

รูปแบบใหม่ของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับค่าเฉลี่ยประชากร

New Closed-Form of Ratio Type Exponential Estimator for Population Mean

ภัททิศา เลิศจริยพร¹ และณภัทณ์จันทร์ ด่านสวัสดิ์^{2*}

¹ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยหัวเฉียวเฉลิมพระเกียรติ

^{2*} คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

*ผู้นิพนธ์หลัก (Corresponding Author) E-mail: napattchan@hotmail.com

Received: October 5, 2021

Revised: November 30, 2021

Accepted: December 4, 2021

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอรูปแบบใหม่ของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร โดยพัฒนามาจากรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง ที่นำเสนอโดย Singh & Pal (2015) และ Singh et al. (2016) ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน พร้อมทั้งจะศึกษาถึงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย และค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดของรูปแบบใหม่ของตัวประมาณที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ และทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของรูปแบบใหม่ของตัวประมาณที่นำเสนอขึ้นมาใหม่กับตัวประมาณอัตราส่วนตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง โดยใช้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยและค่าร้อยละประสิทธิภาพสัมพัทธ์เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ ผลการศึกษาพบว่า รูปแบบใหม่ของตัวประมาณที่นำเสนอขึ้นมาใหม่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอัตราส่วนตัวอื่น ๆ

คำสำคัญ: ตัวประมาณอัตราส่วน, ค่าเฉลี่ยประชากร, การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย, ตัวแปรช่วย

Abstract

This paper aims to propose the new closed-form of ratio type exponential estimator for estimating population mean by developing the generalized chain ratio-ratio-type exponential estimator that proposed by Singh & Pal (2015) and Singh et al. (2016) under Simple Random Sampling Without Replacement (SRSWOR) scheme. In addition, the

authors also have studied Mean Squared Error (MSE) and Minimum Mean Squared Error (MMSE) of new closed-form estimator. The new closed-form estimator is compared with the existing ratio estimators under MSE and Percent of Relative Efficiencies (PRE) criterions. The results of this paper shows that the proposed estimator performs better when compared to existing ratio estimators.

Keywords: Ratio Estimators, Population Mean, Simple Random Sampling, Auxiliary Variable

บทนำ

นักวิจัยหลายท่านนิยมนำข้อมูลจากตัวแปรช่วย (Auxiliary Variable: x) เช่น ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (Coefficient of Variation: C_x) ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient: ρ_{yx}) ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ (Coefficient of Skewness: $\beta_{1(x)}$) และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง (Coefficient of Kurtosis: $\beta_{2(x)}$) มาใช้ในการเพิ่มประสิทธิภาพของตัวประมาณ (Estimator) ที่สร้างขึ้น สำหรับประมาณค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ (Parameter Estimation) ที่สนใจศึกษาของประชากร เช่น การสร้างตัวประมาณสำหรับประมาณค่าเฉลี่ย ค่าสัดส่วน หรือค่าความแปรปรวน เป็นต้น โดยประสิทธิภาพที่เพิ่มขึ้นของตัวประมาณนั้นจะขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่สนใจศึกษา (Study Variable: y) กับตัวแปรช่วย x กล่าวคือ ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน ถ้าตัวแปรช่วย x มีความสัมพันธ์ทางบวก (Positively Correlation) กับตัวแปรที่สนใจศึกษา y ตัวประมาณอัตราส่วน (Ratio Estimator) จะมีประสิทธิภาพและมีความเหมาะสมมากกว่าตัวประมาณในรูปแบบอื่น ๆ ซึ่ง Cochran (1940) เป็นนักวิจัยคนแรกที่ได้นำเสนอตัวประมาณในรูปแบบนี้ นอกจาก Cochran (1940) แล้ว ยังมีนักวิจัยอีกหลายคนที่น่าสนใจนำเสนอประมาณอัตราส่วน เช่น Kadilar and Cingi (2004) ได้นำเสนอตัวประมาณอัตราส่วนของค่าเฉลี่ยประชากรในรูปแบบเชิงเส้น Khoshnevisan et al. (2007) ได้ใช้ข้อมูลจากตัวแปรช่วย x ที่ทราบค่า มาสร้างรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วน สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ซึ่งรูปแบบดังกล่าวมีความครอบคลุมถึงตัวประมาณอื่น ๆ ในลักษณะเดียวกันที่นักวิจัยหลายท่านได้นำเสนอในขณะนั้น ต่อมา Singh & Agnihotri (2008) ได้พัฒนาตัวประมาณที่นำเสนอโดย Khoshnevisan et al. (2007) โดยการลดจำนวนข้อมูลจากตัวแปรช่วย x ลง เพื่อให้ตัวประมาณอัตราส่วนที่นำเสนอสะดวกต่อการนำไปใช้งานสำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ในขณะที่ Koyuncu and Kadilar (2009) ได้นำเสนอตัวประมาณอัตราส่วนตัวใหม่ สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร จากการใช้ค่าคงที่ (Constant) มาคูณกับตัวประมาณที่นำเสนอโดย Khoshnevisan et al. (2007) หลังจากนั้น Singh & Pal (2015) ได้นำเสนอรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับค่าเฉลี่ยประชากร ซึ่งตัวประมาณดังกล่าวนี้สามารถลด

รูปไปเป็นตัวประมาณตัวอื่น ๆ อีกมากมายในรูปแบบเลขชี้กำลัง เช่น ตัวประมาณที่นำเสนอโดย Bahl & Tuteja (1991) Singh et al. (2008) และ Singh et al. (2009) เป็นต้น ต่อมา Singh et al. (2016) ได้เสนอรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณ สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร เพื่อให้สะดวกต่อการนำไปใช้ในกรณีที่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรช่วย x และตัวแปรที่สนใจศึกษา y เป็นไปได้ทั้งทางบวกและลบ โดยรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณที่นำเสนอนี้เกิดจากการรวมกันของตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh & Agnihotri (2008) จำนวน 2 ตัว จากนั้นในปี 2020 Dansawad ได้พัฒนาตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh & Pal (2015) โดยตัวประมาณใหม่ที่นำเสนอจะอยู่ในรูปแบบของตัวประมาณอัตราส่วนร่วมกับผลคูณแบบเลขชี้กำลัง โดยใช้ข้อมูลจากตัวแปรช่วย x จำนวน 1 ตัว สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร และในปีถัดไป Lurdjariyaporn & Dansawad (2021) ได้นำเสนอตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ซึ่งตัวประมาณตัวใหม่นี้เกิดจากการคูณกันระหว่างตัวประมาณที่นำเสนอโดย Bahl & Tuteja (1991) และ Singh & Agnihotri (2008) ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน โดยใช้ข้อมูลจากตัวแปรช่วย x ที่ทราบค่า

จากตัวประมาณอัตราส่วนต่าง ๆ ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ในงานวิจัยฉบับนี้ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะปรับปรุงประสิทธิภาพของรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh & Pal (2015) และ Singh et al. (2016) สำหรับการประมาณค่าเฉลี่ยของประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน

วิธีการวิจัย

ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน Singh & Pal (2015) ได้นำเสนอรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับการประมาณค่าเฉลี่ยของประชากร โดยรูปแบบและค่า MSE ของตัวประมาณที่นำเสนอมีดังต่อไปนี้

$$\bar{y}_1 = \bar{y} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x} + b} \right) \exp \left(\frac{a(\bar{X} - \bar{x})}{a(\bar{X} + \bar{x}) + 2b} \right) \quad (1)$$

$$MSE(\bar{y}_1) = \lambda \bar{Y}^2 \left[C_y^2 + \frac{9\theta^2 C_x^2}{4} - 3\theta \rho_{yx} C_y C_x \right] \quad (2)$$

$$\text{โดยที่ } \lambda = \frac{(1-f)}{n}, \quad f = \frac{n}{N}, \quad C_y^2 = \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2}, \quad S_y^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 / (N-1), \quad C_x^2 = \frac{S_x^2}{\bar{X}^2},$$

$$S_x^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2 / (N-1), \quad \theta = \frac{a\bar{X}}{a\bar{X} + b}$$

เมื่อ a และ b คือค่าคงที่ หรือฟังก์ชันใด ๆ จากตัวแปรช่วย x ที่สนใจศึกษา และถ้าผู้วิจัยจะแทนค่าคงที่ หรือฟังก์ชันใด ๆ จากตัวแปรช่วย x เช่น C_x , ρ_{yx} , $\beta_2(x)$, M_d และ n ลงในสมการที่ (1) จะได้สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\bar{y}_1$ แสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\bar{y}_1$ ที่ถูกนำเสนอโดย Singh & Pal (2015)

ลำดับที่	ตัวประมาณ	ค่าคงที่ / ฟังก์ชัน	
		a	b
1	$\bar{y}_{1(1)} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x} + C_x} \right) \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2C_x} \right)$	1	C_x
2	$\bar{y}_{1(2)} = \bar{y} \left(\frac{C_x \bar{X} + \rho_{yx}}{C_x \bar{x} + \rho_{yx}} \right) \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2\rho_{yx}} \right)$	1	ρ_{yx}
3	$\bar{y}_{1(3)} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + \beta_2(x)}{\bar{x} + \beta_2(x)} \right) \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2\beta_2(x)} \right)$	1	$\beta_2(x)$
4	$\bar{y}_{1(4)} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + M_d}{\bar{x} + M_d} \right) \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2M_d} \right)$	1	M_d
5	$\bar{y}_{1(5)} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + n}{\bar{x} + n} \right) \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2n} \right)$	1	n

Singh et al. ((2016 ได้นำเสนอรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณ สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน โดยรูปแบบและค่า MSE ของตัวประมาณที่นำเสนอมีดังต่อไปนี้

$$\bar{y}_2 = \bar{y} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x} + b} \right)^{2g-1} \quad (3)$$

$$MSE(\bar{y}_2) = \lambda \bar{Y}^2 \left[C_y^2 + (2g-1)\theta C_x^2 \{ (2g-1)\theta - 2K \} \right] \quad (4)$$

เมื่อ g คือคือฟังก์ชันหรือค่าคงที่ใด ๆ ที่สนใจศึกษา ในขณะที่ $K = \frac{\rho_{yx} C_y}{C_x}$

จากตัวประมาณ $\bar{y}_1$ ที่นำเสนอโดย Singh & Pal (2015) ซึ่งแสดงดังสมการที่ (1) ผู้จะทำการแทนค่าพจน์ $\bar{y} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x} + b} \right)$ ด้วยตัวประมาณ $\bar{y}_2$ ที่นำเสนอโดย Singh et al. ((2016 จากสมการที่ (3) ทั้งนี้จะมีการคูณพจน์ดังกล่าวด้วยค่าคงที่ k ที่จะทำให้ค่า MSE ของรูปแบบใหม่ของตัวประมาณที่นำเสนอมีค่าที่ต่ำที่สุด ดังนั้นรูปแบบใหม่ของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ สำหรับค่าเฉลี่ยประชากร

มีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\bar{y}_\eta = k\bar{y} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x} + b} \right)^{2g-1} \exp \left(\frac{a(\bar{X} - \bar{x})}{a(\bar{X} + \bar{x}) + 2b} \right) \quad (5)$$

เมื่อ k คือค่าคงที่ใด ๆ ที่ทำให้ค่า MSE ของตัวประมาณ $\bar{y}_\eta$ มีค่าที่ต่ำที่สุด

เนื่องจาก $\bar{y}$ และ $\bar{x}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\bar{Y}$ และ $\bar{X}$ ดังนั้นในการหาค่า MSE ของตัวประมาณ $\bar{y}_\eta$ ผู้วิจัยจึงต้องทำการแปลงรูปแบบของตัวประมาณ $\bar{y}_\eta$ ให้อยู่ในพจน์ของค่าคลาดเคลื่อน (Error terms) โดยกำหนดให้ $\bar{y} = \bar{Y}(1+e_0)$ และ $\bar{x} = \bar{X}(1+e_1)$ จะทำให้ $E(e_0) = E(e_1) = 0$, $E(e_0^2) = \lambda C_y^2$, $E(e_1^2) = \lambda C_x^2$ และ $E(e_0e_1) = \lambda \rho_{yx} C_y C_x$

จัดรูปแบบของสมการที่ (5) ให้อยู่ในพจน์ของค่าคลาดเคลื่อน โดยการแทนค่า $\bar{y}$ ด้วย $\bar{Y}(1+e_0)$ และจะแทนค่า $\bar{x}$ ด้วย $\bar{X}(1+e_1)$ จะได้

$$\begin{aligned} \bar{y}_\eta &= k\bar{Y}(1+e_0) \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}(1+e_1) + b} \right)^{2g-1} \exp \left(\frac{a(\bar{X} - \bar{X}(1+e_1))}{a(\bar{X} + \bar{X}(1+e_1)) + 2b} \right) \\ &= k\bar{Y}(1+e_0)(1+\theta e_1)^{1-2g} \exp \left(\left(-\frac{\theta e_1}{2} \right) \left(1 + \frac{\theta e_1}{2} \right)^{-1} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

จากนั้นกระจายสมการที่ (6) โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ และพจน์ที่ยกกำลัง 3 เป็นต้นไป จะถูกกำหนดให้เป็นค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation Error) ซึ่งในทางทฤษฎีค่าคลาดเคลื่อนดังกล่าวจะเข้าสู่ศูนย์ ดังนั้นจะได้

$$\bar{y}_\eta = k\bar{Y} \left[1 - \frac{\theta e_1}{2} + \frac{3\theta^2 e_1^2}{8} + (1-2g)\theta e_1 - (1-2g)\frac{\theta^2 e_1^2}{2} - (1-2g)g\theta^2 e_1^2 + e_0 - \frac{\theta e_0 e_1}{2} + (1-2g)\theta e_0 e_1 \right] \quad (7)$$

จากสมการที่ (7) สามารถหาค่า MSE ของตัวประมาณ $\bar{y}_\eta$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} MSE(\bar{y}_\eta) &= E(\bar{y}_\eta - \bar{Y})^2 \\ &= E \left(k\bar{Y} \left[\begin{aligned} &1 - \frac{\theta e_1}{2} + \frac{3\theta^2 e_1^2}{8} + (1-2g)\theta e_1 - (1-2g)\frac{\theta^2 e_1^2}{2} \\ &- (1-2g)g\theta^2 e_1^2 + e_0 - \frac{\theta e_0 e_1}{2} + (1-2g)\theta e_0 e_1 \end{aligned} \right] - \bar{Y} \right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

แทนค่า $E(e_0) = E(e_1) = 0$, $E(e_0^2) = \lambda C_y^2$, $E(e_1^2) = \lambda C_x^2$, และ $E(e_0 e_1) = \lambda \rho_{yx} C_y C_x$ ลงในสมการ (8) และจัดรูปสมการใหม่อีกครั้ง จะได้ค่า MSE ของตัวประมาณ $\bar{y}_\eta$ คือ

$$MSE(\bar{y}_\eta) = \bar{Y}^2 \left(k^2 \lambda C_y^2 + \frac{1}{4} (4g-1) k \theta^2 \lambda C_x^2 [8gk - (4g+1)] \right. \\ \left. - (4g-1) k \theta \lambda \rho_{yx} C_y C_x [2k-1] + (k-1)^2 \right) \quad (9)$$

ในการหา MSE ของตัวประมาณ $\bar{y}_\eta$ ที่มีค่าต่ำที่สุด จะหาจากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $MSE(\bar{y}_\eta)$ เทียบกับค่า k และให้เท่ากับ 0 จะได้

$$\frac{\partial MSE(\bar{y}_\eta)}{\partial k} = 2k - 2 + 2k \lambda C_y^2 + \theta^2 \lambda C_x^2 \left[16kg^2 - 4kg + \frac{1}{4} - 4g^2 \right] - \theta \lambda \rho_{yx} C_y C_x [16kg - 4k - 4g + 1] = 0 \quad (10)$$

แก้สมการหาค่า k จากสมการที่ (10) จะได้

$$k = \frac{(4g-1)\theta \lambda C_x^2 \left(\frac{1}{4} \theta [4g+1] - K \right) + 2}{2 \left[\lambda C_y^2 + 2(4g-1)\theta \lambda C_x^2 (g\theta - K) + 1 \right]} = \frac{A}{2B} = k_{opt} \quad (11)$$

แทนค่า k_{opt} จากสมการ (11) ลงในสมการ (9) และจัดรูปสมการใหม่อีกครั้งจะได้ค่า MMSE ของตัวประมาณ $\bar{y}_\eta$ ได้แก่

$$MMSE(\bar{y}_\eta) = \bar{Y}^2 \left(1 - \frac{A^2}{4B} \right) \quad (12)$$

ถ้าผู้วิจัยจะแทนค่าคงที่ หรือฟังก์ชันใด ๆ จากตัวแปรช่วย x เช่น C_x , ρ_{yx} , $\beta_2(x)$, M_d และ n ลงในสมการที่ (5) จะได้สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\bar{y}_\eta$ แสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2 สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\bar{y}_\eta$

ลำดับที่	ตัวประมาณ	ค่าคงที่ / ฟังก์ชัน		
		a	b	g
1	$\bar{y}_{\eta(1)} = k\bar{y} \left(\frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x} + C_x} \right) \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2C_x} \right)$	1	C_x	1

2	$\bar{y}_{\eta(2)} = k\bar{y} \left(\frac{C_x \bar{X} + \rho_{yx}}{C_x \bar{x} + \rho_{yx}} \right) \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2\rho_{yx}} \right)$	1	ρ_{yx}	1
3	$\bar{y}_{\eta(3)} = k\bar{y} \left(\frac{\bar{X} + \beta_2(x)}{\bar{x} + \beta_2(x)} \right) \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2\beta_2(x)} \right)$	1	$\beta_2(x)$	1
4	$\bar{y}_{\eta(4)} = k\bar{y} \left(\frac{\bar{X} + M_d}{\bar{x} + M_d} \right) \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2M_d} \right)$	1	M_d	1
5	$\bar{y}_{\eta(5)} = k\bar{y} \left(\frac{\bar{X} + n}{\bar{x} + n} \right) \exp \left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2n} \right)$	1	n	1

ผลและอภิปรายผลการวิจัย

1. การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณเชิงทฤษฎี

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างรูปแบบใหม่ของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ และตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง จะพิจารณาภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

- สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ $\bar{y}_{\eta(i)}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_{1(i)}$ ที่นำเสนอโดย Singh & Pal (2015) ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$MMSE(\bar{y}_{\eta(i)}) < MSE(\bar{y}_{1(i)}); i = 1, 2, \dots, 5$$

$$\left(1 - \frac{C^2}{4D} \right) < \lambda \left[C_y^2 + \frac{9\theta_i^2 C_x^2}{4} - 3\theta_i \rho_{yx} C_y C_x \right] \quad (13)$$

เมื่อ

$$C = (4g - 1)\theta_i \lambda C_x^2 \left(\frac{1}{4} \theta_i [4g + 1] - K \right) + 1 \text{ และ } D = \left[\lambda C_y^2 + 2(4g - 1)\theta_i \lambda C_x^2 (g\theta_i - K) + 1 \right]$$

- รูปแบบใหม่ของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ $\bar{y}_{\eta}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_{1(i)}$ ที่นำเสนอโดย Singh & Pal (2015) ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$MMSE(\bar{y}_{\eta}) < MSE(\bar{y}_{1(i)}); i = 1, 2, \dots, 5$$

$$\left(1 - \frac{A^2}{4B} \right) < \lambda \left[C_y^2 + \frac{9\theta^2 C_x^2}{4} - 3\theta \rho_{yx} C_y C_x \right] \quad (14)$$

2. การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณจากการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของรูปแบบใหม่ของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ $\bar{y}_{\eta}$ กับตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยจะใช้ข้อมูลจริงจากงานวิจัยของ Subramani &

Kumarapandiyan (2013) ซึ่งข้อมูลดังกล่าวเป็นข้อมูลเกี่ยวกับปริมาณขยะในแต่ละเมืองของประเทศอิตาลี (หน่วย: ตัน) ในปี ค.ศ. 2003 โดยกำหนดให้ปริมาณขยะที่ถูกลำไปรีไซเคิล (หน่วย: ตัน) เป็นตัวแปรที่สนใจศึกษา y และจำนวนผู้อาศัยในแต่ละเมือง (หน่วย: คน) เป็นตัวแปรช่วย x รายละเอียดต่าง ๆ ของข้อมูลแสดงดังนี้

$$N = 103, n = 40, \bar{Y} = 626.2123, \bar{X} = 557.1909, C_y = 1.4588, C_x = 1.4683,$$

$$\rho_{yx} = 0.9936, \beta_2(x) = 37.3216, M_d = 308.0500$$

โดยผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณภายใต้การพิจารณาจากค่า MSE แสดงดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ค่า MSE ของตัวประมาณภายใต้การศึกษาจากข้อมูลจริงจากงานวิจัยของ Subramani & Kumarapandiyan (2013)

สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\bar{y}_1$		สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\bar{y}_\eta$	
ตัวประมาณ	MSE	ตัวประมาณ	MSE
$\bar{y}_{1(1)}$	845.7383	$\bar{y}_{\eta(1)}$	58.5246
$\bar{y}_{1(2)}$	832.0935	$\bar{y}_{\eta(2)}$	49.5118
$\bar{y}_{1(3)}$	872.8136	$\bar{y}_{\eta(3)}$	65.4947
$\bar{y}_{1(4)}$	823.3187	$\bar{y}_{\eta(4)}$	37.0724
$\bar{y}_{1(5)}$	782.8092	$\bar{y}_{\eta(5)}$	30.1379

จากตารางที่ 3 เมื่อเปรียบเทียบค่า MSE ระหว่างกลุ่มของสมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\bar{y}_1$ และ $\bar{y}_\eta$ จะพบว่า ค่า MSE ของกลุ่มของสมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\bar{y}_\eta$ จะมีค่าน้อยกว่าค่า MSE ของกลุ่มของสมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\bar{y}_1$ และเมื่อเปรียบเทียบกับสมาชิกในกลุ่มของตัวประมาณเดียวกัน จะพบว่า ตัวประมาณ $\bar{y}_{1(5)}$ และ $\bar{y}_{\eta(5)}$ เป็นตัวประมาณที่มีค่า MSE ที่ต่ำที่สุด ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ตัวประมาณ $\bar{y}_{1(5)}$ และ $\bar{y}_{\eta(5)}$ ที่เกิดจากการใช้ขนาดตัวอย่าง (n) มาใช้ในการสร้างตัวประมาณจะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณตัวอื่น ๆ ภายใต้ข้อมูลจริงจากงานวิจัยของ Subramani & Kumarapandiyan (2013) ในขณะที่เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบค่า MSE ระหว่างตัวประมาณ $\bar{y}_{1(5)}$ และ $\bar{y}_{\eta(5)}$ จะพบว่า ตัวประมาณ $\bar{y}_{\eta(5)}$ มีค่า MSE ที่น้อยกว่าค่า MSE ของตัวประมาณ $\bar{y}_{1(5)}$ ดังนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่า ตัวประมาณ $\bar{y}_{\eta(5)}$ เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพดีที่สุด เนื่องจากมีค่า MSE ที่ต่ำที่สุด ภายใต้สถานการณ์ที่ค่า ρ_{yx} มีค่าเป็นบวก

สรุปผลการวิจัย

จากการนำเสนอรูปแบบใหม่ของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน โดยพัฒนามาจากตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh & Pal (2015) และ Singh et al. (2016) ผลการศึกษาพบว่า ถ้าหากนำค่าคงที่ k มาใช้ในการปรับปรุงประสิทธิภาพของตัวประมาณที่สนใจศึกษา จะพบว่า ค่าคงที่ k ดังกล่าวนั้นจะส่งผลทำให้ตัวประมาณที่สนใจมีค่า MSE ที่ต่ำกว่าของเดิม ภายใต้เงื่อนไขการหาค่าคงที่ k จากอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง และเมื่อพิจารณาผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณภายใต้การพิจารณาจากค่า MSE ที่แสดงดังตารางที่ 3 พบว่า สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ ซึ่งได้แก่ ตัวประมาณ $\bar{y}_{\eta(5)}$ มีประสิทธิภาพดีที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่ทำการศึกษา เนื่องจาก ตัวประมาณ $\bar{y}_{\eta(5)}$ มีค่า MSE ที่ต่ำที่สุด อีกทั้งในภาพรวมค่า MSE ของกลุ่มของสมาชิกบางส่วน ของตัวประมาณ $\bar{y}_{\eta}$ ยังคงมีค่าที่ต่ำกว่าค่า MSE ของกลุ่มของสมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\bar{y}_1$ ที่นำเสนอโดย Singh & Pal (2015) ดังนั้น ภายใต้สถานการณ์เดียวกัน รูปแบบใหม่ของตัวประมาณ อัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับค่าเฉลี่ยประชากรจะยังคงมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอื่น ๆ และมี ประสิทธิภาพมากเพียงพอที่จะนำไปใช้ได้ต่อไป ในกรณีที่มีการศึกษาภายใต้สถานการณ์เดียวกันกับ งานวิจัยฉบับนี้

เอกสารอ้างอิง

- Bahl, S., & Tuteja, R. (1991). Ratio and product type exponential estimators. *Journal of information and optimization sciences*. 12(1), 159-164.
- Cochran, W. G. (1940). The estimation of the yields of the cereal experiments by sampling for the ratio of grain to total produce. *The Journal of Agric Science*. 30(2), 262-275.
- Dansawad, N. (2020). Ratio-cum-product type of exponential estimator for the population mean in simple random sampling using the information of auxiliary variable. *Burapha Science Journal*, 25(2), 563-577.
- Kadilar, C., & Cingi, H. (2004). Ratio estimators in simple random sampling. *Applied Mathematics and Computation*. 151, 893-902.
- Khoshnevisan, M., Singh, R., Chauhan, P., Sawan, N., & Smarandache, F. (2007). A general family of estimators for estimating population mean using known value of some population parameter(s). *Far East Journal of Theoretical Statistics*. 22, 181-191.

- Koyuncu, N., & Kadilar, C. (2009). Efficient estimators for the population mean, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. 38(2), 217-225.
- Lurdjariyaporn, P., & Dansawad, N. (2021). A general ratio type of exponential estimator for estimating the population mean under simple random sampling using the information of auxiliary variable. *Journal of Research and Innovation in Science and Technology*, 2(2), 1-15.
- Singh, H. P., & Agnihotri, N. (2008). A general procedure of estimating population mean using auxiliary information in sample surveys. *Statistics in Transition- new series*. 9, 71-87.
- Singh, H. P., & Pal, S. K. (2015). A new chain ratio-ratio-type exponential estimator using auxiliary information in sample surveys. *International Journal of Mathematics And Its Applications*. 3, 37-46.
- Singh, H. P., Solanki, R. S., & Singh, A.K. (2016). A generalized ratio-cum-product estimator for estimating the finite population mean in survey sampling. *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 45(1), 158-172.
- Singh, N., Chauhan, P., & Sawan, N. (2008). On linear combination of ratio and product type exponential estimator for estimating the finite population mean. *Statistics in Transition-New Series*. 9(1), 105-115.
- Singh, R., Chauhan, P., Sawan, N., & Smarandache, F. (2009). Improvement in estimating the population mean using exponential estimator in simple random sampling. *Bulletin of Statistics & Economics*. 3, 13-18.
- Subramani, J., & Kumarapandiyan, G. (2013). Estimation of variance using known coefficient of variation and median of an auxiliary variable. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*. 12(1), 58-64.