สเตฟาน บานาค และปริภูมิบานาค

Stefan Banach and Banach Spaces

ฐิตารีย์ วุฒิจิรัฐิติกาล[1]

บทคัดย่อ

เกือบจะทั้งหมดของการวิเคราะห์สมัยใหม่ เป็นการศึกษาในบางรูปแบบ หรือการผสมผสานกันของปริภูมิบานาค หรือศึกษานัยทั่วไป หรือศึกษาเป็นกรณีเฉพาะที่แตกต่างกันของปริภูมิบานาค หรือตัวดำเนินการ หรือทั้งสอง สำหรับบทความนี้ ในส่วนแรกจะกล่าวถึงชีวประวัติของสเตฟาน บานาค นักคณิตศาสตร์ชาวโปแลนด์ที่มีความโดดเด่น ที่ทำให้คนรุ่นหลังรู้จักและได้ศึกษาปริภูมิบานาค รวมถึงพีชคณิตบานาคสมัยใหม่ และในส่วนที่สองจะแสดงตัวอย่างของปริภูมิบานาค ซึ่งตัวอย่างเหล่านั้นถือเป็นตัวอย่างพื้นฐานที่นักคณิตศาสตร์ใช้ในการศึกษาด้านการวิเคราะห์ และในตอนท้ายของบทความ เรายกตัวอย่างงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาเรื่องนี้ด้วย

ABSTRACT

Almost all of the modern analysis is the study of some form or a combination of Banach space, or generalized or specialized variants of Banach space, or operators on, or between them. In this article, we will first take a brief look at the life of the remarkable Polish mathematician Stefan Banach. Banach spaces and more recently Banach algebras are named after him. Then various examples of Banach spaces will be given. These examples are so basic that most mathematicians would agree that every mathematician, whether working on analysis or not, should have some degree of familiarity. Further recent work in the area will be briefly discussed with references at the end.

คำสำคัญ: ปริภูมิบานาค ปริภูมินอร์ม สเตฟาน บานาค

Keywords: Banach spaces, Normed spaces, Stefan Banach

[1]มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี อ.วารินชำราบ จ.อุบลราชธานี 34190

E-mail: sctitawo@ubu.ac.th

บทนำ

ทฤษฎีของปริภูมินามธรรมทั้งหลาย ถือเป็นตัวอย่างที่เป็นแบบฉบับของความสัมพันธ์ระหว่างประเทศทางด้านคณิตศาสตร์ โดยส่วนใหญ่แล้วผู้ก่อตั้งวิชาทางด้านนี้เป็นชาวฝรั่งเศสและชาวเยอรมัน แต่ผู้ที่ผลักดันให้วิชานี้มีการพัฒนาอย่างรวดเร็วในปี ค.ศ.1920-1930 กลับเป็นชาวรัสเซียและโปแลนด์ หลังจากโปแลนด์ประกาศอิสรภาพหลังสงครามโลกในปี ค.ศ.1918 นักคณิตศาสตร์ชาวโปแลนด์ที่อพยพ หรือถูกเนรเทศไปอยู่ที่อื่น ได้กลับมารวมตัวกัน และตัดสินใจร่วมกันฟื้นฟูความรู้ด้านคณิตศาสตร์ โดยตั้งใจทำงานวิจัยเพียง 1-2 สาขาของแต่ละวิชาก่อน สิ่งพิเศษที่พวกเขาได้เลือกทำก็คือ การเริ่มสร้างทฤษฎีของปริภูมิทอพอโลยี และสิ่งนี้เองทำให้เกิดโรงเรียน Polish (Polish School) ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นกลุ่มเล็ก ๆ ที่รวมนักวิชาการที่มีความสนใจทางด้านเดียวกัน หรือบุคคลที่ทำงานในปัญหาลักษณะเดียวกัน เพื่อให้ได้พบปะ ติดต่อกันอย่างใกล้ชิด บุคคลซึ่งจัดอยู่ในลำดับแรกๆ ที่ทำชื่อเสียงให้กับโรงเรียน Polish คือ Casimir Kuratowaki (1896-1980), Waclaw Sierpinski (1882-1969) และ Stefan Banach (1892-1945) ความสำเร็จของพวกเขาเกิดขึ้น ครั้งแรกในปี ค.ศ.1920 ด้วยการตีพิมพ์ในวารสาร *Fundamenta Mathematicae* ซึ่งการตีพิมพ์ครั้งแรกของวารสารนี้ ประกอบไปด้วย 24 บทความ ซึ่งถูกออกแบบโดยการให้คำแนะนำของนักคณิตศาสตร์ชาวโปแลนด์ที่สนใจในทฤษฎีเซตทั้งหมด *Fundamenta Mathematicae* ถูกพัฒนาอย่างฉับพลัน ไปสู่การเป็นวารสารที่ออกตามกำหนดเวลา ซึ่งเป็นที่ยอมรับและดึงดูดใจนักวิชาการจากหลาย ๆ ประเทศ และทำให้เกิดผู้ร่วมงานระหว่างประเทศ การตีพิมพ์ผลงานวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาเอกของ Banach ในวารสาร *Fundamenta Mathematicae* ในปี ค.ศ.1922 กล่าวได้อย่างชัดเจนว่าเป็นการกำเนิดของวิชาการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน (functional analysis) ต่อมาวารสาร *Fundamenta Mathematicae* ได้รวมตัวกับวารสาร *Studia mathematica* ซึ่งส่วนใหญ่จะตีพิมพ์เกี่ยวกับปัญหาทางด้านการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน

ชีวประวัติของสเตฟาน บานาค

ในช่วงระหว่างสงครามโลกครั้งที่สอง สเตฟาน บานาค (Stefan Banach) เป็นนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงโด่งดังที่สุดในโปแลนด์ เขาเกิดเมื่อวันที่ 30 มีนาคม ค.ศ.1892 ณ เมือง Cracow ประเทศโปแลนด์ ซึ่งเป็นลูกชายของข้าราชการพลเรือนการรถไฟ ชื่อ Stefan Greczek สังเกตว่าบานาคไม่ได้ใช้นามสกุลของบิดา แต่ใช้ชื่อแรกของบิดาแทน นั่นเป็นเพราะบิดาของเขาไม่ได้แต่งงานกับมารดาของเขาด้วยเหตุผลทางกฎหมายบางประการ เขาถูกเลี้ยงดูโดยผู้ที่เป็นย่า แต่หลังจากที่ย่าล้มป่วยลง บิดาของเขาก็ได้พาเขาไปฝากกับครอบครัวของ Franciszka Plowa เพื่อให้ช่วยดูแลแทน

แม้ว่าบานาคจะไม่ได้กลับไปอยู่กับย่าของเขา แต่เขาก็กลับไปเยี่ยมย่าของเขาอยู่เป็นประจำ จนกระทั่งโตขึ้น บานาค เข้าเรียนชั้นประถมศึกษาในเมือง Cracow ซึ่งสำเร็จการศึกษาจากโรงเรียนนี้ในปี ค.ศ.1902 และได้ศึกษาต่อในระดับชั้นมัธยมศึกษาที่โรงเรียน Gymnasium ในช่วงสองถึงสามปีแรกที่โรงเรียน Gymnazium บานาคทำคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ได้เป็นที่ 1 ของชั้น และหลังจากสำเร็จชั้นมัธยมศึกษา ในปี ค.ศ.1910 เขาได้เลือกเรียนคณะวิศวกรรมศาสตร์ที่มหาวิทยาลัย Lvov Polytechnic ณ ที่นี้ เขาต้องทำงานเป็นครูสอนพิเศษเพื่อหาเลี้ยง

ตัวเอง เนื่องจากพ่อของเขาได้หยุดส่งเสียเขา โดยให้เหตุผลว่าตอนนี้เขาได้โตแล้ว และมีชีวิตเป็นของตนเอง ด้วยเหตุที่เขาต้องใช้เวลาอยู่กับการสอนพิเศษนี้เอง ทำให้เขาใช้เวลาในการเรียนที่มหาวิทยาลัย Lvov Polytechnic นานกว่าเพื่อน ๆ ในช่วง ค.ศ.1910-1914 คือ ช่วงเวลาที่บานาคศึกษาอยู่ที่มหาวิทยาลัย Lvov Polytechnic และในปี ค.ศ.1914 นี้เอง ได้เกิดการจลาจลขึ้นในช่วงสงครามโลก ครั้งที่ 1 ทำให้เขาต้องเข้ารับการเกณฑ์ทหาร แต่เนื่องจากสายตาไม่ดี เขาจึงได้รับการยกเว้น ต่อมาเขาได้เดินทางกลับไปยังบ้านเกิดที่ Cracow โดยทำงานเป็นคนงานก่อสร้าง รวมถึงสอนหนังสือในโรงเรียนละแวกนั้น นอกจากนี้เขายังได้เป็นอาจารย์สอนวิชาคณิตศาสตร์ที่มหาวิทยาลัย Jagiellonian ในเมืองนั้นด้วย

สิ่งที่มีอิทธิพลกับชีวิตของบานาคมากที่สุด คือการได้รู้จักกับ Hugo Steinhaus (1887-1972) ซึ่งเป็นศาสตราจารย์คณิตศาสตร์ชาวโปแลนด์ที่มีชื่อเสียง พวกเขารู้จักกันโดยบังเอิญ วันหนึ่งในฤดูใบไม้ผลิ ปี ค.ศ.1916 Steinhaus ได้เดินผ่านม้านั่งในสวนสาธารณะ และบังเอิญได้ยินคำว่า “Lebesgue measure” จากการสนทนากันระหว่าง บานาค และเพื่อนของเขา คือ Otto Nikodym, Steinhaus จึงเข้าไปแนะนำตัวและร่วมวงสนทนากับสองหนุ่ม ทำให้ Steinhaus รู้สึกทึ่งและยอมรับในความสามารถพิเศษของบานาค ต่อมาภายหลัง Steinhaus ก็ได้กลายมาเป็นเพื่อนสนิท เป็นผู้ร่วมคิดและเป็นที่ปรึกษาให้กับบานาค และการได้ร่วมงานกับบานาค ทำให้ Steinhaus ประทับใจในความสามารถของบานาคมาก ถึงกับกล่าวว่า การรู้จักกับบานาค คือการค้นพบที่ยิ่งใหญ่ที่สุดในงานด้านคณิตศาสตร์ของเขา

บานาคได้เขียนงานวิจัยเกี่ยวกับการลู่เข้าของอนุกรมฟูเรียร์ โดยมี Steinhaus เป็นผู้เขียนร่วม และได้ตีพิมพ์ที่ Bulletin of the Cracow Academy ในปี ค.ศ.1918 ซึ่งงานวิจัยนี้เป็นผลงานชิ้นแรกของบานาคที่ได้ตีพิมพ์ อีก 2 ปีต่อมา บานาคได้รับทุนเป็นผู้ช่วยสอนให้กับศาสตราจารย์ Lomncki ที่มหาวิทยาลัย Lvov Polytechnic โดยเขาทำหน้าที่สอนวิชาคณิตศาสตร์ พร้อมกันนี้ เขายังได้เขียนบทความวิทยานิพนธ์ในชื่อเรื่อง On Operations on Abstract Sets and their Application to Integral Equations (เนื้อหาในวิทยานิพนธ์ของเขาได้แนะนำความคิดเกี่ยวกับ normed linear spaces และสามารถกล่าวได้ว่า ความคิดนี้เป็นต้นกำเนิดแห่งวิชาการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน (functional analysis)) ภายใต้การดูแลของศาสตราจารย์ Lomncki เพื่อยื่นขอปริญญาดุษฎีบัณฑิตที่มหาวิทยาลัย Jan Kazimierz ด้วย ซึ่งการยื่นเสนอขอปริญญาดุษฎีบัณฑิตของบานาคนี้ ถือว่าเป็นการกระทำที่ไม่ถูกต้องตามกรอบมาตรฐาน เนื่องจากบานาคไม่เคยแม้แต่จะได้รับปริญญาบัณฑิตจากมหาวิทยาลัยเลย อย่างไรก็ตาม เขาก็ได้รับการยกเว้นให้ยื่นเสนอวิทยานิพนธ์ได้ และในปี ค.ศ.1922 วิทยานิพนธ์ของบานาคได้ถูกแปลเป็นภาษาฝรั่งเศสและตีพิมพ์ในวารสาร *Fundamenta Mathematicae* ภายใต้ชื่อเรื่อง Sur les ope’rations dans les ensembles abstraits et leur applications aux e’quations inte’grales หลังจากนั้นในปีเดียวกันนี้เอง ทางมหาวิทยาลัย Jan Kazimierz ก็ได้มอบปริญญาดุษฎีบัณฑิตให้แก่เขา

บานาคได้รับแต่งตั้งให้เป็นศาสตราจารย์ เมื่อปี ค.ศ.1924 และเขาใช้เวลาทำงานเกี่ยวกับการศึกษาในช่วงปี ค.ศ.1924-1925 ที่กรุงปารีส แม้ว่าในขณะนั้นเป็นช่วงที่สงครามโลกเกิดความรุนแรงมากที่สุด แต่บานาคก็ไม่หยุดที่จะทำงานวิจัย และยังผลิตผลงานที่มีคุณภาพออกมาอย่างต่อเนื่อง นอกจากนี้เขายังได้แต่งตำราด้านเลขคณิตเรขาคณิต และพีชคณิต ให้กับโรงเรียนมัธยมด้วย

รูปที่ 1 สเตฟาน บานาค ขณะอายุ 27 ปี ถ่ายที่เมือง Cracow ปี ค.ศ.1919
(ที่มา: http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/e-biography.html)

ต่อมาในปี ค.ศ.1929 บานาคได้ร่วมมือกันกับ Steinhaus จัดตั้งวารสารที่มีชื่อว่า Studia Mathematica ซึ่งเป็นวารสารที่เน้นตีพิมพ์ผลงานเกี่ยวกับการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน และหัวข้อที่เกี่ยวข้อง เมื่อวารสารนี้ประสบความสำเร็จ พวกเขากับเพื่อน ๆ จาก Warsaw ซึ่งได้แก่ Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz และ Sierpinski ได้ร่วมมือกันออกหนังสือชุด Mathematical Monographs ซึ่งฉบับแรกในชุดนี้ เขียนโดยบานาค และตีพิมพ์เป็นภาษาฝรั่งเศสในปี ค.ศ.1932 โดยใช้ชื่อเรื่องว่า The’orie des Ope’rations line’aires (หลังจากที่ก่อนหน้านี้ 1 ปี ได้เคยตีพิมพ์เนื้อหาบางส่วนในภาษา Polish ไปแล้ว) และผลงานชิ้นนี้ถือเป็นผลงานชิ้นเอกที่สร้างชื่อเสียงให้แก่เขาอย่างรวดเร็ว

ในปี ค.ศ.1939 ก่อนที่สงครามโลกครั้งที่ 2 จะเริ่มขึ้น บานาคได้รับคัดเลือกให้ดำรงตำแหน่งนายกสมาคม Polish Mathematical Society ในช่วงต้นของสงคราม กองกำลังทหารโซเวียตได้เข้ายึดครองเมือง Lvov แต่เนื่องจากบานาคมีเพื่อนนักคณิตศาสตร์ชาวโซเวียตหลายคน (จากการไปเยี่ยมเพื่อน ๆ ที่กรุง Moscow หลายครั้ง) ทำให้เขาปลอดภัยและดรับการปฏิบัติเป็นอย่างดี เขายังคงได้รับอนุญาตให้ดำรงตำแหน่งหัวหน้าภาค และต่อมาก็ได้เป็นคณบดี คณะวิทยาศาสตร์ ที่มหาวิทยาลัยซึ่งตอนนี้ได้เปลี่ยนชื่อมาเป็นมหาวิทยาลัย Ivan Franko ถึงแม้ว่าผลกระทบจากสงครามจะทำให้ชีวิตในช่วงนี้ของบานาคเปลี่ยนแปลงไปบ้าง แต่สิ่งที่เขายังคงทำอย่างต่อเนื่องไม่ยอมเปลี่ยนแปลง คือการทำวิจัย เขียนตำรา สอนหนังสือ และนัดพบกับเพื่อน ๆ ที่ร้านกาแฟ ในปี ค.ศ.1940 ขณะที่บานาคกำลังดูแลการจัดการประชุมวิชาการในสหภาพโซเวียต ซึ่งตอนนั้นเขาอยู่ที่เมือง Kiev ในช่วงเวลานี้เอง กองทัพเยอรมันได้เข้าบุกรุกสหภาพโซเวียต เขาจึงต้องเดินทางกลับมาที่เมือง Lvov ทันที

ในเดือนมิถุนายน ค.ศ.1941 กองทัพนาซีเข้ายึดครองเมือง Lvov ได้ นั่นก็หมายความว่า บานาคจะต้องมีชีวิตที่ตกอยู่ในสภาวะที่ลำบากมาก และเขาก็ถูกตำรวจจับ ในข้อหาทำการค้า ในสกุลเงินเยอรมัน แต่แล้วหลังจากนั้นสองถึงสามสัปดาห์ เขาก็ถูกปล่อยตัว ต่อมาในคืนวันที่ 3 กรกฎาคม ปีเดียวกันนั้นเอง ถือเป็นคืนวันวิปโยคเนื่องจาก เกิดการฆาตกรรมหมู่ มีนักวิชาการชาวโปแลนด์ ถูกฆ่าตายเป็นจำนวนมาก และหนึ่งในนั้นก็คือ Lomnicki ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาหลักวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาเอกของบานาคนั่นเอง เดชะบุญที่บานาคหนีรอดมาได้จากเหตุการณ์คืนนั้น ในช่วงปลายปีนั้น เขาทำงานเป็นคนป้อนอาหารแมลงปรสิตเล็กๆในสถาบันเยอรมันที่

จัดการเกี่ยวกับโรคติดต่อ บานาคต้องทำงานเป็นคนป้อนอาหารแมลงตลอดช่วงที่กองกำลังนาซียึดครองเมือง Lvov จนกระทั่งกองกำลังโซเวียต ยึดเอาเมือง Lvov กลับไปได้ในเดือนกรกฎาคม ปี ค.ศ.1944 หลังจากนั้นเขาก็เริ่มกลับมาติดต่อกับเพื่อน ๆ อีกครั้ง เขาได้นัดพบกับ Sobolev เพื่อนนักคณิตศาสตร์ ที่นอกเมือง Moscow โดยที่เขาก็รู้ดีว่าตัวเองกำลังป่วยเป็นโรคมะเร็งปอด และในงานประชุมวิชาการแห่งหนึ่ง Sobolev ได้กล่าวคำปราศรัยเพื่อเป็นที่ระลึกให้กับบานาคด้วย

รูปที่ 2 สเตฟาน บานาค ขณะอายุ 52 ปี ถ่ายที่เมือง Lvov
(http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/e-biography.html)

หลังจากสงครามสงบลง บานาควางแผนที่จะกลับไปที่เมือง Cracow เพื่อรับตำแหน่งหัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่มหาวิทยาลัย Jagiellonian แต่แล้วเขาก็เสียชีวิตลงที่เมือง Lvov วันที่ 31 สิงหาคม ค.ศ.1945 ด้วยโรคมะเร็งปอดนั่นเอง ซึ่งขณะนั้นเขามีอายุได้ 53 ปี

ในวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาเอกของเขา ที่เขียนเมื่อปี ค.ศ.1920 เขาได้กำหนดสิ่งที่เป็นที่ยอมรับโดยทั่วกันในปัจจุบันที่เรารู้จักกันดีในชื่อของปริภูมิบานาค ซึ่งชื่อนี้ได้ถูกตั้งโดย Fre’chet

ปริภูมิบานาค

ก่อนที่จะเข้าสู่ปริภูมิบานาค ผู้เขียนจะขอกล่าวถึง นิยามและเนื้อหาบางส่วนที่ต้องใช้ในการอธิบายปริภูมิบานาค เสียก่อน ดังนี้

บทนิยาม ให้ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $d: X \times X \to \mathbb{R}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้
สำหรับทุกสมาชิก $x, y, z \in X$

(1) $d(x,y) \geq 0$

(2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(3) $d(x,y) = d(y,x)$

(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

แล้ว d จะกล่าวว่าเป็น ฟังก์ชันระยะทาง (distance function) หรือ เมตริก (metric) และจะเรียก (X,d) (หรือเขียนย่อ ๆ เป็น X) ว่าเป็น ***ปริภูมิอิงระยะทาง*** (metric space)

บทนิยาม ลำดับ (x_n) ใน X จะเรียกว่าเป็น ***ลำดับโคชี*** (Cauchy sequence) ถ้าสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ถ้า $n, m \geq N$ แล้ว $d(x_n, x_m) < \varepsilon$

บทนิยาม ปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) จะกล่าวว่าเป็น ***ปริภูมิอิงระยะทางแบบบริบูรณ์*** (complete metric space) ถ้าทุก ๆ ลำดับโคชีใน X ลู่เข้าสู่จุด ๆ หนึ่งใน X (ตัวอย่างของปริภูมิอิงระยะทางแบบบริบูรณ์ คือ จำนวนจริง $(\mathbb{R})$ และจำนวนเชิงซ้อน $(\mathbb{C})$)

บทนิยาม ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ (vector space) เหนือฟีลด์ $\mathbb{C}$ (หรือ $\mathbb{R}$) แล้ว ***นอร์ม*** บน X คือ การส่ง $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ โดยที่สำหรับทุกสมาชิก $\alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ และทุกสมาชิก $x, y \in X$

(1) $\|x\| \geq 0$

(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

และจะกล่าวว่า $(X, \|\cdot\|)$ เป็น ***ปริภูมินอร์ม*** (normed space)

บทนิยาม ***ปริภูมิบานาค*** (Banach space) คือ ปริภูมินอร์มแบบบริบูรณ์ (complete normed space) ภายใต้เมตริกที่ได้จากนอร์ม (with respect to the metric induced by norm) นั่นคือ $d(x, y) = \|x - y\|$

ตัวอย่างของปริภูมิบานาค ได้แก่

1. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ กำหนดโดยนอร์มแบบยุคลิด (Euclidean norm)
2. $l^p = \left\{ x = (x_n) \ / \ x_n \in \mathbb{C} \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ สำหรับ $1 \leq p < \infty$ กำหนดโดยนอร์ม $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$
3. $l^\infty = \left\{ x = (x_n) \ / \ x_n \in \mathbb{C} \text{ และ } (x_n) \text{ เป็นลำดับที่มีขอบเขต} \right\}$ กำหนดโดยนอร์ม $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$
4. $C[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง} \right\}$ กำหนดโดยนอร์ม $\|f\| = \max_{t \in [a,b]} \{ |f(t)| \}$

จากตัวอย่าง 2 และ 3 ข้างต้น จะเห็นว่าเป็นปริภูมิบานาคซึ่งมีสมาชิกเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนนับ $(\mathbb{N})$ ต่อมาได้มีการขยายการพิจารณาโดเมนจาก $\mathbb{N}$ ไปเป็นการพิจารณาบนโดเมนที่เป็นเซตตรึง S ในที่นี้จะยกตัวอย่างและพิสูจน์ความเป็นปริภูมิบานาคของปริภูมิ $l^p(S)$ ซึ่งถือเป็นปริภูมิที่คลาสสิก ดังนี้

ให้ S เป็นเซตตรึงที่ไม่เป็นเซตว่าง และให้ $\mathcal{F}$ แทนสมาชิกของสับเซตจำกัดทั้งหมดของ S ระบุทิศทางโดยการเป็นเซตย่อย : $F \succ= G \Leftrightarrow F \supseteq G$ สำหรับทุก $F, G \in \mathcal{F}$ สำหรับเซต Λ เราให้ Λ^S แทนเซต

ของฟังก์ชันทั้งหมดจาก S ไปยัง Λ ให้ X เป็นปริภูมิบานาค และให้ $\mathrm{x} \in X^S$ ดังนั้น $\{\mathrm{x}(s) : s \in S\}$ เป็นสมาชิกเวกเตอร์ใน X แล้วผลรวม (ไม่กำหนดอันดับ) $\sum_{s\in S} \mathrm{x}(s)$ จะกล่าวว่า ลู่เข้าสู่ $x \in X$ ถ้าข่ายลำดับ (net) $\left\{\sum_{s\in F} \mathrm{x}(s)\right\}_{F\in\mathcal{F}}$ ลู่เข้าสู่ x และเขียนแทนด้วย

$$\sum_{s\in S} \mathrm{x}(s) = \lim_{F\in\mathcal{F}}\left(\sum_{s\in F} \mathrm{x}(s)\right) = x$$

ไม่เช่นนั้นจะกล่าวว่า $\sum_{s\in S} \mathrm{x}(s)$ ลู่ออก

ทฤษฎีบทประกอบ 1 ถ้า δ เป็นฟังก์ชันเพิ่มที่ส่งจาก $\mathcal{F}$ ไปยัง $[0,\infty)$ แล้ว $\sup_{F\in\mathcal{F}} \delta(F) = \lim_{F\in\mathcal{F}} \delta(F)$

พิสูจน์ กรณีที่ 1: ถ้า $\sup_{F\in\mathcal{F}} \delta(F) = \infty$ แล้วสำหรับทุก $M \in \mathbb{R}$ จะมี $F \in \mathcal{F}$ ซึ่ง $\delta(F) > M$ ให้ $G \in \mathcal{F}$ โดยที่ $G \supseteq F$ เราจะได้ว่า $\delta(G) \ge \delta(F) > M$ ดังนั้น $\lim_{F\in\mathcal{F}} \delta(F) = \infty = \sup_{F\in\mathcal{F}} \delta(F)$

กรณีที่ 2: ถ้า $\sup_{F\in\mathcal{F}} \delta(F) < \infty$ เราให้ $\sup_{F\in\mathcal{F}} \delta(F) = a$ และ $\varepsilon > 0$ จะมี $F \in \mathcal{F}$ ซึ่ง $\delta(F) > a - \varepsilon$ ดังนั้นสำหรับ $G \in \mathcal{F}$ ซึ่ง $G \supseteq F$ จะได้ว่า $a + \varepsilon > a \ge \delta(G) \ge \delta(F) > a - \varepsilon$ นั่นคือ $|\delta(G) - a| < \varepsilon$ ดังนั้น $\lim_{F\in\mathcal{F}} \delta(F) = a = \sup_{F\in\mathcal{F}} \delta(F)$

□

โดยทฤษฎีบทประกอบ 1 จะได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 2 ถ้า η เป็นฟังก์ชันที่ส่งจากเซต S ไปยัง $[0,\infty)$ แล้ว $\sum_{s\in S} \eta(s) = \sup_{F\in\mathcal{F}} \sum_{s\in F} \eta(s)$

ทฤษฎีบท 3 ให้ $x \in [0,\infty)^S$ แล้วจะมีจำนวนจำกัด $M > 0$ ซึ่ง $\sum_{s\in F} x(s) \le M$ สำหรับทุก $F \in \mathcal{F}$ ก็ต่อเมื่อ $\sum_{s\in S} x(s)$ ลู่เข้า และในกรณีนี้จะได้ว่า $\sum_{s\in S} x(s) \le M$

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$ สมมติให้มีจำนวนจำกัด $M > 0$ ซึ่ง $\sum_{s\in F} x(s) \le M$ สำหรับทุก $F \in \mathcal{F}$ ดังนั้น $\sup_{F\in\mathcal{F}} \sum_{s\in F} x(s) \le M$ จากบทแทรก 2 จะได้ว่า $\sum_{s\in S} x(s) \le M$ นั่นคือ $\sum_{s\in S} x(s)$ ลู่เข้า

$(\Leftarrow)$ สมมติให้ $\sum_{s\in S} x(s)$ ลู่เข้าสู่ $a \le M < \infty$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $G \in \mathcal{F}$ จะได้ว่า

$$a = \sup_{F\in\mathcal{F}} \sum_{s\in F} x(s) \ge \sum_{s\in G} x(s)$$

□

ปริภูมิฟังก์ชัน l^p สำหรับ $1 \le p \le \infty$

สำหรับ $1 \le p < \infty$ กำหนดให้

$$l^p(S,\mathbb{C}) := l^p(S) = \left\{ x \in \mathbb{C}^S : \sum_{s\in S} |x(s)|^p < \infty \right\}$$

จะเห็นว่า $l^p(S)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ภายใต้การบวกแบบจุดและการคูณด้วยสเกลาร์แบบจุด (pointwise addition and pointwise scalar multiplication) ถ้ากำหนดให้

$$\|x\|_p = \left(\sum_{s\in S} |x(s)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \left(x \in l^p(S) \right)$$

เราจะสังเกตได้ว่า สำหรับ $x \in l^p(S)$ แล้ว $|x(s)| \le \|x\|$ สำหรับทุกๆ $s \in S$ ต่อไปเราจะแสดงว่า $\|\cdot\|_p$ ที่เรากำหนดข้างต้นเป็นนอร์ม ในที่นี้จะแสดงเพียงสมบัติของอสมการอิงสามเหลี่ยม (triangle inequality) เท่านั้น เนื่องจากสมบัติอื่น ๆ ง่ายต่อการตรวจสอบ จึงขอละไว้ เราเริ่มการพิสูจน์โดย ให้ $x, y \in l^p(S)$ ดังนั้นสำหรับทุก $F \in \mathcal{F},$ โดยใช้อสมการ Minkowski (Minkowski’s inequality) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sum_{s\in F} |x(s)+y(s)|^p &\le \left[\left(\sum_{s\in F} |x(s)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{s\in F} |y(s)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \\
&\le \left[\left(\sum_{s\in S} |x(s)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{s\in S} |y(s)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \\
&\le \left[\|x\| + \|y\| \right]^p
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle \sum_{s\in S} |x(s)+y(s)|^p \le \left[\|x\| + \|y\| \right]^p$

และได้ว่า $\displaystyle \|x+y\| = \left(\sum_{s\in S} \left| x(s) + y(s)^p \right| \right)^{\frac{1}{p}} \le \|x\| + \|y\|$

ต่อไปเรานิยาม

$$\begin{aligned}
l^\infty(S,\mathbb{C}) &:= l^\infty(S) \\
&= \left\{ x \in \mathbb{C}^S : \sup_{s\in S} |x(s)| < \infty \right\}
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $l^\infty(S)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ภายใต้การบวกและการคูณด้วยสเกลาร์แบบจุด เรากำหนด $\|x\|_\infty = \sup_{s\in S} |x(s)| \quad \left(x \in l^\infty(S) \right)$ สังเกตว่า สำหรับ $x \in l^\infty(S),\ \ |x(s)| \le \|x\|_\infty \quad \forall s \in S$ ต่อไปเราจะแสดงว่า $\|\cdot\|_\infty$ ที่เรากำหนดข้างต้นเป็นนอร์ม ในที่นี้จะแสดงเพียงสมบัติของอสมการอิงสามเหลี่ยม โดยเริ่มจากให้ $x, y \in l^\infty(S)$ จะเห็นว่า สำหรับแต่ละสมาชิก $t \in S,$

$$\begin{aligned}|x(t)+y(t)| &\le |x(t)|+|y(t)| \\ &\le \sup_{s\in S}|x(s)|+\sup_{s\in S}|y(s)|\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\|x+y\|_\infty = \sup_{t\in S}|x(t)+y(t)| \le \|x\|_\infty+\|y\|_\infty$$

จากข้างต้นเราจะเห็นว่า $l^p(S)$ สำหรับ $1\le p\le\infty$ เป็นปริภูมินอร์ม ต่อไปจะแสดงว่า $l^p(S)$ เป็นปริภูมิบานาค ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4 สำหรับ $1\le p<\infty$ แล้ว $l^p(S)$ เป็นปริภูมิบานาค กำหนดโดยนอร์ม

$$\|x\|_p = \left(\sum_{s\in S}|x(s)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \left(x\in l^p(S)\right)$$

พิสูจน์ ให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชีใน $l^p(S)$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $s\in S$ จะได้ว่า เมื่อ $n,\ m \to \infty$

$$|x_n(s)-x_m(s)| \le \|x_n-x_m\| \to 0$$

นั่นคือ $\{x_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชีใน $\mathbb{C}$ แต่เนื่องจาก $\mathbb{C}$ เป็นปริภูมิแบบบริบูรณ์ (complete) ดังนั้นสำหรับแต่ละสมาชิกตรึง s จะมี $x(s)\in\mathbb{C}$ ซึ่ง $x_n(s)\to x(s)$ เมื่อ $n\to\infty$ ต่อไปเราจะแสดงว่า $x\in l^p(S)$ และ $x_n\to x$ เมื่อ $n\to\infty$

ให้ $\varepsilon>0$ เนื่องจาก $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชี ดังนั้น จะมี $N\in\mathbb{N}$ ซึ่ง $\|x_n-x_m\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก $n,\ m\ge\mathbb{N}$ ดังนั้นสำหรับ $n,\ m\ge\mathbb{N}$ และ $F\in\mathcal{F}$
จะได้

$$\begin{aligned}\sum_{s\in F}|x_n(s)-x_m(s)|^p &\le \sum_{s\in S}|x_n(s)-x_m(s)|^p \\ &= \|x_n-x_m\|^p \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\end{aligned}$$

นั่นคือ สำหรับทุก $n,m\ge\mathbb{N}$ $$\sum_{s\in F}|x_n(s)-x_m(s)|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \qquad (1)$$

ให้ $m\to\infty$ ในอสมการที่ (1) เราจะได้ว่า $\sum_{s\in F}|x_n(s)-x(s)|^p \le \left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^p$ สำหรับทุก $n\ge\mathbb{N}$

เนื่องจาก F เป็นเซตย่อยใด ๆ ของ S ดังนั้น

$$\sum_{s\in S}\left|x_n(s)-x(s)\right|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \tag{2}$$

เพราะฉะนั้น สำหรับแต่ละ $n \geq \mathbb{N}$,

$$\left(x_n - x\right) \in l^p\left(S\right)$$

และได้ว่า

$$x = \left(x - x_N\right) + x_N \in l^p\left(S\right)$$

และจากอสมการที่ (2) เราจะได้ว่า $x_n \to x$ เมื่อ $n \to \infty$
ดังนั้น $l^p\left(S\right)$ เป็นปริภูมิบานาค

□

ทฤษฎีบท 5 ปริภูมิ $l^\infty\left(S\right)$ เป็นปริภูมิบานาค กำหนดโดยนอร์ม

$$\|x\|_\infty = \sup_{s\in S}\left|x(s)\right| \quad \left(x \in l^\infty\left(S\right)\right)$$

พิสูจน์ ให้ $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชีใน $l^\infty\left(S\right)$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $s \in S$ จะได้ว่า

$$\left|x_n(s) - x_m(s)\right| \leq \left\|x_n - x_m\right\| \to 0$$

เมื่อ $n, m \to \infty$ นั่นคือ $\left\{x_n(s)\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชีใน $\mathbb{C}$ แต่เนื่องจาก $\mathbb{C}$ ปริภูมิแบบบริบูรณ์ ดังนั้นสำหรับแต่ละสมาชิกตรึง s จะมี $x(s) \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $x_n(s) \to x(s)$ เมื่อ $n \to \infty$ ต่อไปเราจะแสดงว่า $x \in l^\infty\left(S\right)$ และ $x_n \to x$ เมื่อ $n \to \infty$

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชี ดังนั้นจะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $\left\|x_n - x_m\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก $n, m \geq \mathbb{N}$ ดังนั้นสำหรับ $n, m \geq \mathbb{N}$ และ $s \in S$,

$$\begin{aligned}\left|x_n(s) - x_m(s)\right| &\leq \sup_{s\in S}\left|x_n(s) - x_m(s)\right| \\ &= \left\|x_n - x_m\right\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned} \tag{3}$$

ให้ $m \to \infty$ ในอสมการที่ (3) จะได้ว่า $\left|x_n(s) - x(s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก $n \geq \mathbb{N}, s \in S$ ดังนั้นทุก $n \geq \mathbb{N}$,

$$\sup_{s\in S}\left|x_n(s)-x(s)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

เพราะฉะนั้น สำหรับแต่ละ $n \ge \mathbb{N}$,

$$(x_n - x) \in l^\infty(S)$$

และได้ว่า $x = (x - x_N) + x_N \in l^\infty(S)$

และจากอสมการที่ (4) เราจะได้ว่า $x_n \to x$ เมื่อ $n \to \infty$ ดังนั้น $l^\infty(S)$ เป็นปริภูมิบานาค □

เนื่องจากปริภูมิบานาคเป็นปริภูมิที่คลาสสิก ทำให้มีผู้ศึกษาเกี่ยวกับปริภูมินี้เป็นจำนวนมาก เช่น ในงานวิจัยของ อรพินท์ และคณะ (Orapin et al., 2009) ได้สร้างคลาสของปริภูมิบานาคซึ่งมีสมาชิกเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตตรึง S และเรนจ์เป็นเซตย่อยของพีชคณิตซีสตาร์ $\mathcal{A}$ ซึ่งมีเอกลักษณ์ $1_{\mathcal{A}}$ และมี $s(\mathcal{A})$ เป็นเซตของสเตททั้งหมดบน $\mathcal{A}$ (ปริภูมิ สเตท $s(\mathcal{A})$ นี้เป็นปริภูมิที่กำหนดโดยทอพอโลยีวีคสตาร์ (weak* topology)) นอกจากนี้ พวกเขายังได้ทำการศึกษาถึงความสัมพันธ์ของสมาชิกในคลาสของปริภูมิบานาคและคลาสของตัวดำเนินการเหล่านั้นด้วย ตัวอย่างเช่น พวกเขาได้สร้างปริภูมิ $l_*^p(S,\mathcal{A})$ และ $l_{*u}^p(S,\mathcal{A})$ เมื่อ $p \in [2,\infty)$ ดังนี้

$$l_*^p(S,\mathcal{A}) = \left\{ \mathrm{x} \in \mathcal{A}^S : \sum_{s\in S}\left[\varphi\left(\mathrm{x}(s)^*\mathrm{x}(s)\right)\right]^{\frac{p}{2}} < \infty \quad \forall \varphi \in s(\mathcal{A}) \right\}$$ และ

$$l_{*u}^p(S,\mathcal{A}) = \left\{ \mathrm{x} \in \mathcal{A}^S : \sum_{s\in S}\left[\varphi\left(\mathrm{x}(s)^*\mathrm{x}(s)\right)\right]^{\frac{p}{2}} \text{ ลู่เข้าแบบเอกรูป สำหรับ } \varphi \in s(\mathcal{A}) \right\}$$

และได้พิสูจน์ว่าทั้งสองปริภูมินี้ เป็นปริภูมิบานาค ที่กำหนดโดยนอร์ม

$$\|\mathrm{x}\| = \sup_{\varphi\in s(\mathcal{A})}\left(\sum_{s\in S}\left[\varphi\left(\mathrm{x}(s)^*\mathrm{x}(s)\right)\right]^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

บทสรุป

ในวงการคณิตศาสตร์ถือว่า สเตฟานบานาคเป็นนักคณิตศาสตร์ที่มีบทบาทที่สำคัญมากที่สุดท่านหนึ่ง เนื่องจากเป็นผู้ค้นพบวิชาการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชันสมัยใหม่ และเป็นผู้ผลิตผลงานหลักเกี่ยวกับทฤษฎีของปริภูมิเวกเตอร์ ปริภูมิเชิงทอพอโลยี และปริภูมิบานาค ซึ่งถือว่าเป็นปริภูมิที่มีความสำคัญในการศึกษาด้านการวิเคราะห์ ดังจะเห็นได้จาก นักคณิตศาสตร์ทุกท่านจะต้องรู้จักปริภูมิบานาค และนักคณิตศาสตร์ที่ทำวิจัยด้านการวิเคราะห์ส่วนใหญ่แล้วจะทำวิจัยจากตัวอย่างพื้นฐานของปริภูมิบานาคก่อน แล้วจึงทำการขยายการศึกษาออกไปในวงกว้าง

สำหรับผู้ที่อยู่ในวงคณิตศาสตร์จะสังเกตเห็นว่างานวิจัยด้านนี้มีความแพร่หลายเป็นอย่างมาก เช่น ในปัจจุบันมีผู้ทำงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการบนปริภูมิฮิลเบิร์ต (คลาสของปริภูมิบานาค) หรือศึกษาเกี่ยวกับพีชคณิตซีสตาร์ หรือตัวดำเนินการทางพีชคณิต (ซึ่งต่างก็เป็นคลาสของปริภูมิบานาคด้วยเช่นกัน) เป็นจำนวนมาก (เช่นงานวิจัยที่กล่าวไว้ท้ายบทความก่อนบทสรุป) นอกจากนี้บานาคยังผลิตผลงานด้านทฤษฎีการวัด การหาปริพันธ์ ทฤษฎีของเซต และอนุกรมเชิงตั้งฉากด้วย

เอกสารอ้างอิง

Burton, D.M. (2011). The History of Mathematics: An Introduction. (7). Singapore: Mc Graw Hill.

Kadison, R.V. and Ringrose, J.R. (1983). Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. (1). New York: Academic Press.

Megginson. R.R. (1998). An Introduction to Banach Space Theory. New York: Springer-Verlag.

Munkres, J.R. (1975). Topology a First Course. New Jersey: Prentice-Hall.

Rudin, W. (1987). Real and Complex Analysis. (3). New York: McGraw-Hill.

Wikipedia. Stefan Banach. Available from: http://en.wikipedia.org/wiki/Stefan_Banach

Wikipedia. Banach biography. Available from: http://www-history.mcs.st-andrews.ac..uk/Biographies/Banach.html.

Wootijiruttikal, O., Ong, S.-C., Chaisuriya, P. and Rakbud J. (2009). Banach Spaces of Functions taking Values in a C^*-Algebra. Oper. Matrices 3: 373-396.

❑❑❑❑❑