

แคลคูลัสควอนตัม (แคลคูลัสไม่มีลิมิต) กับการเติมช่องว่างที่หายไปของการใช้ประโยชน์ Quantum Calculus (Calculus without Limit) with the Filling of the Missing Spaces of Utilization

ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม¹

¹ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสวนดุสิต

Thanin Sitthiwirattam¹

¹ Faculty of Science and Technology, Suan Dusit University

บทคัดย่อ

บทความนี้แนะนำแนวคิดของแคลคูลัสควอนตัมซึ่งเป็นแคลคูลัสที่แตกต่างไปจากแคลคูลัสที่เคยรู้จัก โดยได้แนะนำและแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์กับตัวดำเนินการเชิงผลต่าง h ตัวดำเนินการเชิงผลต่าง q และตัวดำเนินการเชิงผลต่างฮาห์น

คำสำคัญ: แคลคูลัสควอนตัม แคลคูลัสเชิงผลต่าง h แคลคูลัสเชิงผลต่าง q แคลคูลัสเชิงผลต่างฮาห์น

Abstract

This article introduces a concept of quantum calculus that is different from previous well-know calculus. By introducing and showing the relationship between the derivative, the h -difference operator, the q -difference operator and the Hahn difference operator.

Keywords: Quantum calculus, h -difference calculus, q -difference calculus, Hahn difference calculus

บทนำ

เชื่อว่าแทบทุกท่านต้องเคยได้ศึกษาแคลคูลัสและการประยุกต์มาแล้ว ในบทความนี้จะขอเรียกว่า แคลคูลัสดั้งเดิม (Classical Calculus) ซึ่งหัวใจของแคลคูลัสดั้งเดิมก็คือ ลิมิต (Limit) เนื่องจากตัวดำเนินการต่าง ๆ จะนิยามอยู่ในรูปของลิมิตทั้งสิ้น ขอยกตัวอย่างนิยามของอนุพันธ์ดังต่อไปนี้

เริ่มต้นด้วยกำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิดที่มี x อยู่ด้วย อัตราการเปลี่ยนแปลง (Rate of Change) ของ y เทียบกับ x นิยามโดย

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

เรียก Δy และ Δx ว่าส่วนเปลี่ยนแปลงของค่า y และค่า x ตามลำดับ ในที่นี้ขอเรียกสมการ (1) ว่า ผลต่าง (Difference) และถ้าเราพิจารณาลิมิตของผลต่าง $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เมื่อ $h \rightarrow 0$ ก็จะหมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ที่จุด x ใดๆ ซึ่งก็คือความหมายของอนุพันธ์นั่นเอง ดังนิยามต่อไปนี้

* ผู้ประสานงาน ศ.ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม
e-mail: thanin_sit@dusit.ac.th

อนุพันธ์ (Derivative) ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ x ใดๆ เขียนแทนด้วย $f'(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ นิยามโดย

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \quad (2)$$

ในบทความนี้ เราจะแนะนำแคลคูลัสที่แตกต่างไปจากแคลคูลัสดั้งเดิม ที่เรียกว่า แคลคูลัสควอนตัม (Quantum Calculus) หรือแคลคูลัสเชิงผลต่าง (Difference Calculus) ซึ่งเป็นแคลคูลัสที่ไม่ใช้ลิมิตมาช่วยในการนิยามความหมายและอธิบายทฤษฎีบทต่างๆ การศึกษาแคลคูลัสควอนตัมเริ่มมีการศึกษาอย่างจริงจังเมื่อไม่กี่ปีที่ผ่านมา ในปัจจุบันกำลังเป็นที่สนใจเพิ่มมากขึ้นในหมู่นักคณิตศาสตร์เนื่องจากสามารถใช้แก้ปัญหาได้กับการดำเนินการบนเซตของฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ (Nondifferentiable) ในแคลคูลัสดั้งเดิม (Almeida, R., Torres, D.F.M., 2011) และนำไปใช้อธิบายบางปรากฏการณ์ในทางฟิสิกส์ได้มากมายได้แก่ ความสมมาตรของอะตอมไฮโดรเจน [3], โมเลกุลและฟิสิกส์นิวเคลียร์ [4], ปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ในสนามสัมพัทธภาพทั่วไป [5] นอกจากนี้ยังนำตัวดำเนินการเชิงผลต่างของแคลคูลัส ควอนตัมไปใช้ในฟิสิกส์สาขาอื่นอีก อาทิเช่น สตริงของจักรวาลและหลุมดำ (Cosmic strings and black holes) [6], กลศาสตร์ควอนตัม [7]-[8], นิวเคลียร์และฟิสิกส์พลังงานสูง [9] เป็นต้น

แคลคูลัสควอนตัมมีมากมายหลากหลายประเภทแต่ในที่นี้จะขอแนะนำเพียงบางประเภทเท่านั้น ได้แก่ แคลคูลัสเชิงผลต่าง h แคลคูลัสเชิงผลต่าง q และแคลคูลัสเชิงผลต่างฮาห์น

แคลคูลัสเชิงผลต่าง h (h -Difference Calculus)

ปัญหาทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และปรากฏการณ์ที่เกี่ยวข้องนั้น สามารถแก้ปัญหาได้โดยการสร้างความสัมพันธ์ในรูปของสมการคณิตศาสตร์หรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ ทั้งสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย แต่ในบางปรากฏการณ์ที่การวัดข้อมูลไม่สามารถวัดได้อย่างต่อเนื่อง ข้อมูลวิฤต (Discrete Data) เหล่านี้ไม่สามารถนำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญหรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้ จึงทำให้นักคณิตศาสตร์พัฒนาแคลคูลัสขึ้นมาอีกสาขาหนึ่งเรียกว่า แคลคูลัสเชิงผลต่าง h โดยเป็นเครื่องมือสำคัญในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากข้อมูลวิฤตซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงผลต่าง h (h -Difference Equations) ที่มีตัวแปรอยู่ในเซตที่มีสมาชิกเป็นบางจำนวนเท่านั้น โดยจะแสดงความสัมพันธ์ของแต่ละข้อมูลวิฤต

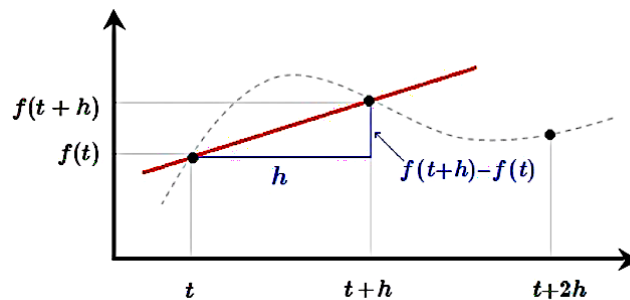
แคลคูลัสเชิงผลต่าง h ถูกแนะนำขึ้นอย่างเป็นทางการในปี 1730 โดย Stirling [10] ถึงแม้ว่า Taylor จะเป็นคนแรกที่ได้ใช้แนวคิดของแคลคูลัส h ในปี 1717 ในงานของเขา [11] ในกรณี $h = 1$ เราจะได้แคลคูลัสเชิงผลต่างที่ศึกษากันในปัจจุบันนั่นเอง สำหรับสัญลักษณ์ผลต่าง “ Δ ” ถูกนำมาใช้ครั้งแรกในปี 1755 โดย Euler [12] ผลงานที่สำคัญเกี่ยวกับแคลคูลัส h ได้แก่ผลงานของ Boole [13], Markoff [14], Whittaker กับ Ronbison [15], Nörlund [16], Milne-Thomson [17] และ Jordan [18] นิยามของตัวดำเนินการในแคลคูลัส h ที่ศึกษาในปัจจุบันมีดังต่อไปนี้

สำหรับ $h > 0$ และฟังก์ชัน $f : (h\mathbb{N})_a \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $(h\mathbb{N})_a := \{a, a+h, a+2h, \dots\}$ ผลต่าง h (h -difference) ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $\Delta_h f$ นิยามโดย

$$\Delta_h f := \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (3)$$

จะสังเกตได้ว่า $\Delta_h f(t) = \frac{\Delta f}{\Delta t}$ ซึ่งก็คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เทียบกับ t ในสมการ (1) นั่นเอง

โดยที่ส่วนเปลี่ยนแปลงของค่า f และ t คือ $\Delta f = f(t+h) - f(t)$ และ $\Delta t = (t+h) - t = h$ ตามลำดับ
ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แสดงส่วนเปลี่ยนแปลงของค่า y และส่วนเปลี่ยนแปลงของค่า t

จะเห็นได้ว่าถ้าเราทราบค่าที่จุดเริ่มต้นแล้วจะสามารถหาค่าอื่นที่ตำแหน่งต่อไปได้ แคลคูลัสเชิงผลต่าง h สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ อุตสาหกรรม การแพทย์ การเงินและเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น ในกรณีที่แบบจำลองที่สร้างขึ้นไม่สามารถวัดได้อย่างต่อเนื่อง จากความสำคัญของแคลคูลัสเชิงผลต่าง h ทำให้มีนักคณิตศาสตร์ศึกษาพฤติกรรมของคำตอบของสมการเชิงผลต่าง h ในหลากหลายมิติ ได้แก่ ทฤษฎีการมีอยู่จริงและมีเพียงคำตอบเดียว ทฤษฎีความเสถียรของคำตอบ และทฤษฎีการกวัดแกว่งของคำตอบ เพื่อจะสามารถนำองค์ความรู้ใหม่ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในศาสตร์สาขาที่เกี่ยวข้องต่อไป

แคลคูลัสเชิงผลต่าง q (Difference q -Calculus)

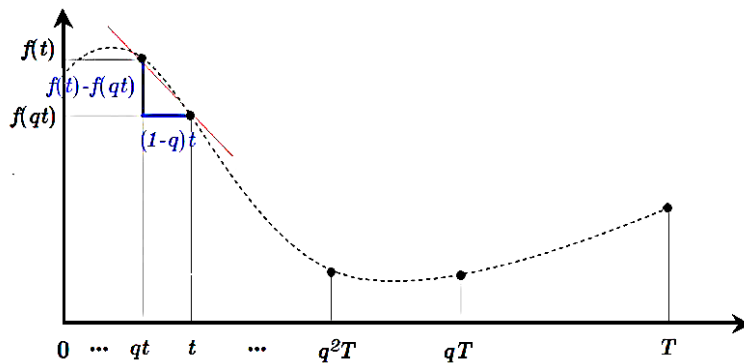
การศึกษาแคลคูลัสเชิงผลต่าง q ได้เริ่มมีขึ้นเมื่อประมาณหนึ่งร้อยปีที่ผ่านมาโดย F.H. Jackson [19], R.D. Carmichael [20], T.E. Mason [21], C.R. Adams [22], W.J. Trjitzinsky [23] และนักคณิตศาสตร์ที่สำคัญอีกมากมายอาทิเช่น Poincare, Picard, Ramanujan เป็นต้น แต่ในช่วงปี 1930-1980 นั้นยังไม่ค่อยมีผู้ใดให้ความสนใจในการศึกษาเหล่านี้มากนัก จนกระทั่งตั้งแต่ปี 1980 เป็นต้นมาได้เริ่มมีนักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจขึ้นมาอีกครั้ง เนื่องจากได้มีผลของการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับแคลคูลัสเชิงผลต่าง q ที่น่าสนใจเกิดขึ้น ได้แก่ q -arithmetic, q -combinatorics, q -integrable system, Variational q -calculus และอีกสาเหตุหนึ่งที่ทำให้แคลคูลัสเชิงผลต่าง q กลับมาเป็นที่สนใจอีกครั้งในหมู่นักคณิตศาสตร์คือมีการนำแคลคูลัสเชิงผลต่าง q ไปใช้อธิบายปรากฏการณ์ในทางฟิสิกส์ เช่น V. Fock และคณะ [24] ในปี 1935 ได้ศึกษาความสมมาตรของอะตอมไฮโดรเจนโดยใช้แคลคูลัสเชิงผลต่าง q และต่อมาในปี 1990 P.P. Raychev และคณะ [25] ได้นำแคลคูลัสเชิงผลต่าง q ไปใช้ในการศึกษาโมเลกุลและฟิสิกส์นิวเคลียร์ ในปี 1994 H. Cheng [26] ได้ศึกษาทฤษฎี Yang-Mills ซึ่งเป็นทฤษฎีที่อธิบายปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ในสนามสัมพัทธภาพทั่วไป นอกจากนี้ยังมีการนำแคลคูลัสเชิงผลต่าง q ไปใช้ในฟิสิกส์สาขาอื่นอีกอาทิเช่น ฟิสิกส์ของอนุภาคมูลฐาน และเคมีคัลฟิสิกส์ (Elementary particle physics and chemical physics) ทฤษฎีสตริง (String theory) เป็นต้น นิยามของตัวดำเนินการในแคลคูลัส q ที่ศึกษาในปัจจุบัน มีดังต่อไปนี้

สำหรับ $q \in (0,1)$ และฟังก์ชัน $f: I_q^T \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $I_q^T := \{q^k T \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$ โดยที่ $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

ผลต่าง q (q -Difference) ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $D_q f$ นิยามโดย

$$D_q f(t) := \begin{cases} \frac{f(t) - f(qt)}{(1-q)t}, & t \neq 0 \\ f'(0), & t = 0 \end{cases} \quad (4)$$

จะสังเกตได้ว่า $D_q f(t) = \frac{\Delta f}{\Delta t}$ โดยที่ส่วนเปลี่ยนแปลงของค่า f คือ $\Delta f = f(t) - f(qt)$ และส่วนเปลี่ยนแปลงของค่า t คือ $\Delta t = t - qt = (1-q)t$ ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 แสดงส่วนเปลี่ยนแปลงของค่า y และส่วนเปลี่ยนแปลงของค่า t

และถ้าให้ $q \rightarrow 1$ แล้วจะได้ว่า $\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)$ ตัวอย่างเช่นกำหนด $f(t) = t^2$ จะ

ได้ $D_q t^2 = \frac{t^2 - q^2 t^2}{(1-q)t} = (1+q)t$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าถ้า $q \rightarrow 1$ แล้วผลต่าง q จะเป็นอนุพันธ์ $f'(t) = 2t$ นั่นเอง

แคลคูลัสเชิงผลต่างฮาห์น (Hahn Difference Calculus)

แคลคูลัสเชิงผลต่างฮาห์น คือแคลคูลัสควอนตัมอีกประเภทหนึ่ง ซึ่งเป็นการรวมแคลคูลัสควอนตัมอีกสองประเภทข้างต้นมาไว้ด้วยกัน คือแคลคูลัสเชิงผลต่าง h และแคลคูลัสเชิงผลต่าง q โดยในปี 1949 Hahn [27] เป็นผู้ที่ได้แนะนำตัวดำเนินการเชิงผลต่างฮาห์น (Hahn difference operator) ดังต่อไปนี้

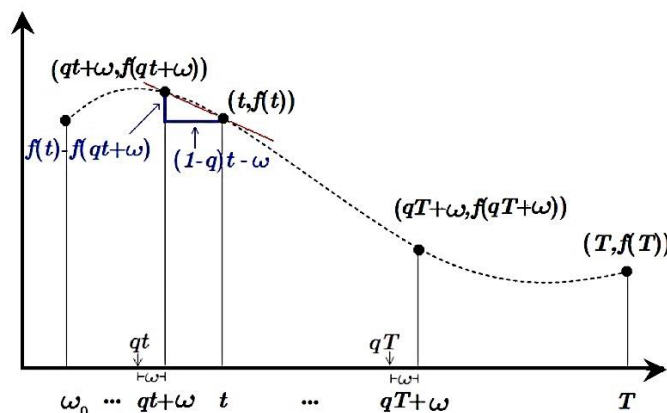
สำหรับ $q \in (0,1)$, $\omega > 0$ และฟังก์ชัน $f: I_{q,\omega}^T \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $I_{q,\omega}^T := \{q^k T + \omega[k]_q \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\omega_0\}$ โดยที่

$\omega_0 = \frac{\omega}{1-q}$ และ $[k]_q = \frac{1-q^k}{1-q}$ ผลต่างฮาห์น (Hahn Difference) ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $D_{q,\omega} f$

นิยามโดย

$$D_{q,\omega} f(t) := \begin{cases} \frac{f(t) - f(qt + \omega)}{(1-q)t - \omega}, & t \in I_{q,\omega}^T - \{\omega_0\} \\ f'(\omega_0), & t = \omega_0 \end{cases} \quad (5)$$

จะสังเกตได้ว่า $D_{q,\omega} f(t) = \frac{\Delta f}{\Delta t}$ โดยที่ส่วนเปลี่ยนแปลงของค่า f คือ $\Delta f = f(t) - f(qt + \omega)$ และส่วนเปลี่ยนแปลงของค่า t คือ $\Delta t = t - (qt + \omega) = (1-q)t - \omega$ ดังภาพที่ 3



ภาพที่ 3 แสดงส่วนเปลี่ยนแปลงของค่า y และส่วนเปลี่ยนแปลงของค่า t

ปัจจุบันแคลคูลัสเชิงผลต่างฮาห์นได้ถูกนำไปใช้ในการสร้าง Family of orthogonal polynomial [28]-[30] และถึงแม้ว่าตัวดำเนินการเชิงผลต่างฮาห์นจะได้ถูกนิยามมาตั้งแต่ปี 1949 แต่สำหรับตัวดำเนินการผกผันของมันเพิ่งจะได้มีการศึกษาในปี 2009 โดย Aldwoah [31]-[33] หลังจากนั้นก็เริ่มมีงานวิจัยเกี่ยวกับแคลคูลัสเชิงผลต่างฮาห์นออกมาเพิ่มมากขึ้นจนถึงปัจจุบัน แต่องค์ความรู้ใหม่ของมันยังสามารถศึกษาวิจัยได้อีกมากมาย

จากนิยามของผลต่าง h ($h = \omega$) และผลต่าง q เราจะเห็นได้ชัดว่า

$$\text{ถ้า } q = 1 \quad \text{จะได้ว่า} \quad D_{1,\omega} f(t) = \Delta_{\omega} f(t)$$

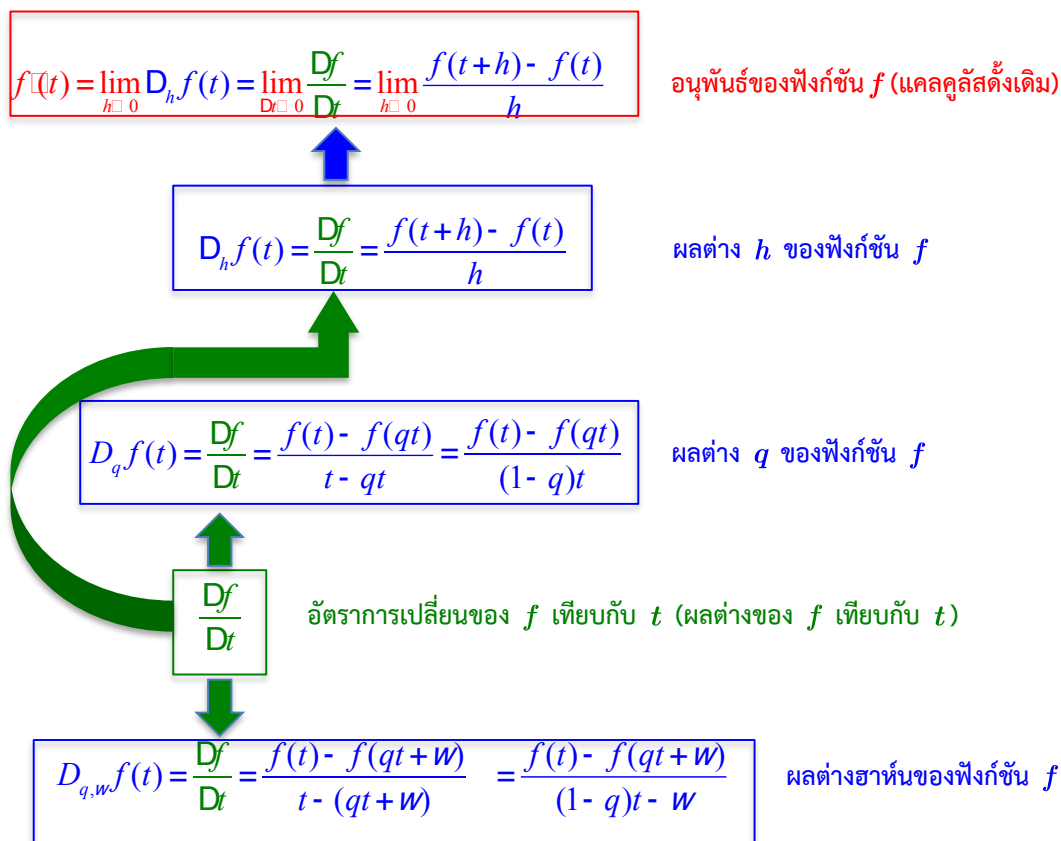
$$\text{ถ้า } \omega = 0 \quad \text{จะได้ว่า} \quad D_{q,0} f(t) = D_q f(t)$$

$$\text{และถ้า } q = 1, \omega \rightarrow 0 \quad \text{จะได้ว่า} \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} D_{1,\omega} f(t) = f'(t)$$

นั่นคือ ตัวดำเนินการเชิงผลต่างฮาห์นจะครอบคลุมเกี่ยวข้องกับทั้งตัวดำเนินการเชิงผลต่าง h ผลต่าง q และอนุพันธ์

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

- (1) แคลคูลัสควอนตัมหรือแคลคูลัสเชิงผลต่าง เป็นแคลคูลัสที่ไม่ได้ใช้ลิมิตมานิยามตัวดำเนินการต่างๆ ในแคลคูลัสควอนตัมแต่ละประเภท ดังนั้นนิยามของตัวดำเนินการเชิงผลต่าง h ผลต่าง q และผลต่างฮาห์น
- (2) ตัวดำเนินการเชิงผลต่างของแคลคูลัสควอนตัมแต่ละประเภทคือ อัตราการเปลี่ยนของ f เทียบกับ t (ผลต่างของ f เทียบกับ t) แตกต่างกันในเงื่อนไขของส่วนเปลี่ยนแปลงของค่า f และค่าฟังก์ชัน t สำหรับตัวดำเนินการเชิงผลต่างของแคลคูลัสควอนตัมประเภทอื่นๆ ก็จะมีนิยามเงื่อนไขแตกต่างกันออกไป
- (3) ความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์ ผลต่าง h ผลต่าง q และผลต่างฮาห์นของฟังก์ชัน f แสดงได้ดังภาพที่ 4



ภาพที่ 4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์ ผลต่าง h ผลต่าง q และผลต่างฮาร์น

- (4) ปัจจุบันได้มีการพัฒนาแคลคูลัส ขยายการศึกษาออกเป็นแคลคูลัสอันดับเศษส่วน (Fractional Calculus) ซึ่งมีจุดเริ่มต้นในการศึกษาค้นคว้าภายหลังจากที่ โลบ์-นิทซ์ (1646-1716) ได้นิยามอนุพันธ์อันดับที่ n ในรูป $D^n y(t)$ โดยโลปีตาล (1661-1704) เกิดข้อสงสัยว่า “จะเกิดอะไรขึ้นถ้า $n = 0.5$ ” ซึ่งโลบ์นิทซ์เองในขณะนั้นก็ยังไม่สามารถอธิบายความหมายของอนุพันธ์ $D^{0.5} y(t)$ ได้อย่างชัดเจน หลังจากนั้นจึงได้เริ่มมีการศึกษาค้นคว้าแคลคูลัสอันดับเศษส่วนเป็นต้นมา สำหรับแคลคูลัสควอนตัมอันดับเศษส่วน ได้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านพัฒนาองค์ความรู้เรื่องเหล่านี้อย่างต่อเนื่องมาจนถึงปัจจุบัน อาทิเช่น
- ปี 1966 Al-Salam [34] และปี 1969 Agarwal [35] ได้แนะนำ แคลคูลัสเชิงผลต่าง q อันดับเศษส่วน (Fractional q -Difference Calculus)
 - ปี 1989 Miller และ Ross [36] ได้แนะนำ แคลคูลัสเชิงผลต่างอันดับเศษส่วน (Fractional Difference Calculus)
 - ปี 2011 Ferreira และ Torres [37] ได้แนะนำ แคลคูลัสเชิงผลต่าง h อันดับเศษส่วน (Fractional h -Difference Calculus)

- ปี 2017 Briksavana และ Sitthiwiratttham [38] ได้แนะนำ แคลคูลัสเชิงผลต่างฮาห์นอันดับเศษส่วน (Fractional Hahn Difference Calculus)
 - ปี 2019 Patanarapeelert และ Sitthiwiratttham [39] ได้แนะนำ แคลคูลัสเชิงผลต่างสมมาตรฮาห์นอันดับเศษส่วน (Fractional Symmetric Hahn Difference Calculus)
 - ปัจจุบันปี 2020 Soontraranon และ Sitthiwiratttham [40] ได้แนะนำ แคลคูลัสเชิงผลต่าง p, q อันดับเศษส่วน (Fractional (p, q) -Difference Calculus)
 - มีแคลคูลัสควอนตัมอีกหลายประเภทที่ยังไม่ได้มีการศึกษาองค์ความรู้ในเรื่องอันดับเศษส่วนเลย ดังนั้นจึงเป็นองค์ความรู้ที่นักศึกษาค้นคว้าวิจัยเป็นอย่างยิ่งในอนาคต
- (5) องค์ความรู้ใหม่ในเรื่องแคลคูลัสควอนตัม สามารถค้นคว้าวิจัยต่อยอดในหัวข้อวิจัย ความเสถียรภาพและพฤติกรรมเชิงเส้นกำกับ (Stability and Asymptotic Behavior) ของแคลคูลัสควอนตัม และแคลคูลัสควอนตัมอันดับเศษส่วนประเภทต่างๆ ซึ่งในปัจจุบันมีนักคณิตศาสตร์ที่ศึกษาวิจัยเกี่ยวกับหัวข้อวิจัยนี้อยู่ไม่น้อยมาก จึงน่าจะเป็นโอกาสอันดีต่อนักวิจัยคณิตศาสตร์ไทยให้หันมาศึกษาวิจัยในสาขาวิชานี้เพิ่มขึ้น สามารถศึกษาวิจัยค้นคว้าหาองค์ความรู้ใหม่และนำผลงานไปตีพิมพ์เผยแพร่ในวารสารนานาชาติได้ อีกทั้งในอนาคตหมายมั่นว่าจะได้มีนักวิจัยในศาสตร์สาขาอื่นที่เกี่ยวข้องนำองค์ความรู้ที่ได้สร้างขึ้นมานี้ไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์สูงสุดต่อไป

References

- Almeida, R., Torres, D.F.M. (2011). Nondifferentiable variational principles in terms of a quantum operator. *Math. Methods Appl. Sci.*, 34(18), 2231–2241.
- Cresson, J., Frederico, G.S.F., Torres, D.F.M. (2009). Constants of motion for nondifferentiable quantum variational problems, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 33(2), 217–231.
- Fock, V. (1935). Zur Theorie des Wasserstoffatoms. *Zeitschrift fur Physik.*, 98, 145-154.
- Raychev, P.P., Roussev, R.P., Smirnov, Yu.F. (1990). The quantum algebra $SU_q(2)$ and rotational spectra of deformed nuclei, *J. Phys. G.*, 16, 137-141.
- Cheng, H. (1994). *Canonical Quantization of Yang-Mills Theories, Perspectives in mathematical physics.* International press.
- Page, D.N. (1993). Information in black hole radiation, *Phys. Rev. Lett.*, 71(23), 3743–3746.
- Feynman, R.P., Hibbs, A.R. (2010). *Quantum Mechanics and Path Integrals.* Dover, Mineola, NY : Emended Edition.
- Youm, D. (2000). q -deformed conformal quantum mechanics, *Phys. Rev. D.*, 62:095009, 5 pages.
- Lavagno, A., Swamy, P.N. (2002). q -deformed structures and nonextensive statistics: a comparative study, *Phys. A.*, 305(1-2), 310–315.
- Stirling, J. (1730). *Methodus Differentialis.* London.
- Taylor, B. (1717). *Methods Incrementorum.* London.
- Euler, L. (1755). *Institutiones calculi differentialis.* Academiae Imperiales Scientiarum Petropolitanae.

- Boole, G. (1860). *A Treatise on The Calculus of Difference Equations*. Cambridge.
- Markoff, A.A. (1904). *Differenzenrechnung*. Leipzig.
- Whittaker, E.T., Ronbison, G. (1924). *Calculus of Observations*. London.
- Nörlund, N.E. (1924). *Differenzenrechnung*. Berlin.
- Milne-Thomson, L.M. (1951). *The Calculus of Finite Differences*. London: Macmillan and Co., Ltd.
- Jordan, C. (1965). *The Calculus of Finites Differences*, American Mathematical Society.
- Jackson, H.F. (1910). q -Difference equations, *Amer. J. Math.*, 32, 305-314.
- Carmichael, R.D. (1912). The general theory of linear q -difference equations, *Amer. J. Math.*, 34, 147-168.
- Mason, T.E. (1915). On properties of the solution of linear q -difference equations with entire function coefficients, *Amer. J. Math.*, 37, 439-444.
- Adams, C.R. (1929). On the linear ordinary q -difference equation, *Amer. Math. Ser. II*, 30, 195-205.
- Trjitzinsky, W.J. (1993). Analytic theory of linear q -difference equations, *Acta Mathematica*, 61(1), 1-38.
- Fock, V. (1935). Zur Theorie des Wasserstoffatoms. *Zeitschrift fur Physik*, 98, 145-154.
- Raychev ,P.P., Roussev, R.P., Smirnov, Yu.F. (1990). The quantum algebra $SU_q(2)$ and rotational spectra of deformed nuclei, *J. Phys. G.*, 16, 137-141.
- Cheng, H. (1994). *Canonical quantization of Yang-Mills theories, Perspectives in Mathematical Physics*. International press.
- Hahn, W. (1949). Über orthogonal polynome, die h -differenzengleichungen genügen, *Math. Nachr.*, 2, 4-34.
- Álvarez-Nodarse, R. (2006). On characterizations of classical polynomials, *J. Comput. Appl. Math.*, 196(1), 320-337.
- Dobrogowska, A., Odziejewicz, A. (2006). Second order q -difference equations solvable by factorization method, *J. Comput. Appl. Math.*, 193(1), 319-346.
- Petronilho, J. (2007). Generic formulas for the values at the singular points of some special monic classical $H_{q,\omega}$ -orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.*, 205(1), 314-324.
- Aldwoah, K.A. (2009). *Generalized Time Scales and Associated Difference Equations*. Ph.D. thesis, Cairo University.
- Aldwoah, K.A., Hamza, A.E. (2011). Difference time scales, *Int. J. Math. Stat.*, 9(A11), 106-125.
- Hamza, A.E., Sarhan, A.M., Shehata, E.M, Aldwoah, K.A. (2015). A general quantum difference calculus, *Adv. Differ. Equ.*, 2015:182.
- Al-Salam, W.A. (1966). Some fractional q -integrals and q -derivative, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 15(2), 135-140.
- Agarwal, R.P. (1969). Certain fractional q -integral and q -derivatives, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 66, 365-370.
- Miller, K.S., Ross, B. (1989). *Fractional difference calculus, in Proceedings of the International Symposium on Univalent Functions, Fractional Calculus, and Their Applications*, Nihon University, Koriyama, Japan, 139-152.

- Ferreira, R.A.C., Torres, D.F.M. (2011). Fractional h-difference equations arising from the calculus of variations, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 5(1), 110–121.
- Brikshavana, T., Sitthiwiratttham, T. (2017). On fractional Hahn calculus with the delta operators. *Adv. Differ. Equ.*, 2017:354.
- Patanarapeelert, N., Sitthiwiratttham, T. (2019). On Fractional Symmetric Hahn Calculus *Mathematics*, 7, 873.
- Soontraranon, J., Sitthiwiratttham, T. (2020). On Fractional (p,q) -Calculus. *Adv. Differ. Equ.*, 2020:35.