

องค์ความรู้เพื่ออนาคต: แคลคูลัสควอนตัม (แคลคูลัสไม่มีลิมิต) อันดับเศษส่วน  
Knowledge for the Future: Fractional Quantum Calculus (Calculus without Limit)

ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม\*

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสวนดุสิต

Thanin Sitthiwirattam\*

Faculty of Science and Technology, Suan Dusit University

บทคัดย่อ

บทความนี้แนะนำแคลคูลัสควอนตัมอันดับเศษส่วนบางประเภท ได้แก่ แคลคูลัสเชิงผลต่าง, แคลคูลัส  $q$  และ แคลคูลัสฮาห์น โดยได้แสดงแนวคิดและการสร้างตัวดำเนินการของแต่ละแคลคูลัสควอนตัมอันดับเศษส่วน

**คำสำคัญ:** แคลคูลัสควอนตัมอันดับเศษส่วน แคลคูลัสเชิงผลต่างอันดับเศษส่วน แคลคูลัสเชิงผลต่าง  $q$  อันดับเศษส่วน แคลคูลัสเชิงผลต่างฮาห์นอันดับเศษส่วน

Abstract

This article introduces some different types of fractional quantum calculus: difference calculus,  $q$ -calculus and Hahn calculus. By expressing the concept and operator construction of each fractional quantum calculus.

**Keywords:** fractional quantum calculus, fractional difference calculus, fractional  $q$ -difference calculus, fractional Hahn difference calculus

\* ผู้ประสานงาน (Corresponding Author)

ศาสตราจารย์ ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม

e-mail: thanin\_sit@dusit.ac.th



## บทนำ

แคลคูลัสอันดับเศษส่วน (Fractional Calculus) ได้มีจุดเริ่มต้นในการศึกษาค้นคว้าหลังจากที่ โลบ์-นิทซ์ (1646–1716) ได้นิยามอนุพันธ์อันดับที่  $n$  ในรูป  $D^n y(t)$  โดยโลปีตาล (1661–1704) เกิดข้อสงสัยว่า “จะเกิดอะไรขึ้นถ้า  $n = 0.5$ ” ซึ่งโลบ์นิทซ์เองในขณะนั้นก็ยังไม่สามารถอธิบายความหมายของอนุพันธ์  $D^{0.5} y(t)$  ได้อย่างชัดเจน ต่อมาได้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านศึกษาอย่างจริงจัง อันได้แก่ ออยเลอร์ (1707–1783), ฟูรีแยร์ (1768–1830), อาเบล (1802–1829), ลีโยวีล (1809–1882), รีมันน์ (1826–1866), เฮวีไซด์ (1850–1925) เป็นต้น พวกท่านเหล่านี้ได้พัฒนาองค์ความรู้ของแคลคูลัสอันดับเศษส่วนมาอย่างต่อเนื่องจนถึงปัจจุบัน

แนวคิดในการสร้างตัวดำเนินการอันดับเศษส่วนบนแคลคูลัสดั้งเดิมคือ การหาสูตรทั่วไปในการหาปริพันธ์ซ้อน (Repeated Integral)  $m$  ชั้น (ครั้ง) ของฟังก์ชัน  $f$  เมื่อ  $m$  เป็นจำนวนนับ และ  $t \geq a$  ก่อน ดังนี้

$$\int_a^t \int_a^{t_1} \dots \int_a^{t_{m-1}} f(t_m) dt_m \dots dt_2 dt_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds \quad (1)$$

จากนั้นจึงนิยาม ปริพันธ์อันดับเศษส่วน  $\alpha$  (Fractional Integral of Order  $\alpha$ ) ของฟังก์ชัน  $f$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มและ  $\alpha \in [n-1, n)$ ,  $t \geq a$  นิยามโดย

$$J^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds \quad (2)$$

สำหรับอนุพันธ์อันดับเศษส่วนมีการนิยามหลากหลายประเภท ในที่นี้เราจะศึกษาเพียงสองประเภทเท่านั้น ได้แก่

- i. อนุพันธ์อันดับเศษส่วนแบบรีมันน์ - ลีโยวีล (Riemann - Liouville Fractional Derivative) ของฟังก์ชัน  $f$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มและ  $\alpha \in [n-1, n)$ ,  $t \geq a$  จะนิยามในรูปของผลต่างอันดับเศษส่วนในรูปของอนุพันธ์อันดับจำนวนเต็มประกอบกับปริพันธ์อันดับเศษส่วนตามลำดับ ดังนี้

$$D^\alpha f(t) := D^\alpha J^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \quad (3)$$

- ii. อนุพันธ์อันดับเศษส่วนแบบคาปูโต (Caputo Fractional Derivative) ของฟังก์ชัน  $f$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม และ  $\alpha \in [n-1, n)$ ,  $t \geq a$  จะนิยามในรูปของปริพันธ์อันดับเศษส่วนประกอบกับอนุพันธ์อันดับจำนวนเต็มตามลำดับ ดังนี้

$$D_C^\alpha f(t) := J^{n-\alpha} D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \quad (4)$$

แต่อย่างไรก็ตามนักคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ก็ยังไม่ได้ให้ความสำคัญของแคลคูลัสประเภทนี้ จวบจนกระทั่งในช่วงระยะเวลาไม่กี่ปีที่ผ่านมา แคลคูลัสอันดับเศษส่วนได้กลับมาดึงดูดความสนใจของนักคณิตศาสตร์อีกครั้ง สืบเนื่องมาจากได้มีการนำแคลคูลัสอันดับเศษส่วนไปประยุกต์ใช้ในศาสตร์สาขาวิชาฟิสิกส์ วิศวกรรม การเงินและเศรษฐศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ประยุกต์ อาทิเช่น ทฤษฎีควบคุม (Control Theory) ทัศนศาสตร์ (Optics) การประมวลสัญญาณ (Signal Processing) การแพร่ (Diffusion) และความหนืด (Viscoelastic) เนื่องจากให้ผลการคำนวณเชิงตัว

เลขที่มีความแม่นยำมากกว่าแคลคูลัสที่มีอันดับเป็นจำนวนเต็ม ทำให้สามารถอธิบายปรากฏการณ์ที่เกี่ยวข้องได้อย่างมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้นกว่าแคลคูลัสดั้งเดิม

ในหัวข้อถัดไปจะกล่าวถึงตัวดำเนินการบนแคลคูลัสควอนตัมอันดับเศษส่วน ซึ่งมีมากมายหลากหลายประเภท ซึ่งแคลคูลัสควอนตัมเราได้กล่าวมาแล้วในบทความที่อยู่ในฉบับที่ 2 ของวารสารนี้ (Sitthiwirattam, T., 2020) โดยในที่นี้จะขอแนะนำเพียงบางประเภทเท่านั้น ได้แก่ แคลคูลัสเชิงผลต่างอันดับเศษส่วน, แคลคูลัสเชิงผลต่าง  $q$  อันดับเศษส่วน และแคลคูลัสเชิงผลต่างฮาห์นอันดับเศษส่วน

### แคลคูลัสเชิงผลต่างอันดับเศษส่วน

สำหรับ **แคลคูลัสเชิงผลต่างอันดับเศษส่วน (Fractional Difference Calculus)** เป็นเครื่องมือที่สำคัญมาก โดยจะมีประสิทธิภาพมากกว่าแคลคูลัสดั้งเดิมและแคลคูลัสอันดับเศษส่วนที่กล่าวมาข้างต้น สำหรับการนำไปใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการหรือปรากฏการณ์ในธรรมชาติที่สามารถสร้างแบบจำลองที่มีพฤติกรรมในลักษณะที่ไม่ต่อเนื่อง ตัวอย่างเช่นผลงานของ Wu และ Baleanu (Wu G.C., Baleanu D., 2013; Wu G.C., Baleanu D., 2014a; Wu G.C., Baleanu D. (2014)b; Wu G.C., Baleanu D., Zeng S.D., Deng Z.G., 2015) ในการพัฒนาแคลคูลัสเชิงผลต่างอันดับเศษส่วนนั้นเพิ่งมีการเริ่มต้นศึกษาในช่วง 30 ปีที่ผ่านมา โดย Diaz และ Osler (Diaz J.B., Osler T.J., 1974) ได้ตีพิมพ์ผลงานในปี 1974 โดยแนะนำตัวดำเนินการเชิงผลต่างไม่ต่อเนื่องอันดับเศษส่วน (Discrete Fractional Difference Operator) ซึ่งนิยามบนอนุกรมอนันต์และสัมประสิทธิ์ทวินาม ดังนี้

$$\Delta^\alpha f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t + \alpha - k) \quad (5)$$

เมื่อ  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha-k+1)}$  และ  $\alpha$  เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน แต่ตัวดำเนินการที่พวกเขาสร้างขึ้นไม่สามารถใช้ได้ในทุกกรณี เนื่องจากไม่มีสมบัติการยกกำลัง  $\Delta^{\alpha+\beta} f(x) = \Delta^\alpha \Delta^\beta f(x)$  ตัวอย่างเช่นในอนุกรมเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete Time Series)  $f(x) = y_x, x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  เราไม่สามารถหา  $\Delta^\alpha f$  ได้

ต่อมาในปี 1989 Miller กับ Ross (Miller K.S., Ross B., 1989) ได้ศึกษาสมบัติและแนะนำตัวดำเนินการในแคลคูลัสเชิงผลต่างอันดับเศษส่วนที่แตกต่างไปจากของ Diaz และ Osler ซึ่งได้ถูกพัฒนาต่อมาจากนักคณิตศาสตร์อีกหลายท่านจนเป็นนิยามของแคลคูลัสเชิงผลต่างอันดับเศษส่วนที่เราศึกษากันในปัจจุบัน โดยอาศัยฟังก์ชันแกมมา (Gamma Function)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (6)$$

และฟังก์ชันแฟกทอเรียลลดอันดับเศษส่วน (Fractional Falling Factorial Function) ดังต่อไปนี้

$$t^\alpha := \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha)} \quad (7)$$



พิจารณา **ปริพันธ์  $h$  ซ้อน (Repeated  $h$ -Integral Rule)** เมื่อ  $f : (h\mathbb{N})_a \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^t \int_a^{\tau_1} \dots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) \Delta_h \tau_n \dots \Delta_h \tau_2 \Delta_h \tau_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \sigma_h(\tau_1))_h^{n-1} f(\tau_1) \Delta_h \tau_1 \quad (8)$$

จะได้ **ผลรวมอันดับเศษส่วน (Fractional Sum)** อันดับ  $\alpha$  ของฟังก์ชัน  $f$  นิยามบน  $\mathbb{N}_a := \{a, a+1, \dots\}$  คือ

$$\Delta^{-\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t - \sigma(s))^{\alpha-1} f(s) \quad \text{สำหรับ } t \in \mathbb{N}_{a+\alpha}, \quad \sigma(s) := s+1 \quad (9)$$

**ผลต่างอันดับเศษส่วนแบบรีมันน์-ลียูวีล (Riemann-Liouville Fractional Difference)** อันดับ  $\alpha$  ของฟังก์ชัน  $f$  ซึ่งนิยามบน  $\mathbb{N}_a$  เมื่อ  $N-1 < \alpha \leq N, N \in \mathbb{N}$  คือ

$$\Delta^\alpha f(t) := \Delta^N \Delta^{-(N-\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{s=a}^{t+\alpha} (t - \sigma(s))^{-\alpha-1} f(s) \quad \text{สำหรับ } t \in \mathbb{N}_{a+N-\alpha} \quad (10)$$

และในปี 2009 Anastassiou [8] ได้แนะนำตัวดำเนินการเชิงผลต่างอันดับเศษส่วนประเภทใหม่คือ **ผลต่างอันดับเศษส่วนแบบคาปูโต (Caputo Fractional Difference)** โดยนิยามของ **ผลต่างอันดับเศษส่วนคาปูโตอันดับ  $\alpha$**  ของฟังก์ชัน  $f$  ซึ่งนิยามบน  $\mathbb{N}_a$  ดังนี้

$$\Delta_c^\alpha f(t) := \Delta^{-(N-\alpha)} \Delta^N f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{s=a}^{t-(N-\alpha)} (t - \sigma(s))^{N-\alpha-1} \Delta^N f(s) \quad (11)$$

สำหรับ  $t \in \mathbb{N}_{a+N-\alpha}$

ตัวอย่างเช่น พิจารณาผลต่างรีมันน์-ลียูวีลอันดับเศษส่วน  $\Delta_a^{1.5} f(t)$  จะได้

$$\Delta_a^{1.5} f(t) = \Delta^2 \Delta_a^{-0.5} f(t) = \Delta^2 \left[ \frac{1}{\Gamma(0.5)} \sum_{s=a}^{t-0.5} (t - \sigma(s))^{-0.5} f(s) \right]$$

$$\text{และจาก} \quad \Delta^2 f(t) = f(t+2) - 2f(t+1) + f(t)$$

จะได้ว่า

$$\Delta_a^{1.5} f(t) = \frac{1}{\Gamma(0.5)} \left[ \sum_{s=a}^{t+1.5} (t - \sigma(s))^{-0.5} f(s) - 2 \sum_{s=a}^{t+0.5} (t - \sigma(s))^{-0.5} f(s) + \sum_{s=a}^{t-0.5} (t - \sigma(s))^{-0.5} f(s) \right]$$

พิจารณาผลต่างคาปูโตอันดับเศษส่วน  $\Delta_c^{2.5} f(t)$  จะได้

$$\Delta_c^{2.5} f(t) = \Delta^{-0.5} \Delta^3 f(t) = \frac{1}{\Gamma(0.5)} \sum_{s=a}^{t-0.5} (t - \sigma(s))^{-0.5} \Delta^3 f(t)$$

$$\text{และจาก} \quad \Delta^3 f(t) = \Delta(\Delta^2 f(t)) = f(t+3) - 3f(t+2) + 3f(t+1) - f(t)$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \Delta_c^{2.5} f(t) = \frac{1}{\Gamma(0.5)} \sum_{s=a}^{t-0.5} (t - \sigma(s))^{-0.5} [f(s+3) - 3f(s+2) + 3f(s+1) - f(s)]$$

นอกจากนี้ยังมีตัวดำเนินการเชิงผลต่างอีกประเภทหนึ่งคือ Nabla (Backward) Difference Operator ซึ่งนิยามดังนี้

$$\nabla y(k) = y(k) - y(k-1) \quad (12)$$

ซึ่งมีได้กล่าวถึงในที่นี้ เริ่มมีการศึกษาแคลคูลัสเชิงผลต่าง Nabla อันดับเศษส่วน โดย Gray กับ Zhang (Gray H.L., Zhang N.F., 1988) ได้แนะนำในปี 1988 และมีนักคณิตศาสตร์อีกหลายท่านพัฒนาต่อมาได้แก่ Hirota (Hirota R., 2000), Nagai (Nagai A., 2003), Atici กับ Eloe (Atici F.M., Eloe P.W., 2009) และ Anastassiou (Anastassiou G.A., 2010) โดยมีการศึกษากันอย่างต่อเนื่องจนถึงปัจจุบัน

#### แคลคูลัสเชิงผลต่าง $q$ อันดับเศษส่วน

สำหรับแนวคิดเกี่ยวกับ แคลคูลัสเชิงผลต่าง  $q$  อันดับเศษส่วน (Fractional  $q$ -Difference Calculus) นั้นเป็นการขยายแนวคิดจากแคลคูลัสเชิงผลต่าง  $q$  ไปสู่แคลคูลัสเชิงผลต่าง  $q$  อันดับเศษส่วน โดยอาศัยฟังก์ชันแกมมา  $q$

$$\Gamma_q(x) := \frac{(1-q)^{x-1}}{(1-q)^{x-1}}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}, \quad (13)$$

และฟังก์ชันแฟกทอเรียล  $q$  ลดอันดับเศษส่วน (Fractional  $q$ -Falling Factorial Function) ดังต่อไปนี้

$$(1-q)_q^{x-1} := \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1-q^{x+n}}{1-q^{x+n}} \quad (14)$$

โดยมีสมบัติ  $\Gamma_q(x+1) = [x]_q \Gamma_q(x)$  เมื่อ  $[x]_q := \frac{1-q^x}{1-q}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

พิจารณา ปริพันธ์  $q$  ซ้อน (Repeated  $q$ -Integral) ให้  $f: I_q^T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in I_q^T$  แล้วจะได้ว่า

$$\int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d_q \tau_n \dots d_q \tau_2 d_q \tau_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t - \sigma_q(\tau_1))_q^{n-1} f(\tau_1) d_q \tau_1 \quad (15)$$

ต่อมา Al-Salam (Al-Salam W.A., 1997) และ Agarwal (Agarwal R.P., 1969) ได้นิยาม ปริพันธ์  $q$  อันดับเศษส่วน (Fractional  $q$ -Integral) อันดับ  $\alpha$  ของฟังก์ชัน  $f: I_q^T \rightarrow \mathbb{R}$  เมื่อ  $I_q^T := \{q^k T, k \in \mathbb{N}\} \cup \{0, T\}$  ดังนี้

$$\begin{aligned} (I_q^\alpha f)(t) &:= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^t (t - qs)_q^{\alpha-1} f(s) d_q s - \frac{t}{1} \sum_{k=0}^{\infty} q^k (t - q^{k+1} t)_q^{n-1} f(q^k t) \\ &= \frac{1}{[n-1]_q!} \sum_{k=0}^{\infty} q^k (1 - q^{k+1})_q^{n-1} f(q^k t), \quad t \in I_q^T \end{aligned} \quad (16)$$

ตัวดำเนินการเชิงผลต่าง  $q$  อันดับเศษส่วนแบบรีมันน์-ลีอูวีล (Riemann-Liouville Fractional  $q$ -Difference) และ ผลต่าง  $q$  อันดับเศษส่วนแบบคาปูโต (Caputo Fractional  $q$ -Difference) อันดับ  $\alpha$  ของฟังก์ชัน  $f$  นิยามดังต่อไปนี้ ตามลำดับ

$$D_q^\alpha f(t) := D_q^N \mathcal{I}_q^{N-\alpha} f(t) \quad (17)$$

$${}^C D_q^\alpha f(t) := \mathcal{I}_q^{N-\alpha} D_q^N f(t) \quad (18)$$

เมื่อ  $N-1 < \alpha \leq N$ ,  $N \in \mathbb{N}$  จะเห็นได้ว่า การศึกษาแคลคูลัส  $q$  อันดับเศษส่วนนั้นมีความครอบคลุมมากกว่า แคลคูลัส  $q$  ปกติ เนื่องจากสามารถหาผลต่าง  $q$  และปริพันธ์  $q$  อันดับใดๆ ก็ได้ ทำให้สามารถที่จะนำไปใช้ประโยชน์ในทางประยุกต์ได้กว้างขวางกว่านั่นเอง

#### แคลคูลัสเชิงผลต่างฮาห์นอันดับเศษส่วน

สำหรับ แคลคูลัสเชิงผลต่างฮาห์นอันดับเศษส่วน (Fractional Hahn Difference Calculus) เป็นการขยายแนว ความคิดของแคลคูลัสเชิงผลต่างฮาห์นโดยพิจารณาอันดับของผลต่างเป็นเศษส่วน โดยในปี 2010-2011 Čermák และ Nechvatál (Čermák J., Nechvatál L., 2010; Čermák J., Kisela T., Nechvatál L., 2011) ได้แนะนำแคลคูลัสควอนตัม  $q, h$  ซึ่งมีค่า  $q > 1$ ,  $h = \omega > 0$  ดังนั้นแคลคูลัสควอนตัม  $q, h$  นี้จึงมิใช่แคลคูลัสเชิงผลต่างฮาห์น เนื่องจากในแคลคูลัสเชิงผลต่างฮาห์นกำหนดค่า  $q \in (0, 1)$  ซึ่งได้ถูกแนะนำโดย Brikshavana และ Sitthiwirattam (Brikshavana T., Sitthiwirattam T., 2017) ในปี 2017 โดยให้  $q \in (0, 1)$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega_0 = \frac{\omega}{1-q}$ ,  $\omega_0 < T \in \mathbb{R}^+$  และ  $I_{q,\omega}^T := \{\sigma_{q,\omega}^k(t), k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\omega_0\}$  โดยที่  $\sigma_{q,\omega}^k(t) := q^k T + \omega[k]_q$  โดยอาศัยฟังก์ชันแกมมา  $q$  ในสมการ (13) และฟังก์ชันแฟกทอเรียล  $q, \omega$  ลดอันดับเศษส่วน (Fractional  $q, \omega$ - Falling Factorial Function) ดังต่อไปนี้

$$(a-b)_{q,\omega}^\alpha := (a-\omega_0)^\alpha \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \left(\frac{b-\omega_0}{a-\omega_0}\right) q^k}{1 - \left(\frac{b-\omega_0}{a-\omega_0}\right) q^{k+\alpha}}, \quad a \neq \omega_0$$

$$= ((a-\omega_0) - (b-\omega_0))_q^\alpha$$
(19)

พิจารณา ปริพันธ์ฮาห์นซ้อน (Repeated Hahn Integral) ให้  $f: I_{q,\omega}^T \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\omega_0}^t \int_{\omega_0}^{\tau_1} \dots \int_{\omega_0}^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d_{q,\omega} \tau_n \dots d_{q,\omega} \tau_2 d_{q,\omega} \tau_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\omega_0}^t (t - \sigma_{q,\omega}(\tau_1))_{q,\omega}^{n-1} f(\tau_1) d_{q,\omega} \tau_1 \quad (20)$$

จะได้ว่า ปริพันธ์ฮาห์นอันดับเศษส่วน (Fractional Hahn Integral) อันดับ  $\alpha$  ของฟังก์ชัน  $f: I_{q,\omega}^T \rightarrow \mathbb{R}$  คือ

$$\mathcal{I}_{q,\omega}^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_{\omega_0}^t (t - \sigma_{q,\omega}(s))_{q,\omega}^{\alpha-1} f(s) d_{q,\omega} s, \quad t \in I_{q,\omega}^T$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(1-q)t-\omega}{\Gamma_q(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} q^k \left( t - \sigma_{q,\omega}^{k+1}(t) \right)_{q,\omega}^{\alpha-1} f(\sigma_{q,\omega}^k(t)) \\
 &= \frac{(1-q)(t-\omega_0)^\alpha}{\Gamma_q(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} q^k \left( 1 - q^{k+1} \right)_q^{\alpha-1} f(\sigma_{q,\omega}^k(t))
 \end{aligned} \tag{21}$$

ตัวดำเนินการเชิงผลต่างฮาร์ทน์อันดับเศษส่วนแบบรีมันน์-ลีอูวีล (Riemann-Liouville Fractional Hahn Difference) และ ผลต่างฮาร์ทน์อันดับเศษส่วนแบบคาปูโต (Caputo Fractional Hahn Difference) อันดับ  $\alpha$  ของฟังก์ชัน  $f$  นิยามดังต่อไปนี้ ตามลำดับ

$$D_{q,\omega}^\alpha f(t) := D_{q,\omega}^N \mathcal{I}_{q,\omega}^{(N-\alpha)} f(t) \tag{22}$$

$${}^C D_{q,\omega}^\alpha f(t) := \mathcal{I}_{q,\omega}^{(N-\alpha)} D_{q,\omega}^N f(t) \tag{23}$$

เมื่อ  $N-1 < \alpha \leq N, N \in \mathbb{N}$

#### บทสรุปและข้อเสนอแนะ

- (1) แนวคิดในการสร้างตัวดำเนินการอันดับเศษส่วนของแต่ละแคลคูลัสคอนตัมคือ การหาสูตรทั่วไปในการหาปริพันธ์ซ้อนหรือผลรวม  $m$  ชั้น (ครั้ง) ของฟังก์ชัน  $f$  ของแต่ละแคลคูลัสคอนตัม จากนั้นจึงนิยามปริพันธ์หรือผลรวมอันดับเศษส่วน สุดท้ายก็จะนิยามดังกล่าวมานิยามอนุพันธ์หรือผลต่างอันดับเศษส่วนแบบรีมันน์-ลีอูวีล และแบบคาปูโต ของแต่ละแคลคูลัสคอนตัมต่อไป
- (2) ปัจจุบันได้มีการพัฒนาพัฒนาองค์ความรู้ในการสร้างตัวดำเนินการอันดับเศษส่วนของแคลคูลัสคอนตัมประเภทอื่นๆอีก อาทิเช่น
  - ปี 2019 Patanarapeelert และ Sitthiwiratham (Patanarapeelert, N., Sitthiwiratham, T., 2019) ได้แนะนำ แคลคูลัสสมมาตรฮาร์ทน์อันดับเศษส่วน (Fractional Symmetric Hahn Difference Calculus) ซึ่งเป็นการขยายองค์ความรู้จากแคลคูลัสฮาร์ทน์อันดับเศษส่วน
  - ปี 2020 Soontraranon และ Sitthiwiratham (Soontraranon, J., Sitthiwiratham, T., 2020) ได้แนะนำ แคลคูลัสเชิงผลต่าง  $p, q$  อันดับเศษส่วน (Fractional  $(p, q)$ -Difference Calculus) ซึ่งเป็นการขยายองค์ความรู้จากแคลคูลัส  $q$  อันดับเศษส่วน
- (3) มีแคลคูลัสคอนตัมอีกหลายประเภทที่ยังไม่ได้มีการศึกษาองค์ความรู้ในเรื่องอันดับเศษส่วนเลย ดังนั้นจึงเป็นองค์ความรู้ที่นักศึกษาค้นคว้าวิจัยเป็นอย่างยิ่งในอนาคต
- (4) องค์ความรู้ใหม่ในเรื่องแคลคูลัสคอนตัมอันดับเศษส่วน สามารถค้นคว้าวิจัยต่อยอดในหัวข้อวิจัย ความเสถียรภาพและพฤติกรรมเชิงเส้นกำกับ (Stability and Asymptotic Behavior) ของแคลคูลัสคอนตัมอันดับเศษส่วนประเภทต่างๆ ซึ่งในปัจจุบันมีนักคณิตศาสตร์ที่ศึกษาวิจัยเกี่ยวกับหัวข้อวิจัยนี้อยู่ไม่มากนัก จึงน่าจะเป็นโอกาสอันดีต่อนักวิจัยคณิตศาสตร์ไทยให้หันมาศึกษาวิจัยในสาขาวิชานี้เพิ่มขึ้น สามารถศึกษาวิจัยค้นคว้าหาองค์ความรู้ใหม่และนำผลงานไปตีพิมพ์เผยแพร่ในวารสารนานาชาติได้ อีกทั้งในอนาคตหมั่นว่าจะ

ได้มีนักวิจัยในศาสตร์สาขาอื่นที่เกี่ยวข้องนำองค์ความรู้ที่ได้สร้างขึ้นมานี้ไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์สูงสุดต่อไป

## References

- Sitthiwirattam, T. (2020). Quantum Calculus (Calculus without Limit) with the Filling of the Missing Spaces of Utilization. *Journal of Science Innovation for Sustainable Development*, 2(1), xx–xx
- Wu G.C., Baleanu D. (2013). Discrete chaos in fractional sine and standard maps. *Physics Letters A*, 378, 484–487.
- Wu G.C., Baleanu D. (2014)a. Discrete fractional logistic map and its chaos. *Nonlinear Dynamics*, 75, 283–287.
- Wu G.C., Baleanu D. (2014)b. Chaos synchronization of the discrete fractional logistic map. *Signal Processing*, 102, 96–99.
- Wu G.C., Baleanu D., Zeng S.D., Deng Z.G. (2015). Discrete fractional diffusion equation. *Nonlinear Dynamics*, 80(1–2), 281–286.
- Diaz J.B., Olser T.J. (1974). Differences of Fractional Order, *Mathematics of Computation*, 28, 185–202.
- Miller K.S., Ross B. (1989) Fractional difference calculus, in Proceedings of the International Symposium on Univalent Functions, Fractional Calculus, and Their Applications, Nihon University, Koriyama, Japan, 1989, 139–152.
- Anastassiou G.A. Discrete fractional calculus and inequalities, [Online]. Retrieved October 15, 2020, from <http://arxiv.org/abs/0911.3370v1>.
- Gray H.L., Zhang N.F. (1988). On a new definition of the fractional difference, *Mathematics of Computation*, 50(182), 513–529.
- Hirota R. (2000). Lectures on Difference Equations, Science-sha, Tokyo, Japan.
- Nagai A. (2003). Discrete Mittag-Leffler function and its applications, new developments in the research of integrable systems: continuous, discrete, ultra-discrete, *RIMS Kokyuroku*, 1302, 1–20.
- Atici F.M., Eloe P.W. (2009). Discrete fractional calculus with the nabla operator, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2009, 1–12.
- Anastassiou G.A. (2010). Nabla discrete fractional calculus and nabla inequalities, *Mathematical and Computer Modelling*, 51, 562–571.
- Al-Salam W.A. (1997). Some fractional  $q$ -integrals and  $q$ -derivative, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 15(2), 135–140.
- Agarwal R.P. (1969). Certain fractional  $q$ -integral and  $q$ -derivatives, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 66, 365–370.



- Čermák J., Nechvatál L., (2010). On  $q, h$  - analogue of fractional calculus. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 17(1), 51–68.
- Čermák J., Kisela T., Nechvatál L. (2011). Discrete Mittag-Leffler Functions in Linear Fractional Difference Equations. *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 565067, 21 pages.
- Brikshavana T., Sitthiwiratham T. (2017). On fractional Hahn calculus with the delta operators. *Advances in Difference Equations*, 2017, 354.
- Patanarapeelert, N., Sitthiwiratham, T. (2019). On Fractional Symmetric Hahn Calculus *Mathematics*, 7, 873.
- Soontraranon, J., Sitthiwiratham, T. (2020). On Fractional  $(p, q)$  - Calculus. *Advances in Difference Equations*, 2020, 35.

#### ผู้เขียน

ศาสตราจารย์ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสวนดุสิต

228-228/1-3 ศูนย์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ถนนสีริธร แขวงบางพลัด เขตบางพลัด กรุงเทพฯ 10700

e-mail: thanin\_sit@dusit.ac.th; thanin.sdu@gmail.com