ..., K_{t_{10}}\}$ สมนัยกับเวกเตอร์ $\{x_1, x_2, ..., x_{10}\}$ ที่ปรากฏในหัวข้ออสมการไฮเพอร์เซอร์เคิล ดังนั้น แกรมเมทริกซ์ของเวกเตอร์ $\{K_{t_1}, K_{t_2}, ..., K_{t_{10}}\}$ อยู่ในรูป

$$G = XX^T = \begin{bmatrix} K(t_1,t_1) & \cdots & K(t_1,t_{10}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K(t_{10},t_1) & \cdots & K(t_{10},t_{10}) \end{bmatrix}$$

ต่อมากำหนดเซต $d=(d_j=g(t_j):j\in\mathbb{N}_{10})$ จะเห็นว่า d คือข้อมูลที่ได้จากค่าจริงของฟังก์ชัน g ณ จุด t_j ซึ่งมีทั้งหมด 10 ตัว ดังนั้นเซตของไฮเพอร์เซอร์เคิลคือ

$$H(d)=\{f:\|f\|\le\delta, f(t_j)=\left\langle f,K_{t_j}\right\rangle=d_j, j\in\mathbb{N}_{10}\}$$

กำหนดให้ $t_0\in\mathbb{R}$ จากวิธีค่ากึ่งกลาง (midpoint algorithm) และอสมการไฮเพอร์เซอร์เคิล ทำให้สรุปได้ว่าค่าที่ดีที่สุดในการประมาณค่า $\left\langle f,K_{t_0}\right\rangle$ เมื่อเราทราบว่า $f\in H(d)$ คือ $f_{opt}=X^TG^{-1}d$ โดยที่ K_{t_0} นั่นคือเวกเตอร์ที่สมนัยกับ x_0 และ f_{opt} คือเวกเตอร์ที่สมนัยกับ $x(d)$ ตามลำดับ จากรูปด้านล่างกำหนดให้*เส้นประ*แสดงค่าของฟังก์ชัน f_{opt} ในขณะที่*เส้นทึบ*แสดงค่าของฟังก์ชัน g และจุดทึบทั้ง 10 จุด คือค่าของฟังก์ชัน g ณ จุด t_j เมื่อ $j\in\mathbb{N}_{10}$



รูปที่ 1 กราฟของฟังก์ชัน f_{opt}, g และค่าจริงของฟังก์ชัน g ณ จุด t_j โดย $j\in\mathbb{N}_{10}$

ตัวอย่าง 7 ในตัวอย่างนี้เรายังคงพิจารณา H และฟังก์ชันแม่นตรงเหมือนในตัวอย่างที่ 6 แต่ในตัวอย่างนี้เราจะเพิ่มการให้ข้อมูลจากฟังก์ชันแม่นตรง นั่นคือกำหนดให้ $T=\{t_j:j\in N_{20}\}\subseteq\mathbb{R}$ แทนเซตของข้อมูล 20 ตัวซึ่งสร้างเพิ่มต่อจากตัวอย่างที่ 6 และข้อมูลดังกล่าวถูกสร้างขึ้นจากความสัมพันธ์

$$t_1=-25,\ t_{j+1}=t_j+5 \text{ และ } t_6=5,\ t_{j+6}=t_{5+j}+5 \text{ สำหรับทุก ๆ } j\in\mathbb{N}_4 \text{ และ}$$

$$t_{11}=-8,\ t_{j+11}=t_{10+j}-5 \text{ และ } t_{16}=8,\ t_{j+16}=t_{15+j}+5 \text{ สำหรับทุก ๆ } j\in\mathbb{N}_4$$

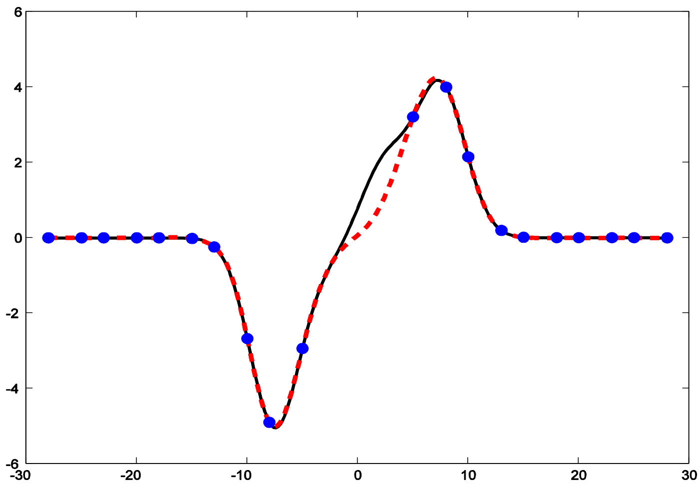
ดังนั้น แกรมเมทริกซ์ของเวกเตอร์ $\{K_{t_1},K_{t_2},...,K_{t_{20}}\}$ จะมีมิติ 20×20 และอยู่ในรูป

$$G=XX^T=\begin{bmatrix}K(t_1,t_1) & \cdots & K(t_1,t_{20})\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ K(t_{20},t_1) & \cdots & K(t_{20},t_{20})\end{bmatrix}$$

ต่อมากำหนดเซต $d=(d_j=g(t_j):j\in\mathbb{N}_{20})$ จะเห็นว่า d คือข้อมูลที่ได้จากค่าจริงของฟังก์ชัน g ณ จุด t_j ซึ่งในตัวอย่างนี้เราทราบข้อมูล 20 ตัว ดังนั้นเซตของไฮเพอร์เซอร์เคิลคือ

$$H(d)=\{f:\|f\|\le\delta, f(t_j)=\left\langle f,K_{t_j}\right\rangle=d_j, j\in\mathbb{N}_{20}\}$$

จากอสมการไฮเพอร์เซอร์เคิล เราจึงสามารถสรุปได้ $f_{opt}=X^TG^{-1}d$ คือตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดในการประมาณค่า $\left\langle f,K_{t_0}\right\rangle$ เมื่อเราทราบว่า $f\in H(d)$ ซึ่งในตัวอย่งนี้เราทราบข้อมูลถึง 20 ตัว จากกราฟด้านล่างเราจะเห็นได้ว่ากราฟเข้าใกล้ฟังก์ชันแม่นตรงมากกว่าในตัวอย่างที่ 6 และเรากำหนดให้*เส้นประ*แสดงค่าของฟังก์ชัน f_{opt} ในขณะ*เส้นทึบ*แสดงค่าของฟังก์ชัน g และจุดทึบทั้ง 20 จุดทึบคือค่าของฟังก์ชัน g ณ จุด t_j สำหรับทุก ๆ $j\in\mathbb{N}_{20}$



รูปภาพ 2 กราฟของฟังก์ชัน f_{opt}, g และค่าจริงของฟังก์ชัน g ณ จุด t_j โดย $j\in\mathbb{N}_{20}$

บทสรุป

จากการทำการทดลองเชิงตัวเลขในการประยุกต์ความรู้ในอสมการไฮเพอร์เซอร์เคิลกับปัญหาการประมาณค่าของฟังก์ชัน อย่างน้อยจากตัวอย่างเราพบว่าผลการทดลองมีค่าใกล้เคียงกับค่าจริง อย่างไรก็ตามเราจะเห็นได้ว่าการนำความรู้อสมการไฮเพอร์เซอร์เคิลมาใช้นั้น เราจะต้องทราบค่าของข้อมูลอย่างถูกต้องชัดเจน แต่ถ้าข้อมูลมีความคลาดเคลื่อนแล้วการนำความรู้เรื่องอสมการไฮเพอร์เซอร์เคิลมาใช้จะมีปัญหา ซึ่งถือว่าเป็นข้อจำกัดอย่างมากในการนำองค์ความรู้ในอสมการไฮเพอร์เซอร์เคิลมาประยุกต์ใช้ในศาสตร์ต่าง ๆ เพราะในสถานะการณ์จริงข้อมูลส่วนใหญ่มักจะมีค่าคลาดเคลื่อนรวมอยู่เสมอ ซึ่งอาจมาจากปัจจัยหลายอย่าง อาทิเช่น ข้อจำกัดของเครื่องมือวัด หรือความผิดพลาดที่เกิดจากมนุษย์ ดังนั้นแนวทางหนึ่งสำหรับการพัฒนาอสมการไฮเพอร์เซอร์เคิลคือการขยายอสมการไฮเพอร์เซอร์เคิลไปสู่ข้อมูลที่มีค่าคลาดเคลื่อน

เอกสารอ้างอิง

Aronszajn, N. (1950). Theory of reproducing kernels. Trans. Amer, Math. Soc. 686: 337–404.

Philip J. Davis (1975). Interpolation and Approximation, New York: J Dover Publications.

Khompurngson, K. and Micchelli C. A. (2011). Hide. Jaen Journal on Approximation 3(1): 87-115

Novaprateep, B., Khompurngson, K. and Poltem, D. (2011), Learning the vaule of a function by using hypercircle inequality for data error. International Journal of Mathematics and Computers in Simulation 5: 1-8

❑❑❑❑❑