

กลุ่มทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร โดยใช้ตัวแปรช่วยสองตัว

A Generalized Exponential Ratio Estimator for Estimating the Population Mean Using Two Auxiliary Variables

ภัททิตา เลิศจริยพร¹ และณภัฏม์จันทร์ ด้านสวัสดิ์² *

¹ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยหัวเฉียวเฉลิมพระเกียรติ

² คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์

*ผู้เขียนหลัก (Corresponding Author) E-mail : napattchan@vru.ac.th

Received: October 11,2021

Revised: November 30,2021

Accepted: December 5,2021

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร โดยพัฒนาจากตัวประมาณของ Singh & Agnihotri (2008) และตัวประมาณของ Singh et al. (2009) ซึ่งจะทำการศึกษายาใต้เงื่อนไขที่ตัวแปรที่สนใจศึกษามีความสัมพันธ์ในระดับสูงทางบวกกับตัวแปรช่วย ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน พร้อมทั้งศึกษาถึงความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยและความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดของกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณที่นำเสนอใหม่ และทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณที่นำเสนอใหม่กับตัวประมาณอื่น ๆ เช่น ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง ตัวประมาณของ Bahl & Tuteja (1991) Singh & Agnihotri (2008) Singh et al. (2009) เป็นต้น ผ่านการเปรียบเทียบทั้งทางทฤษฎี และการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง ผลการศึกษาพบว่า กลุ่มทั่วไปของตัวประมาณที่นำเสนอมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอื่น ๆ อย่างมีเงื่อนไข ในสถานการณ์ที่ตัวแปรที่สนใจศึกษามีความสัมพันธ์ในระดับสูงทางบวกกับตัวแปรช่วย

คำสำคัญ: ตัวประมาณอัตราส่วน, ตัวประมาณแบบเลขชี้กำลัง, ค่าเฉลี่ยประชากร, ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย, ค่าร้อยละประสิทธิภาพสัมพัทธ์

Abstract

This paper aimed to propose a generalized exponential ratio estimator for estimating the population mean by adapting Agnihotri (2008) and Singh et al. (2009) estimator. When the correlation between the study variable and auxiliary variable is positively high under simple random sampling without replacement (SRSWOR). Mean squared error (MSE) and the minimum mean squared error (MMSE) of the proposed estimator has been studied and compared with unbiased estimator, Bahl & Tuteja (1991) estimator, Singh & Agnihotri (2008) estimator, Singh et al. (2009) estimator, etc., through theoretical and empirical analysis. The results show that the new estimator performs better as compared to all other estimators where the correlation between study and auxiliary variables is highly positive.

Keywords: Ratio Estimator, Exponential Estimator, Population Mean, MSE, PRE

บทนำ

จุดประสงค์หลักของทฤษฎีการสำรวจตัวอย่าง (Sample Survey Theory) คือการอนุมานค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ไม่ทราบของประชากรที่สนใจศึกษา เช่น ค่าเฉลี่ย ค่าสัดส่วน รวมถึงค่าความแปรปรวน ด้วยค่าสถิติที่คำนวณจากตัวอย่างที่ถูกเลือกมาเพื่อใช้เป็นตัวแทนของประชากร โดยหนึ่งในการอนุมานค่าพารามิเตอร์ที่เป็นที่นิยมในปัจจุบันคือ การสร้างตัวประมาณเพื่อประมาณค่าเฉลี่ย โดยตัวประมาณที่สร้างขึ้นมีได้หลากหลายรูปแบบ อาทิ ตัวประมาณอัตราส่วน (Ratio Estimator) ตัวประมาณผลคูณ (Product Estimator) และตัวประมาณถดถอย (Regression Estimator) ฯลฯ โดยตัวประมาณแต่ละตัวจะมีประสิทธิภาพและมีความเหมาะสมภายใต้เงื่อนไขที่แตกต่างกัน กล่าวคือ ตัวประมาณอัตราส่วนจะมีประสิทธิภาพและมีความเหมาะสมมากกว่าตัวประมาณในรูปแบบอื่น ๆ ถ้าเส้นการถดถอย (Regression Line) ของตัวแปรที่สนใจศึกษา Y และตัวแปรช่วย X ตัดผ่านจุดกำเนิด และความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองเป็นไปในทางบวก (Positive Correlation) (Ahmed et al., 2019) ในขณะที่ตัวประมาณผลคูณจะมีประสิทธิภาพและมีความเหมาะสมในกรณีที่คล้ายกันกับตัวประมาณอัตราส่วน แต่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสนใจศึกษา Y และตัวแปรช่วย X จะเป็นไปในทางลบ (Negative Correlation) (Grover et al., 2012) สำหรับในกรณีที่เส้นการถดถอยไม่ได้ตัดผ่านจุดกำเนิด แต่ไปตัดแกน Y (Y -axis) และความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสนใจศึกษา Y และตัวแปรช่วย X มีค่าที่ค่อนข้างน้อย ตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพและมีความเหมาะสมมากที่สุด在这种情况下นี้ ถูกตั้งชื่อตัวประมาณว่าตัวประมาณถดถอย (Vadav et al., 2012)

ในการสร้างตัวประมาณในรูปแบบต่าง ๆ ที่สนใจศึกษา ภายใต้วิธีการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน จะพิจารณาการสุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรขนาด N และเมื่อต้องการประมาณค่าเฉลี่ยประชากร (Population Mean:) ของตัวแปรที่สนใจศึกษา ผู้วิจัยจะประมาณด้วยค่าเฉลี่ยตัวอย่าง (Sample Mean:) ซึ่งเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ (Singh & Pal, 2015) โดยตัวประมาณดังกล่าวมีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยดังต่อไปนี้

$$MSE(\bar{y}) = \lambda \bar{Y}^2 C_y^2 \quad (1)$$

โดยที่ $\lambda = (1-f)/n$, $f = n/N$, $C_y^2 = S_y^2 / \bar{Y}^2$, $S_y^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 / N - 1$

เมื่อ C_y และ S_y^2 คือ สัมประสิทธิ์การแปรผันและความแปรปรวนของประชากรของตัวแปรที่สนใจศึกษา Y ตามลำดับ

จากตัวประมาณ $\bar{y}$ ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น Bahl & Tuteja (1991) ได้นำเสนอตัวประมาณอัตราส่วนในอีกรูปแบบหนึ่ง ในรูปแบบเลขชี้กำลัง (Ratio-Type Exponential Estimator) โดยใช้สารสนเทศจากตัวแปรช่วย X จำนวน 1 ตัว เพื่อใช้ในการประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ซึ่งตัวประมาณที่นำเสนอนี้มีรูปแบบและความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยคือ

$$\hat{\bar{Y}}_1 = \bar{y} \exp\left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}}\right) \quad (2)$$

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_1) = \lambda \bar{Y}^2 \left[C_y^2 + \frac{C_x^2}{4} (1 - 4K) \right] \quad (3)$$

โดยที่ $K = \rho_{yx} C_y / C_x$, $C_x^2 = S_x^2 / \bar{X}^2$, $S_x^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2 / N - 1$

เมื่อ $\bar{X}$ และ $\bar{x}$ คือ ค่าเฉลี่ยของประชากรและของตัวอย่างของตัวแปรช่วย X ในขณะที่ C_x และ S_x^2 คือ สัมประสิทธิ์การแปรผันและความแปรปรวนของประชากรของตัวแปรช่วย X และ ρ_{yx} คือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของประชากรระหว่างตัวแปรที่สนใจศึกษา Y และตัวแปรช่วย X

ต่อมา Singh & Agnihotri (2008) ได้นำเสนอรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วน โดยใช้สารสนเทศจากตัวแปรช่วย X จำนวน 2 ตัว สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ซึ่งรูปแบบที่นำเสนอ

จะครอบคลุมตัวประมาณอัตราส่วนหลายตัวที่นักวิจัยหลาย ๆ ท่าน ได้เคยนำเสนอมาก่อนแล้ว มีรูปแบบและความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่นำเสนอต่อไปนี้

$$\hat{Y}_2 = \bar{y} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x} + b} \right) \quad (4)$$

$$MSE(\hat{Y}_2) = \lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + C_x^2 \theta (\theta - 2K) \right) \quad (5)$$

โดยที่ $\theta = a\bar{X} / (a\bar{X} + b)$ เมื่อ a และ b คือค่าคงที่ หรือค่าฟังก์ชันที่คำนวณได้จากตัวแปรช่วย X

ในขณะที่ Singh et al. (2009) ได้พัฒนาตัวประมาณที่นำเสนอโดย Bahl & Tuteja (1991) โดยใช้สารสนเทศจากตัวแปรช่วย จำนวน 2 ตัว ในการสร้างตัวประมาณอัตราส่วนขึ้นมาใหม่ มีรูปแบบและความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่นำเสนอต่อไปนี้

$$\hat{Y}_3 = \bar{y} \exp \left(\frac{a(\bar{X} - \bar{x})}{a(\bar{X} + \bar{x}) + 2b} \right) \quad (6)$$

$$MSE(\hat{Y}_3) = \lambda \bar{Y}^2 \left[C_y^2 + C_x^2 \theta (\theta - 2K) \right] \quad (7)$$

Singh & Pal (2015) ได้พัฒนาตัวประมาณของ Bahl & Tuteja (1991) ขึ้นมาใหม่ เพื่อใช้ในการประมาณค่าประมาณค่าเฉลี่ยประชากร โดยใช้สารสนเทศจากตัวแปรช่วย X จำนวน 1 ตัว ในกรณีที่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสนใจศึกษา Y และตัวแปรช่วย X เป็นไปในทั้งทางลบและทางบวก มีรูปแบบของตัวประมาณต่อไปนี้

$$\hat{Y}_4 = \bar{y} \exp \left(\frac{2(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{X} + \bar{x}} \right) \quad (8)$$

$$\hat{Y}_5 = \bar{y} \exp \left(\frac{2(\bar{x} - \bar{X})}{\bar{x} + \bar{X}} \right) \quad (9)$$

และความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\hat{Y}_4$ และ $\hat{Y}_5$ คือ

$$MSE(\hat{Y}_4) = \lambda \bar{Y}^2 [C_y^2 + C_x^2(1 - 2K)] \quad (10)$$

$$MSE(\hat{Y}_5) = \lambda \bar{Y}^2 [C_y^2 + C_x^2(1 + 2K)] \quad (11)$$

จากนั้น Dansawad (2020) ได้พัฒนาตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh & Pal (2015) ให้อยู่ในรูปแบบของตัวประมาณอัตราส่วนร่วมกับผลคูณแบบเลขชี้กำลัง โดยใช้สารสนเทศจากตัวแปรช่วย X จำนวน 1 ตัว สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร และจากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่ Dansawad (2020) นำเสนอ กับตัวประมาณนำเสนอโดย Singh & Pal (2015) พบว่าตัวประมาณของ Dansawad (2020) มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh & Pal (2015) โดยรูปแบบและความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณของ Dansawad (2020) มีดังนี้

$$\hat{Y}_6 = \bar{y} \left[\alpha \exp\left(\frac{2(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{X} + \bar{x}}\right) + (1 - \alpha) \exp\left(\frac{2(\bar{x} - \bar{X})}{\bar{x} + \bar{X}}\right) \right] \quad (12)$$

$$MSE(\hat{Y}_6) = \lambda \bar{Y}^2 [C_y^2 + (1 - 2\alpha)C_x^2 \{(1 - 2\alpha) + 2K\}] \quad (13)$$

เมื่อ α คือค่าคงที่ใด ๆ ที่ทำให้ตัวประมาณ $\hat{Y}_6$ มีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุด

ต่อมาในปี (2021) Lurdjariyaporn & Dansawad ได้พัฒนาตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอโดย Bahl & Tuteja (1991) ขึ้นมาใหม่ โดยใช้สารสนเทศจากตัวแปรช่วย X จำนวน 1 ตัว จากการแทนค่า $\bar{y}$ ในสมการที่ (2) ด้วยตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh & Agnihotri (2008) จากสมการที่ (4) ซึ่งตัวประมาณที่นำเสนอมีรูปแบบและความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณได้แก่

$$\hat{Y}_7 = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + b}{\bar{x} + b} \right) \exp\left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}}\right) \quad (14)$$

$$MSE(\hat{Y}_7) = \lambda \bar{Y}^2 \left[C_y^2 + (1 + 2\theta) \frac{C_x^2}{4} \{(1 + 2\theta) - 4K\} \right] \quad (15)$$

ถ้าหากสังเกตความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh & Agnihotri (2008) และ Singh et al. (2009) จากสมการที่ (5) และ สมการที่ (7) ตามลำดับ จะพบว่าเป็นสมการเดียวกัน จึงทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะพัฒนาตัวประมาณดังกล่าวให้มีประสิทธิภาพที่ดียิ่งขึ้น โดยการนำเสนอกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง ที่จะมีการใช้ประโยชน์จากสารสนเทศจากตัว

แปรช่วย X จำนวน 2 ตัว ภายใต้สถานการณ์ที่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่สนใจศึกษา Y และตัวแปรช่วย X มีความสัมพันธ์เชิงบวก สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน

วัตถุประสงค์

1. นำเสนอกกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน
2. เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ กับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

วิธีการวิจัย

ในการนำเสนอกกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้สถานการณ์ที่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่สนใจศึกษา Y และตัวแปรช่วย X มีความสัมพันธ์เชิงบวก ผู้วิจัยจะพัฒนาจากตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh & Agnihotri (2008) ดังสมการที่ (4) และตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh et al. (2009) ดังสมการที่ (6) โดยใช้แนวคิดของ Rao (1991) ที่ได้มีการนำเสนอตัวประมาณถดถอยสำหรับใช้ในการประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ซึ่งจากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพกับตัวประมาณอื่น ๆ ที่นำเสนอ ณ ขณะนั้น พบว่า ตัวประมาณถดถอยที่นำเสนอโดย Rao (1991) เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพดีที่สุด มีรูปแบบและความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยดังนี้

$$\hat{Y}_g = k_1 \bar{y} + k_2 (\bar{X} - \bar{x}) \quad (16)$$

$$MSE(\hat{Y}_g) = \bar{Y}^2 \left[1 + k_1^2 \{1 + \lambda C_y^2\} + \lambda R^{-1} k_2 (k_2 R^{-1} - 2k_1 K) C_x^2 - 2k_1 \right] \quad (17)$$

เมื่อ $R = \bar{X} / \bar{Y}$ ในขณะ ที่ k_1 และ k_2 คือค่าคงที่ใด ๆ ที่ทำให้ตัวประมาณถดถอยมีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุด

โดยกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอขึ้นใหม่ จะใช้หลักการในการนำเสนอตัวประมาณคล้ายกับ Lurdjariyaporn & Dansawad (2021) กล่าวคือ จะเพิ่มพจน์หลัง $\bar{y}$ และ

$(\bar{X} - \bar{x})$ ในสมการที่ 16 $\left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x} + b}\right)$ ด้วย (จากสมการที่ α_1 และจะมีการใช้เพิ่ม (4) และ α_2 ซึ่งเป็นค่าคงที่ (0,1) ซึ่งจะกำหนดขึ้นในงานวิจัย จากนั้นจะคูณพจน์ทั้งหมดด้วย $\exp\left(\frac{a(\bar{X} - \bar{x})}{a(\bar{X} + \bar{x}) + 2b}\right)$ จากสมการที่ ดังนั้นจะได้รูปแบบของ (6)กลุ่มทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอขึ้นใหม่ดังนี้

$$\hat{Y}_N = \left[k_1 \bar{Y} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x} + b} \right)^{\alpha_1} + k_2 (\bar{X} - \bar{x}) \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x} + b} \right)^{\alpha_2} \right] \exp\left(\frac{a(\bar{X} - \bar{x})}{a(\bar{X} + \bar{x}) + 2b}\right) \quad (18)$$

ทั้งนี้ตัวประมาณ $\hat{Y}_N$ จากสมการที่ (18) จะแตกต่างจากตัวประมาณของ Dansawad (2020) จากสมการที่ (12) ในเรื่องของจำนวนการใช้สารสนเทศจากตัวแปรช่วย X

ในการศึกษาคุณสมบัติที่สำคัญของกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ เช่น ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย และความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุด จะสมมติว่าขนาดของประชากร (N) มีขนาดใหญ่มาก ๆ เมื่อเทียบกับขนาดของตัวอย่าง (n) ดังนั้นจะทำให้พจน์ $1/N$ และ $2/N$ มีขนาดเล็กมากจนไม่อาจนำมาพิจารณา ($1/N \cong 0$ และ $n/N \cong 0$) (Singh, 2003) และเพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย และความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดของกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณที่นำเสนอ ผู้วิจัยจะทำการจัดรูปแบบของกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณที่นำเสนอขึ้นใหม่ให้อยู่ในพจน์ของความคลาดเคลื่อน (Error terms) โดยกำหนดให้ $\bar{y} = \bar{Y}(1 + e_0)$ และ $\bar{x} = \bar{X}(1 + e_1)$ เมื่อ e_0 และ e_1 คือความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากตัวแปรที่สนใจศึกษา Y และตัวแปรช่วย X นั่นคือจากสมการที่ (18) $\hat{Y}_N$ จะได้รูปแบบของกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณที่นำเสนอขึ้นใหม่ที่อยู่ในพจน์ของความคลาดเคลื่อน ดังนี้

$$\hat{Y}_N = \left[k_1 \bar{Y}(1 + e_0)(1 + \theta e_1)^{-\alpha_1} - k_2 \bar{X} e_1 (1 + \theta e_1)^{-\alpha_2} \right] \exp\left(\frac{-\theta e_1 \left(1 + \frac{\theta e_1}{2}\right)^{-1}}{2}\right) \quad (19)$$

จากสมการที่ (19) ทำการกระจายพจน์ทางขวามือของสมการ ภายใต้เงื่อนไขที่พจน์ $|\theta e_1| < 1$ และจะสามารถกระจายพจน์ $(1 + \theta e_1)^{-1}$ ได้โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ ทั้งนี้พจน์ที่ยกกำลัง 3 เป็นต้นไปจะถูกละทิ้งให้ เป็นความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation Error) ซึ่งในทางทฤษฎีจะพบว่าความคลาดเคลื่อนดังกล่าวจะเข้าสู่ศูนย์ จะได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\hat{Y}_N = \left[k_1 \bar{Y} \left(1 - \alpha_1 \theta e_1 + \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)}{2} \theta^2 e_1^2 + e_0 - \alpha_1 \theta e_0 e_1 \right) - k_2 \bar{X} \left(e_1 - \alpha_2 \theta e_1^2 \right) \right] \left(1 - \frac{\theta e_1}{2} + \frac{\theta^2 e_1^2}{4} + \frac{\theta^2 e_1^2}{8} \right) \quad (20)$$

จากนั้นจะลบทั้งสองข้างของสมการที่ (20) ด้วย $\bar{Y}$ และจะใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความคลาดเคลื่อน Y ที่เกิดจากตัวแปรที่สนใจศึกษา (e_0, e_1) และตัวแปรช่วย X และค่าคาดหวังของตัวประมาณ (Expectation) จาก (Singh, 2003) มาแทนค่าของตัวแปรต่าง ๆ ดังต่อไปนี้ $E(e_0) = E(e_1) = 0$, $E(e_0^2) = \lambda C_y^2$, $E(e_1^2) = \lambda C_x^2$ และ $E(e_0 e_1) = \lambda \rho_{yx} C_y C_x$ แล้วจึงคำนวณหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณที่น่าเสนอ $\hat{Y}_N$ ดังนี้

$$MSE(\hat{Y}_N) = E(\hat{Y}_N - \bar{Y})^2$$

$$= \bar{Y}^2 \left[\begin{aligned} & (k_1 - 1)^2 + k_1^2 \lambda C_y^2 + \frac{(2\alpha_1 + 1)}{4} \lambda \theta k_1 C_x^2 (\theta [4\alpha_1 k_1 + 4k_1 - 2\alpha_1 - 3] - 4(2k_1 - 1)K) \\ & - 2\lambda k_2 R C_x^2 \left(k_1 [(1 + \alpha_2 - \alpha_1)\theta + K] - \frac{\theta}{2}(2\alpha_2 + 1) \right) + \lambda k_2^2 R^2 \end{aligned} \right] \quad (21)$$

ในการคำนวณหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดของตัวประมาณที่น่าเสนอ $\hat{Y}_N$ ผู้วิจัยจะเริ่มจากการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของสมการที่ (21) เทียบกับค่าคงที่ k_1 และ k_2 ตามลำดับดังนี้

$$\frac{\partial MSE(\hat{Y}_N)}{\partial k_1} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial MSE(\hat{Y}_N)}{\partial k_2} = 0$$

จากนั้นจะแก้สมการเพื่อหาค่า k_1 และ k_2 ซึ่งค่าดังกล่าวจะเป็นค่าคงที่ที่ต่ำที่สุด ที่ทำให้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณ $\hat{Y}_N$ มีค่าที่ต่ำที่สุด โดยที่ค่าคงที่ k_1 และ k_2 ที่ได้จากการแก้สมการจะมีค่าดังนี้

$$k_{1(opt.)} = \frac{2 - \lambda A \theta C_x^2 D}{2(1 + \lambda C_y^2 - \lambda C_x^2 (B\theta + K)^2)} \quad (22)$$

$$k_{2(opt.)} = \frac{\left[2(B\theta + K) - \theta A - \lambda A \theta \left(C_y^2 + C_x^2 [(B\theta + K)D - (B\theta + K)^2] \right) \right]}{2R(1 + \lambda C_y^2 - \lambda C_x^2 (B\theta + K)^2)} \quad (23)$$

$$\text{เมื่อ } A = (2\alpha_2 + 1), \quad B = (1 + \alpha_2 - \alpha_1), \quad D = \alpha_1 \theta + \theta - K + B\theta$$

ในการหาสมการของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดของตัวประมาณ $\hat{Y}_N$ จะหาจากการแทนค่าคงที่ k_1 และ k_2 จากสมการที่ (22) และ (23) ลงในสมการที่ (21) จะได้

$$MMSE(\hat{Y}_N) = \bar{Y}^2 \left[1 + \lambda (C_y^2 - A\theta C_x^2 D) - E^2 + H - EH - \frac{\lambda G C_x^2}{4} + \frac{\lambda G R}{4} \right] \quad (24)$$

$$\text{เมื่อ } E = [1 + \lambda C_y^2 - \lambda C_x^2 (B\theta + K)^2], \quad F = [C_y^2 + C_x^2 [(B\theta + K)D - (B\theta + K)^2]],$$

$$G = 4(B\theta + K)^2 - 4\theta A(1 + \lambda F)(B\theta + K) + \theta^2 A^2(1 + \lambda F), \quad H = (\theta\alpha_1 + \theta - 2K) \left[\lambda\theta(2\alpha_1 + 1)C_x^2 \right]$$

ผลการวิจัย

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ $\hat{Y}_N$ กับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง จะทำการเปรียบเทียบทั้งในทางทฤษฎี และการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณในทางทฤษฎี

เปรียบเทียบประสิทธิภาพของกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ $\hat{Y}_N$ กับตัวประมาณ $\bar{y}, \hat{Y}_2, \hat{Y}_1, \hat{Y}_3, \hat{Y}_4, \hat{Y}_5, \hat{Y}_7, \hat{Y}_6$ และ $\hat{Y}_8$ โดยจะพิจารณาจากความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุด นั่นคือจะพิจารณาจากสมการที่ (24) เปรียบเทียบกับสมการที่ (1) (3) (5) (7) (10) (11) (13) (15) และ (17) ตามลำดับ โดยกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอื่น ๆ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขจากสมการที่ (25) ถึง (32) ที่แสดงดังข้อ 1.1 ถึง 1.4 เป็นจริง

$$1.1) \quad MMSE(\hat{Y}_N) < MSE(\bar{y}) \quad \text{เมื่อ} \quad I > 1 \quad (25)$$

$$1.2) \quad MMSE(\hat{Y}_N) < MSE(\hat{Y}_1) \quad \text{เมื่อ} \quad I + \frac{\lambda}{4} C_x^2 (1 - 4K) > 1 \quad (26)$$

$$1.3) \quad MMSE(\hat{Y}_N) < MSE(\hat{Y}_2, \hat{Y}_3) \quad \text{เมื่อ} \quad I + \lambda(C_x^2 \theta (\theta - 2K)) > 1 \quad (27)$$

$$1.4) \quad MMSE(\hat{Y}_N) < MSE(\hat{Y}_4) \quad \text{เมื่อ} \quad I + \lambda[C_x^2 (1 - 2K)] > 1 \quad (28)$$

$$1.5) \quad MMSE(\hat{Y}_N) < MSE(\hat{Y}_5) \quad \text{เมื่อ} \quad I + \lambda[C_x^2 (1 + 2K)] > 1 \quad (29)$$

$$1.6) \quad MMSE(\hat{Y}_N) < MSE(\hat{Y}_6) \quad \text{เมื่อ} \quad I + \lambda[(1 - 2\alpha)C_x^2 \{(1 - 2\alpha) + 2K\}] > 1 \quad (30)$$

$$1.7) \quad MMSE(\hat{Y}_N) < MSE(\hat{Y}_7) \quad \text{เมื่อ} \quad I + \lambda \left[(1 + 2\theta) \frac{C_x^2}{4} \{(1 + 2\theta) - 4K\} \right] > 1 \quad (31)$$

$$1.8) \quad MMSE(\hat{Y}_N) < MSE(\hat{Y}_8) \quad \text{เมื่อ} \quad \lambda C_y^2 + \lambda k_2 R^{-1} (k_2 R^{-1} - 2k_1 K) C_x^2 + I > 1 \quad (32)$$

$$\text{เมื่อ} \quad I = \lambda A \theta D C_x^2 + E^2 - (1 - E)H + \frac{\lambda G}{4} (C_x^2 - R)$$

2. การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณจากการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

ก่อนที่จะทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ $\hat{Y}_N$ กับตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง โดยจะทำการแทนค่าฟังก์ชันหรือค่าคงที่ใด ๆ ที่สนใจศึกษา เช่น C_x , ρ_{yx} , n ลงใน a และ b ในสมการที่ (4) (6) (14) และ (18) ดังนั้นจะได้สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณจากสมการที่ (4) (6) (14) และ (18) แสดงดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณที่เกิดจากการแทนค่าฟังก์ชันหรือค่าคงที่ใด ๆ ลงใน a และ b

ลำดับที่	ตัวประมาณ	ค่าคงที่			
		α_1	α_2	a	b
สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\hat{Y}_2$					
1.	$\hat{Y}_{2(1)} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x} + C_x} \right)$ Sisodia & Dwivedi (1981)	-	-	1	C_x
2.	$\hat{Y}_{2(2)} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + \rho_{yx}}{\bar{x} + \rho_{yx}} \right)$ Singh & Tailor (2003)	-	-	1	ρ_{yx}
3.	$\hat{Y}_{2(3)} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + n}{\bar{x} + n} \right)$ Jerajuddin & Kishun (2016)	-	-	1	n
สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\hat{Y}_3$					
4.	$\hat{Y}_{3(1)} = \bar{y} \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2C_x} \right)$ Singh & Pal (2015)	-	-	1	C_x
5.	$\hat{Y}_{3(2)} = \bar{y} \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2\rho_{yx}} \right)$ Singh & Pal (2015)	-	-	1	ρ_{yx}
6.	$\hat{Y}_{3(3)} = \bar{y} \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2n} \right)$ Singh & Pal (2015)	-	-	1	n
ตารางที่ 1(ต่อ)					
ลำดับที่	ตัวประมาณ	ค่าคงที่			
		α_1	α_2	a	b
สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\hat{Y}_7$					
7.	$\hat{Y}_{7(1)} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x} + C_x} \right) \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}} \right)$ Lurdjariyaporn & Dansawad (2021)	-	-	-	C_x
8.	$\hat{Y}_{7(2)} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + \rho_{yx}}{\bar{x} + \rho_{yx}} \right) \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}} \right)$ Lurdjariyaporn & Dansawad (2021)	-	-	-	ρ_{yx}
9.	$\hat{Y}_{7(3)} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + n}{\bar{x} + n} \right) \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}} \right)$ Lurdjariyaporn & Dansawad (2021)	-	-	-	n
สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\hat{Y}_N$ ที่นำเสนอขึ้นมาใหม่					

10.	$\hat{Y}_{N(1)} = \left[k_1 \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x} + C_x} \right) + k_2 (\bar{X} - \bar{x}) \left(\frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x} + C_x} \right) \right] \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2C_x} \right)$	1	1	1	C_x
11.	$\hat{Y}_{N(2)} = \left[k_1 \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x} + C_x} \right) + k_2 (\bar{X} - \bar{x}) \right] \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2C_x} \right)$	1	0	1	C_x
12.	$\hat{Y}_{N(3)} = \left[k_1 \bar{y} + k_2 (\bar{X} - \bar{x}) \left(\frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x} + C_x} \right) \right] \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2C_x} \right)$	0	1	1	C_x
13.	$\hat{Y}_{N(4)} = \left[k_1 \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + \rho_{yx}}{\bar{x} + \rho_{yx}} \right) + k_2 (\bar{X} - \bar{x}) \left(\frac{\bar{X} + \rho_{yx}}{\bar{x} + \rho_{yx}} \right) \right] \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2\rho_{yx}} \right)$	1	1	1	ρ_{yx}
14.	$\hat{Y}_{N(5)} = \left[k_1 \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + \rho_{yx}}{\bar{x} + \rho_{yx}} \right) + k_2 (\bar{X} - \bar{x}) \right] \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2\rho_{yx}} \right)$	1	0	1	ρ_{yx}
15.	$\hat{Y}_{N(6)} = \left[k_1 \bar{y} + k_2 (\bar{X} - \bar{x}) \left(\frac{\bar{X} + \rho_{yx}}{\bar{x} + \rho_{yx}} \right) \right] \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2\rho_{yx}} \right)$	0	1	1	ρ_{yx}
16.	$\hat{Y}_{N(7)} = \left[k_1 \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + n}{\bar{x} + n} \right) + k_2 (\bar{X} - \bar{x}) \left(\frac{\bar{X} + n}{\bar{x} + n} \right) \right] \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2n} \right)$	1	1	1	n
17.	$\hat{Y}_{N(8)} = \left[k_1 \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + n}{\bar{x} + n} \right) + k_2 (\bar{X} - \bar{x}) \right] \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2n} \right)$	1	0	1	n
18.	$\hat{Y}_{N(9)} = \left[k_1 \bar{y} + k_2 (\bar{X} - \bar{x}) \left(\frac{\bar{X} + n}{\bar{x} + n} \right) \right] \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2n} \right)$	0	1	1	n

โดยจะใช้ค่าจริงจากข้อมูลจำนวน ชุด 2 ดังนี้ ข้อมูลชุดที่ 1 เก็บรวบรวมโดย Yadev et al. (2021) และข้อมูลชุดที่ 2 เก็บรวบรวมโดย Mukhopadhyay (2009) แทนลงไปในตัวแปรต่าง ๆ ของพจน์ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณแต่ละตัว ดังสมการที่ (1) (3) (5) (7) (10) (11) (13) (15) (17) และ (24) จากนั้นจะทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณแต่ละตัว เทียบกับตัวประมาณ โดยจะพิจารณาจากค่า PRE (Percent Relative Efficiency) ซึ่งคำนวณจากสมการที่ (33) ดังนี้

$$PRE(\phi, \bar{y}) = \frac{MSE(\bar{y})}{MSE(\phi)} \times 100 \quad (33)$$

เมื่อ $\phi = \hat{Y}_1$ หรือ $\hat{Y}_{20}$ หรือ $\hat{Y}_{3(.)}$ หรือ $\hat{Y}_4$ หรือ $\hat{Y}_5$ หรือ $\hat{Y}_6$ หรือ $\hat{Y}_{7(.)}$ หรือ $\hat{Y}_{N(.)}$

รายละเอียดของข้อมูลและผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพแสดงในตารางที่ ตามลำดับ 3 และ ตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ลักษณะประชากรของข้อมูลที่เก็บรวบรวมโดย Yadev et al. (2021) และ Mukhopadhyay (2009)

รายละเอียดประชากรของข้อมูล	พารามิเตอร์						
	N	n	$\bar{Y}$	$\bar{X}$	C_y	C_x	ρ_{yx}
ข้อมูลชุดที่ 1	80	20	51.8264	11.2646	0.3542	0.7507	0.9413
ข้อมูลชุดที่ 2	40	8	50.7858	2.3033	0.3295	0.8406	0.8006

ตารางที่ 3 ค่า PRE ของตัวประมาณภายใต้ประชากรที่ศึกษาจากข้อมูลชุดที่ 1 และ ชุดที่ 2

ตัวประมาณ	ข้อมูลชุดที่ 1	ข้อมูลชุดที่ 2
	PRE	PRE
$\bar{y}$	100.0000	100.0000
$\hat{y}_1$	100.1540	100.1116
$\hat{y}_{2(1)}, \hat{y}_{3(1)}$	103.0877	100.4964
$\hat{y}_{2(2)}, \hat{y}_{3(2)}$	105.7433	103.6750
$\hat{y}_{2(3)}, \hat{y}_{3(3)}$	106.7379	104.5753
$\hat{y}_4$	106.5810	104.2373
$\hat{y}_5$	10.5463	22.4671
$\hat{y}_6$	109.4213	108.6188
$\hat{y}_{7(1)}$	107.8622	105.4235
$\hat{y}_{7(2)}$	107.9388	106.3730
$\hat{y}_{7(3)}$	108.2037	106.5932
$\hat{y}_8$	115.0949	106.8279
$\hat{y}_{N(1)}$	121.8268	109.4026
$\hat{y}_{N(2)}$	124.8693	111.2455

ตารางที่ 3 (ต่อ)

ตัวประมาณ	ข้อมูลชุดที่ 1	ข้อมูลชุดที่ 2
	PRE	PRE
$\hat{y}_{N(3)}$	126.0615	113.7444
$\hat{y}_{N(4)}$	126.5537	115.8209
$\hat{y}_{N(5)}$	132.4520	117.3877
$\hat{y}_{N(6)}$	135.9500	118.9055
$\hat{y}_{N(7)}$	146.6823	131.6419
$\hat{y}_{N(8)}$	148.8617	134.0468
$\hat{y}_{N(9)}$	156.7241	138.4360

อภิปรายผลการวิจัย

จากตารางที่ 4 เมื่อพิจารณาภายใต้ข้อมูลที่ทำการศึกษาคู่เดียวกัน พบว่า ค่า PRE ของตัวประมาณแต่ละตัว มีค่าที่ค่อนข้างใกล้เคียงกัน โดยตัวประมาณ $\hat{y}_{N(9)}$ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งในสมาชิกของตัว

ประมาณ $\hat{Y}_N$ ที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ มีการนำเสนอเสนอแนะจากตัวแปรช่วย X ซึ่งได้แก่ ขนาดตัวอย่าง (n) มาใช้ในการเพิ่มประสิทธิภาพของตัวประมาณ เป็นตัวประมาณที่มีค่า PRE สูงที่สุด จึงกล่าวได้ว่า ตัวประมาณ $\hat{Y}_{N(9)}$ เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอื่น ๆ ที่ทำการศึกษากายใต้ข้อมูลชุดเดียวกัน และเมื่อพิจารณาจากข้อมูลชุดที่ พบว่า นอกจาก 2 และ ชุดที่ 1 ตัวประมาณ $\hat{Y}_{N(9)}$ แล้ว ตัวประมาณ $\hat{Y}_{N(8)}$ และ $\hat{Y}_{N(7)}$ ที่มีการใช้ขนาดตัวอย่าง (n) มาเพิ่มประสิทธิภาพของตัวประมาณ เช่นเดียวกันกับตัวประมาณ $\hat{Y}_{N(9)}$ จะมีค่า PRE ที่สูงค่อนข้างจะใกล้เคียงกับค่า PRE ของตัวประมาณ $\hat{Y}_{N(9)}$ โดยตัวประมาณ $\hat{Y}_{N(8)}$ จะมีค่า PRE สูงกว่าตัวประมาณ $\hat{Y}_{N(7)}$ นั่นคือ นอกจากตัวประมาณ $\hat{Y}_{N(9)}$ แล้ว ตัวประมาณ $\hat{Y}_{N(8)}$ และ $\hat{Y}_{N(7)}$ จะเป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพรองลงมาตามลำดับ สำหรับการประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้สถานการณ์ที่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่สนใจศึกษา Y และตัวแปรช่วย X มีความสัมพันธ์เชิงบวก ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Jerajuddin & Kishun (2016) Subramani(2016) Gupta & Yadav (2018) และ Baghel & Yadav (2020)

สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยฉบับนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอกลุ่มทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร โดยพัฒนาจากตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh & Agnihotri (2008) และ Singh et al. (2009) โดยใช้แนวคิดของ Rao (1991) ภายใต้สถานการณ์ที่ตัวแปรที่สนใจศึกษา Y และตัวแปรช่วย X มีความสัมพันธ์เชิงบวก โดยตัวประมาณที่นำเสนอจะมีความครอบคลุมตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh & Pal (2015) Singh & Agnihotri (2008) Singh et al. (2009) Sisodia & Dwivedi (1981) Singh & Tailor (2003) Jerajuddin & Kishun (2016) และ Lurdjariyaporn & Dansawad (2021) นอกจากนี้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณในเชิงทฤษฎี พบว่า ตัวประมาณนำเสนอขึ้นมาใหม่จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอื่น ๆ ที่ได้ทำการศึกษา เมื่อเงื่อนไขจากสมการที่ (25) ถึงสมการที่ (32) เป็นจริง สำหรับผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณจากการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง เมื่อพิจารณาจากข้อมูลทั้ง พบว่า 4 ชุด แสดงดังตารางที่ 2 สมาชิกของตัวประมาณ $\hat{Y}_N$ ที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ ซึ่งได้แก่ ตัวประมาณ $\hat{Y}_{N(9)}$ มีค่า PRE ที่สูงกว่าตัวประมาณอื่น ๆ ภายใต้การศึกษากายใต้ข้อมูลชุดเดียวกัน ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ตัวประมาณ $\hat{Y}_{N(9)}$ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งในสมาชิกของตัวประมาณ $\hat{Y}_N$ ที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh & Pal (2015) Singh & Agnihotri (2008) Singh et al. (2009) Sisodia & Dwivedi (1981) Singh & Tailor (2003) Jerajuddin & Kishun (2016) และ Lurdjariyaporn & Dansawad (2021) ทั้งในทางทฤษฎีและการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง และจะยังคงมีประสิทธิภาพมากเพียงพอที่จะนำไปใช้ได้ต่อไป ในกรณีที่มีการศึกษากายใต้สถานการณ์เดียวกันกับงานวิจัยฉบับนี้

เอกสารอ้างอิง

- Ahmed, S., Arslan, M., Khan, A., & Shabbir, J. (2019). A generalized exponential-type estimator for population mean using auxiliary attributes. *PLOS ONE*, 16(5), 1-29.
- Baghel, S., & Yadav, S. K. (2020). Restructured class of estimators for population mean using an auxiliary variable under simple random sampling scheme. *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, 16(1), 61-75.
- Bahl, S., & Tuteja, R. K. (1991). Ratio and product type estimator. *Information and Optimization Sciences*, 12, 159-163.
- Dansawad, N. (2020). Ratio-cum-product type of exponential estimator for the population mean in simple random sampling using the information of auxiliary variable. *Burapha Science Journal*, 25(2), 563-577.
- Grover, L. K., Kaur, P., & Vishawkarma, G. K. (2012). Product type exponential estimators of population mean under linear transformation of auxiliary variable in simple random sampling. *Applied Mathematics and Computation*, 219, 1937-1946.
- Gupta, R. K., & Yadav, S. K. (2018). Improved estimation of population mean using information on size of the sample. *American Journal of Mathematics and Statistics*, 8(2), 27-35.
- Jerajuddin, M., & Kishun, J. (2016). Modified ratio estimators for population mean using size of the sample, selected from population. *International Journal of Scientific Research in Science, Engineering and Technology*, 2, 10-16.
- Lurdjariyaporn, P., & Dansawad, N. (2021). A general ratio type of exponential estimator for estimating the population mean under simple random sampling using the information of auxiliary variable. *Journal of Research and Innovation in Science and Technology*, 2(2), 1-15.
- Mukhopadhyay, P. (2009). *Theory and Methods of Survey Sampling*. (2nd edition). New Delhi: Prentice Hall of India.
- Rao, T. J. (1991). On certain methods of improving ratio and regression estimators. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 20(10), 3325-3340.
- Singh, H. P., & Agnihotri, N. (2008). A general procedure of estimating population mean using auxiliary information in sample surveys. *Statistics in Transition- new series*, 9, 71-87.

- Singh, H. P., & Pal, S. K. (2015). A new chain ratio-ratio-type exponential estimator using auxiliary information in sample surveys. *International Journal of Mathematics and its applications*, 3(4-B), 37-46.
- Singh, H. P., & Tailor, R. (2003). Use of known correlation coefficient in estimating the finite population mean. *Statistics in Transition*, 6, 555-560.
- Singh, R., Chauhan, P., Sawan, N., & Smarandache F. (2009). Improvement in estimating the population mean using exponential estimator in simple random sampling. *Bulletin of Statistics and Economics*, 3(13), 13-18.
- Singh, S. (2003). *Advanced Sampling Theory with Applications: How Michael "selected" Amy Volume I* (1st edition). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Sisodia, B. V. S., & Dwivedi, V. K. (1981). A modified ratio estimator using coefficient of variation of auxiliary variable. *Journal of Indian Society Agricultural Statistics*, 33, 13-18.
- Subramani, J. (2016). A modified approach in linear regression estimator in simple random sampling. *Journal of Advance Research in Applied Mathematics and Statistics*, 1(2), 1-7.
- Vadav, R., Upadhyaya, L. N., Housila, P. S., & Chatterjee, S. (2012). Almost unbiased ratio and product type exponential estimator. *Statistics in Transition-new series*, 13(3), 537-550.
- Yadev, D. K., Kumar, S., & Misra, T. (2021). Utilizing sample size information for improved estimation of population mean in agriculture surveys. *International Journal of Current Microbiology and Applied Sciences*, 10(2), 809-815.