

## การศึกษาตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณ โดยการประยุกต์จาก ตัวประมาณแบบเลขชี้กำลัง ในการสำรวจตัวอย่าง

### A Study on the Generalized Ratio-Cum-Product Estimator by Applying from Exponential Estimator in Sample Surveys

ภัทธิตา เลิศจริยพร<sup>1</sup> สุนิทร่า ตั้งซ้าย<sup>2</sup> และณภัฏญ์จันทร์ ต่านสวัสดิ์<sup>3</sup> \*

<sup>1</sup>คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยหัวเฉียวเฉลิมพระเกียรติ

<sup>2</sup>คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์

<sup>3</sup>คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

\*ผู้นิพนธ์หลัก (Corresponding Author) E-mail: [napattchan@hotmail.com](mailto:napattchan@hotmail.com)

Received: October 5, 2022

Revised: November 30, 2022

Accepted: December 4, 2022

#### บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณ สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร โดยประยุกต์จากตัวประมาณแบบเลขชี้กำลัง ในการสำรวจตัวอย่าง ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน ซึ่งผู้วิจัยได้ปรับปรุงมาจากตัวประมาณของ Singh et al. (2009) และ Singh et al. (2016) และทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่นำเสนอกับตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง ตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh et al. (2009) และ Singh et al. (2016) โดยใช้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยและค่าร้อยละประสิทธิภาพสัมพัทธ์เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ ผลการวิจัยพบว่า ตัวประมาณที่นำเสนอมีประสิทธิภาพสูงกว่าตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง ตัวประมาณของ Singh et al. (2009) และ Singh et al. (2016) อย่างมีเงื่อนไข ซึ่งสอดคล้องกันทั้งในการศึกษาเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

**คำสำคัญ:** ตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณ, ตัวประมาณแบบเลขชี้กำลัง, ค่าเฉลี่ยประชากร, ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย, ค่าร้อยละประสิทธิภาพสัมพัทธ์

**Abstract**

The objective of this research was to propose the generalized ratio-cum-product estimator for estimating the population mean by applying from exponential estimator in sample surveys under simple random sampling without replacement (SRSWOR). This proposed estimator was modified from the estimators of Singh et al. (2009) and Singh et al. (2016). The efficiency of this proposed estimator was compared with the usual unbiased estimator, the estimators proposed by Singh et al. (2009) and Singh et al. (2016) on the basis of Mean Squared Error (MSE) and Percent Relative Efficiency (PRE) criteria. The results of this research showed that, under some conditions, the proposed estimator was more efficient than others, which was consistent with the results of theoretical and numerical studies.

**Keywords:** Ratio-Cum-Product Estimator, Exponential Estimator, Population Mean, Mean Squared Error, Percent Relative Efficiency

**บทนำ**

ในงานวิจัยทางการสำรวจ บ่อยครั้งจะพบว่า นักสถิติหลายท่านนิยมนำข้อมูลจากตัวแปรช่วย (Auxiliary Variable: X) มาใช้ในการเพิ่มประสิทธิภาพของตัวประมาณที่สร้างขึ้น สำหรับประมาณค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของประชากรที่สนใจศึกษา เช่น ค่าเฉลี่ย ค่าสัดส่วน รวมถึงค่าความแปรปรวน เป็นต้น ซึ่งตัวประมาณที่สร้างขึ้นนี้มีได้หลากหลายรูปแบบ อาทิ ตัวประมาณแบบอัตราส่วน (Ratio Estimator) ตัวประมาณแบบผลคูณ (Product Estimator) และตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้น (Linear Regression Estimator) ฯลฯ กล่าวคือตัวประมาณแบบอัตราส่วนจะมีประสิทธิภาพและมีความเหมาะสมมากกว่าตัวประมาณในรูปแบบอื่น ๆ ถ้าเส้นการถดถอย (Regression Line) ของตัวแปรที่สนใจศึกษา (Study Variable: Y) และตัวแปรช่วย X ตัดผ่านจุดกำเนิด และความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองเป็นไปในทางบวก (Positive Correlation) ในขณะที่ตัวประมาณแบบผลคูณจะมีประสิทธิภาพและมีความเหมาะสมในกรณีที่คล้ายกันกับตัวประมาณแบบอัตราส่วน แต่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสนใจศึกษา Y และตัวแปรช่วย X จะเป็นในทางลบ (Negative Correlation) สำหรับในกรณีที่เส้นการถดถอยไม่ได้ตัดผ่านจุดกำเนิด แต่ไปตัดแกน Y (Y-axis) แทน และความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสนใจศึกษา Y และตัวแปรช่วย X มีค่าที่ค่อนข้างน้อย ตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้นจะมีประสิทธิภาพและมีความเหมาะสมมากที่สุด

นอกเหนือจากตัวประมาณแบบอัตราส่วน ตัวประมาณแบบผลคูณ และตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้น ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ยังมีนักสถิติอีกกลุ่มหนึ่งที่น่าสนใจซึ่งนำฟังก์ชันเลขชี้กำลังมาประยุกต์ใช้ในการสร้างตัวประมาณที่สนใจศึกษา และเรียกชื่อตัวประมาณที่สร้างขึ้นใหม่นี้ว่าตัวประมาณแบบเลขชี้กำลัง (Exponential Estimator) โดยหนึ่งในนักสถิติที่เป็นที่รู้จักอย่างกว้างขวางในการสร้างและนำเสนอตัวประมาณในรูปแบบเลขชี้กำลังได้แก่ Bahl & Tuteja (1991) โดย Bahl & Tuteja (1991) เป็นนักสถิติคนแรกที่ได้สร้างตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง (Ratio-Type Exponential Estimator) ภายใต้สถานการณ์ที่ตัวแปรสนใจศึกษา  $Y$  และตัวแปรช่วย  $X$  มีความสัมพันธ์เป็นไปในทางบวก โดยรูปแบบของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง ( $\bar{y}_{BT}$ ) รวมถึงความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ ( $MSE(\bar{y}_{BT})$ ) ที่สร้างโดย Bahl & Tuteja (1991) มีดังต่อไปนี้

$$\bar{y}_{BT} = \bar{y} \exp\left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}}\right) \quad (1)$$

และ

$$MSE(\bar{y}_{BT}) = \lambda \bar{Y}^2 \left[ C_y^2 + C_x^2 (1 - 2K) \right] \quad (2)$$

เมื่อ  $\lambda = \frac{(1-f)}{n}$ ,  $f = \frac{n}{N}$ ,  $K = \frac{\rho_{yx} C_y}{C_x}$

โดยที่  $N$  คือ ขนาดของประชากรที่สนใจศึกษา (Size of Population)

$n$  คือ ขนาดของตัวอย่างที่สนใจศึกษา (Size of Sample)

$\rho_{yx}$  คือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่สนใจศึกษา  $Y$  และตัวแปรช่วย  $X$

(Correlation Coefficient between Study Variable and Auxiliary Variable)

$C_y$  คือ สัมประสิทธิ์การแปรผันของตัวแปรที่สนใจศึกษา  $Y$

(Coefficient of Variation of Study Variable)

$C_x$  คือ สัมประสิทธิ์การแปรผันของตัวแปรช่วย  $X$

(Coefficient of Variation of Auxiliary Variable)

ในขณะที่ Singh & Agnihotri (2008) ได้นำเสนอรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณแบบอัตราส่วนและตัวประมาณแบบผลคูณที่ครอบคลุมตัวประมาณที่นักวิจัยหลาย ๆ ท่าน ได้นำเสนออยู่ ณ เวลานั้น โดยรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณแบบอัตราส่วนและตัวประมาณแบบผลคูณที่ Singh & Agnihotri (2008) นำเสนอ แสดงตามลำดับต่อไปนี้

$$\bar{y}_R = \bar{y} \left( \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x} + b} \right) \quad (3)$$

และ

$$\bar{y}_P = \bar{y} \left( \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X} + b} \right) \quad (4)$$

และมีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ  $\bar{y}_R$  และ  $\bar{y}_P$  คือ

$$MSE(\bar{y}_R) = \lambda \bar{Y}^2 (C_y^2 + C_x^2 \theta (\theta - 2K)) \quad (5)$$

และ

$$MSE(\bar{y}_P) = \lambda \bar{Y}^2 (C_y^2 + C_x^2 \theta (\theta + 2K)) \quad (6)$$

$$\text{เมื่อ } \theta = \frac{a\bar{X}}{a\bar{X} + b}$$

โดยที่  $a$  และ  $b$  คือฟังก์ชันหรือค่าคงที่ใด ๆ ที่สนใจศึกษา

ถ้าผู้วิจัยแทนค่า  $a$  หรือ  $b$  เท่ากับ 0 ลงในสมการที่ (3) หรือ สมการที่ (4) จะทำให้ตัวประมาณ  $\bar{y}_R$  และ  $\bar{y}_P$  ลดรูปเหลือแค่  $\bar{y}$  ซึ่งในทางทฤษฎี  $\bar{y}$  คือค่าเฉลี่ยตัวอย่าง (Sample Mean) ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (Usual Unbiased) โดยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ  $\bar{y}$  จะมีค่าเท่ากับ

$$MSE(\bar{y}) = \lambda \bar{Y}^2 C_y^2 \quad (7)$$

ต่อมา Singh et al. (2009) ได้พัฒนาตัวประมาณของ Bahl & Tuteja (1991) โดยใช้ข้อมูลจากตัวแปรช่วย  $X$  จำนวน 2 ค่า ในการสร้างตัวประมาณแบบอัตราส่วนขึ้นมาใหม่ในรูปแบบเลขชี้กำลัง มีรูปแบบของตัวประมาณดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \bar{y}_{S1} &= \bar{y} \exp \left( \frac{(a\bar{X} + b) - (a\bar{x} + b)}{(a\bar{X} + b) + (a\bar{x} + b)} \right) \\ &= \bar{y} \exp \left( \frac{a(\bar{X} - \bar{x})}{a(\bar{X} + \bar{x}) + 2b} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

และมีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ  $\bar{y}_{S1}$  คือ

$$MSE(\bar{y}_{S1}) = \lambda \bar{Y}^2 [C_y^2 + C_x^2 \theta (\theta - 2K)] \quad (9)$$

ในปี 2016 Singh et al. (2016) ได้นำตัวประมาณแบบอัตราส่วนและตัวประมาณแบบผลคูณที่นำเสนอโดย Singh & Agnihotri (2008) มาปรับปรุงประสิทธิภาพ และสร้างตัวประมาณใหม่ที่ครอบคลุมทั้งตัวประมาณแบบอัตราส่วนและตัวประมาณแบบผลคูณ โดยมีรูปแบบของตัวประมาณที่นำเสนอ ดังนี้

$$\begin{aligned}\bar{y}_{S2} &= \bar{y} \left( \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x} + b} \right)^g \left( \frac{a\bar{x} + b}{a\bar{X} + b} \right)^{1-g} \\ &= \bar{y} \left( \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x} + b} \right)^{2g-1}\end{aligned}\quad (10)$$

และมีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ  $\bar{y}_{S2}$  คือ

$$MSE(\bar{y}_{S2}) = \lambda \bar{Y}^2 \left( C_y^2 + (2g-1)C_x^2 \theta ((2g-1)\theta - 2K) \right) \quad (11)$$

โดยที่  $g$  คือฟังก์ชันหรือค่าคงที่ใด ๆ ที่สนใจศึกษา

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะนำเสนอตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณสำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร โดยประยุกต์จากตัวประมาณแบบเลขชี้กำลัง ในการสำรวจตัวอย่างภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน โดยพัฒนามาจากตัวประมาณที่ถูกลำเสนอโดย Singh et al. (2009) และ Singh et al. (2016) และจะทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณที่นำเสนอ กับตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง ตัวประมาณของ Singh et al. (2009) และ Singh et al. (2016) โดยจะพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error: MSE) และค่าร้อยละประสิทธิภาพสัมพัทธ์ (Percent Relative Efficiency: PRE)

## วิธีการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้เสนอตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณ โดยประยุกต์จากตัวประมาณแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร โดยวิธีการวิจัยมีลำดับขั้นตอนดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. นำเสนอตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณ สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร

ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน ผู้วิจัยนำเสนอตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณตัวใหม่ โดยพัฒนามาจากตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh et al. (2009) และ Singh et al. (2016) สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ซึ่งตัวประมาณที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ได้ประยุกต์จากตัวประมาณแบบเลขชี้กำลัง

2. จัดรูปแบบของตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณ ที่นำเสนอขึ้นใหม่ให้อยู่ในพจน์ของค่าคลาดเคลื่อน ก่อนการคำนวณหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ ในการวิจัยครั้งนี้จะสมมติว่าขนาดของประชากร ( $N$ ) มีขนาดใหญ่มากเพียงพอเมื่อเทียบกับขนาดของตัวอย่าง ( $n$ ) ดังนั้นจะทำให้พจน์  $1/N$  และ  $2/N$  มีขนาดเล็กมากจนไม่อาจนำมาพิจารณา ( $1/N \cong 0$  และ  $n/N \cong 0$ ) และเนื่องจาก  $\bar{y}$  และ  $\bar{x}$  เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง ดังนั้นก่อนการคำนวณหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ  $\bar{y}_T$  ผู้วิจัยจึงต้องทำการจัดรูปแบบของตัวประมาณ  $\bar{y}_T$  ใหม่ ให้อยู่ในพจน์ของความคลาดเคลื่อน (Error terms) โดยกำหนดให้  $\bar{y} = \bar{Y}(1+e_0)$  และ  $\bar{x} = \bar{X}(1+e_1)$

3. คำนวณหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณที่นำเสนอขึ้นใหม่ เมื่อกำหนดให้  $E(e_0) = E(e_1) = 0$ ,  $E(e_0^2) = \lambda C_y^2$ ,  $E(e_1^2) = \lambda C_x^2$  และ  $E(e_0 e_1) = \lambda \rho_{yx} C_y C_x$

4. เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณที่นำเสนอขึ้นใหม่กับตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ผ่านการการศึกษาเชิงทฤษฎี และการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง โดยจะพิจารณาจากความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย และค่าร้อยละประสิทธิภาพสัมพัทธ์

5. สรุปผลการวิจัย

## ผลการวิจัย

ผลการวิจัยแสดงเป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. จากตัวประมาณ  $\bar{y}_{S1}$  และ  $\bar{y}_{S2}$  ที่นำเสนอโดย Singh et al. (2009) และ Singh et al. (2016) ซึ่งแสดงดังสมการที่ (8) และ (10) ตามลำดับ ผู้วิจัยจะนำเสนอตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณตัวใหม่ โดยจะทำการแทนค่า  $\bar{y}$  ในตัวประมาณ  $\bar{y}_{S1}$  ด้วยตัวประมาณ  $\bar{y}_{S2}$  ดังนั้นตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณ สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ จะมีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\bar{y}_T &= \bar{y}_{S2} \exp\left(\frac{a(\bar{X} - \bar{x})}{a(\bar{X} + \bar{x}) + 2b}\right) \\ &= \bar{y} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x} + b}\right)^{2g-1} \exp\left(\frac{a(\bar{X} - \bar{x})}{a(\bar{X} + \bar{x}) + 2b}\right)\end{aligned}\quad (12)$$

2. ผู้วิจัยจะทำการจัดรูปแบบของตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณที่นำเสนอขึ้นใหม่  $\bar{y}_T$  จากสมการที่ (12) ให้อยู่ในพจน์ของความคลาดเคลื่อน โดยกำหนดให้  $\bar{y} = \bar{Y}(1+e_0)$  และ  $\bar{x} = \bar{X}(1+e_1)$  ดังนั้นจะได้

$$\bar{y}_T = \bar{Y}(1+e_0)(1+\theta e_1)^{1-2g} \exp\left(\left(-\frac{\theta e_1}{2}\right)\left(1+\frac{\theta e_1}{2}\right)^{-1}\right) \quad (13)$$

$$\text{เมื่อ } \theta = \frac{a\bar{X}}{a\bar{X}+b}$$

กำหนดให้  $|\theta e_1| < 1$  ดังนั้นพจน์  $(1+\theta e_1)^{-1}$  จะสามารถกระจายได้โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ และพจน์ที่ยกกำลัง 3 เป็นต้นไปจะถูกกำหนดให้เป็นค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation Error) ซึ่งในทางทฤษฎีค่าคลาดเคลื่อนดังกล่าวจะเข้าสู่ศูนย์

จากสมการที่ (13) ผู้วิจัยจะทำการกระจายพจน์ทางขวามือของสมการ และจะทำการลบทั้งสองข้างของสมการด้วย  $\bar{Y}$  จะได้

$$\bar{y}_T - \bar{Y} = \bar{Y} \left[ \begin{aligned} &1 - \frac{\theta e_1}{2} + \frac{3\theta^2 e_1^2}{8} + (1-2g)\theta e_1 - \frac{(1-2g)\theta^2 e_1^2}{2} \\ &-(1-2g)g\theta^2 e_1^2 + e_0 - \frac{\theta e_0 e_1}{2} + (1-2g)\theta e_0 e_1 \end{aligned} \right] - \bar{Y} \quad (14)$$

3. จากนั้นผู้วิจัยจะคำนวณหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณ สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร จาก

$$MSE(\bar{y}_T) = E(\bar{y}_T - \bar{Y})^2$$

$$= \bar{Y}^2 E\left(\frac{\theta^2 e_1^2}{4} + (1-2g)^2 \theta^2 e_1^2 + e_0^2 - (1-2g)\theta^2 e_1^2 - \theta e_0 e_1 + 2(1-2g)\theta e_0 e_1\right) \quad (15)$$

แล้วทำการแทนค่า  $E(e_0) = E(e_1) = 0$ ,  $E(e_0^2) = \lambda C_y^2$ ,  $E(e_1^2) = \lambda C_x^2$ , และ  $E(e_0 e_1) = \lambda \rho_{yx} C_y C_x$  ลงในสมการ (15) และจัดรูปสมการใหม่อีกครั้ง (จะได้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ  $\bar{y}_T$  คือ

$$MSE(\bar{y}_T) = \lambda \bar{Y}^2 \left( C_y^2 + \frac{(4g-1)}{4} \theta C_x^2 \{ \theta(4g-1) - 4K \} \right) \quad (16)$$

จากนั้นผู้วิจัยจะทำการหา  $MSE(\bar{y}_T)$  ที่มีค่าต่ำที่สุด โดยจะหาจากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ  $MSE(\bar{y}_T)$  เทียบกับ  $g$  และให้เท่ากับ จะได้ 0

$$\frac{\partial MSE(\bar{y}_T)}{\partial g} = 32g \frac{\theta^2}{4} C_x^2 - 8 \frac{\theta^2}{4} C_x^2 - 4\theta \rho_{yx} C_y C_x = 0 \quad (17)$$

แก้สมการหาค่า  $g$  จากสมการ (17) จะได้

$$g = \frac{\theta + 2K}{4\theta} = g_{opt} \quad (18)$$

แล้วจึงหาอนุพันธ์อันดับสองของ  $MSE(\bar{y}_T)$  เทียบกับ  $g$  จะได้

$$\frac{\partial^2 MSE(\bar{y}_T)}{\partial g^2} = 8\theta^2 C_x^2 \quad (19)$$

ภายใต้เงื่อนไข  $\theta$  มีค่ามากกว่า  $\theta^2 > 0$  เนื่องจาก 0 เสมอ ดังนั้น  $\theta < 0$  หรือ  $\theta > 0$  จะทำให้พจน์  $8\theta^2 C_x^2 > 0$  ซึ่งจะทำให้สมการ (19) มีค่ามากกว่า  $\bar{y}_T$  เสมอ ดังนั้นจะได้ว่าตัวประมาณ 0 จะมีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุด และจะแทนค่า  $g_{opt}$  จากสมการ (18) ลงในสมการ (16) จะได้

$$\min .MSE(\bar{y}_T) = \lambda \bar{Y}^2 C_y^2 (1 - \rho_{yx}^2) \quad (20)$$

4. สำหรับการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณที่นำเสนอขึ้นใหม่ กับตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง และตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh et al. (2009) และ Singh et al. (2016) ผู้วิจัยจะแบ่งผลการศึกษออกเป็น 2 กรณี ได้แก่

#### 4.1 ผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณในเชิงทฤษฎี

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณ สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่นำเสนอขึ้นมาใหม่  $\bar{y}_T$  จากสมการที่ (12) กับตัวประมาณแบบอัตราส่วนที่นำเสนอโดย Singh et al. (2009) และ Singh et al. (2016) จากสมการที่ (8) และ (10) จะพิจารณาภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

##### เมื่อพิจารณาจากความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

- ตัวประมาณแบบอัตราส่วนที่นำเสนอขึ้นมาใหม่  $\bar{y}_T$  จากสมการที่ (16) จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง จากสมการที่ (7) ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขจากสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$MSE(\bar{y}_T) < MSE(\bar{y})$$

$$\rho_{yx} < -\frac{\theta[4g-1]C_x}{4C_y} \quad (21)$$

- ตัวประมาณแบบอัตราส่วนที่นำเสนอขึ้นมาใหม่  $\bar{y}_T$  จากสมการที่ (16) จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณแบบอัตราส่วน  $\bar{y}_{S1}$  จากสมการที่ (9) ที่นำเสนอโดย Singh et al. (2009)

ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขจากสมการที่ (22) เป็นจริง

$$MSE(\bar{y}_T) < MSE(\bar{y}_{S1})$$

$$\rho_{yx} < \frac{\theta[4g+1]C_x}{4C_y} \quad (22)$$

- ตัวประมาณแบบอัตราส่วนที่นำเสนอขึ้นมาใหม่  $\bar{y}_T$  จากสมการที่ (16) จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณแบบอัตราส่วน  $\bar{y}_{S2}$  จากสมการที่ (11) ที่นำเสนอโดย Singh et al. (2016) ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขจากสมการที่ (23) เป็นจริง

$$MSE(\bar{y}_T) < MSE(\bar{y}_{S2})$$

$$\rho_{yx} < \frac{\theta[8g-3]C_x}{4C_y} \quad (23)$$

เมื่อพิจารณาจากความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุด

- ตัวประมาณแบบอัตราส่วนที่นำเสนอขึ้นมาใหม่  $\bar{y}_T$  จากสมการที่ (20) จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง จากสมการที่ (7) ที่นำเสนอโดย Singh et al. (2009) ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขจากสมการที่ (24) เป็นจริง

$$\min.MSE(\bar{y}_T) < MSE(\bar{y})$$

$$\rho_{yx}^2 > 0 \quad (24)$$

- ตัวประมาณแบบอัตราส่วนที่นำเสนอขึ้นมาใหม่  $\bar{y}_T$  จากสมการที่ (20) จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณแบบอัตราส่วน  $\bar{y}_{S1}$  จากสมการที่ (9) ที่นำเสนอโดย Singh et al. (2009) ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขจากสมการที่ (25) เป็นจริง

$$\min.MSE(\bar{y}_T) < MSE(\bar{y}_{S1})$$

$$(\theta C_x - C_y \rho_{yx})^2 > 0 \quad (25)$$

- ตัวประมาณแบบอัตราส่วนที่นำเสนอขึ้นมาใหม่  $\bar{y}_T$  จากสมการที่ (20) จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณแบบอัตราส่วน  $\bar{y}_{S2}$  จากสมการที่ (11) ที่นำเสนอโดย Singh et al. (2016) ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขจากสมการที่ (26) เป็นจริง

$$\min.MSE(\bar{y}_T) < MSE(\bar{y}_{S2})$$

$$\left[ (2g-1)\theta C_x - C_y \rho_{yx} \right]^2 > 0 \quad (26)$$

#### 4.2 ผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณโดยการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

ก่อนที่จะทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณแบบอัตราส่วนที่นำเสนอขึ้นมาใหม่  $\bar{y}_T$  กับตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง และตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh et al. (2009) และ Singh et al. (2016) ผู้วิจัยจะทำการแทนค่าฟังก์ชันหรือค่าคงที่ใด ๆ ที่สนใจศึกษา เช่น  $C_x$ ,  $\rho_{yx}$ ,  $n$  ลงใน  $a$  และ  $b$  ในสมการที่ (8) (10) และ (12) ดังนั้นจะได้สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh et al. (2009) Singh et al. (2016) และสมาชิกบางส่วนของตัวประมาณแบบอัตราส่วนที่นำเสนอขึ้นมาใหม่  $\bar{y}_T$  แสดงดังตารางที่ 1

**ตารางที่ 1** สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณแบบอัตราส่วนที่เกิดจากการแทนค่าฟังก์ชันหรือค่าคงที่ใด ๆ ลงใน  $a$  และ  $b$

| ลำดับที่                                       | ตัวประมาณ                                                                                                                                                               | ฟังก์ชันหรือค่าคงที่ |             |   | ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย                                                                             |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                |                                                                                                                                                                         | ที่ต้องการศึกษา      |             |   |                                                                                                           |
|                                                |                                                                                                                                                                         | a                    | b           | g |                                                                                                           |
| สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\bar{y}_{S1}$       |                                                                                                                                                                         |                      |             |   |                                                                                                           |
| 1.                                             | $\bar{y}_{S1(1)} = \bar{y} \exp\left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2C_x}\right)$                                                                     | 1                    | $C_x$       | - | $\lambda \bar{Y}^2 \left[ C_y^2 + C_x^2 \theta_1 (\theta_1 - 2K) \right]$                                 |
| 2.                                             | $\bar{y}_{S1(2)} = \bar{y} \exp\left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2\rho_{yx}}\right)$                                                               | 1                    | $\rho_{yx}$ | - | $\lambda \bar{Y}^2 \left[ C_y^2 + C_x^2 \theta_2 (\theta_2 - 2K) \right]$                                 |
| 3.                                             | $\bar{y}_{S1(3)} = \bar{y} \exp\left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2n}\right)$                                                                       | 1                    | $n$         | - | $\lambda \bar{Y}^2 \left[ C_y^2 + C_x^2 \theta_3 (\theta_3 - 2K) \right]$                                 |
| สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\bar{y}_{S2}$       |                                                                                                                                                                         |                      |             |   |                                                                                                           |
| 4.                                             | $\bar{y}_{S2(1)} = \bar{y} \left( \frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x} + C_x} \right)$                                                                                          | 1                    | $C_x$       | 1 | $\lambda \bar{Y}^2 \left( C_y^2 + (2g - 1) C_x^2 \theta_1 ((2g - 1) \theta_1 - 2K) \right)$               |
| 5.                                             | $\bar{y}_{S2(2)} = \bar{y} \left( \frac{\bar{X} + \rho_{yx}}{\bar{x} + \rho_{yx}} \right)$                                                                              | 1                    | $\rho_{yx}$ | 1 | $\lambda \bar{Y}^2 \left( C_y^2 + (2g - 1) C_x^2 \theta_2 ((2g - 1) \theta_2 - 2K) \right)$               |
| 6.                                             | $\bar{y}_{S2(3)} = \bar{y} \left( \frac{\bar{X} + n}{\bar{x} + n} \right)$                                                                                              | 1                    | $n$         | 1 | $\lambda \bar{Y}^2 \left( C_y^2 + (2g - 1) C_x^2 \theta_3 ((2g - 1) \theta_3 - 2K) \right)$               |
| สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณที่นำเสนอ $\bar{y}_T$ |                                                                                                                                                                         |                      |             |   |                                                                                                           |
| 7.                                             | $\bar{y}_{T(1)} = \bar{y} \left( \frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x} + C_x} \right) \exp\left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2C_x}\right)$                   | 1                    | $C_x$       | 1 | $\lambda \bar{Y}^2 \left( C_y^2 + \frac{(4g - 1)}{4} \theta_1 C_x^2 \{ \theta_1 (4g - 1) - 4K \} \right)$ |
| 8.                                             | $\bar{y}_{T(2)} = \bar{y} \left( \frac{\bar{X} + \rho_{yx}}{\bar{x} + \rho_{yx}} \right) \exp\left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2\rho_{yx}}\right)$ | 1                    | $\rho_{yx}$ | 1 | $\lambda \bar{Y}^2 \left( C_y^2 + \frac{(4g - 1)}{4} \theta_2 C_x^2 \{ \theta_2 (4g - 1) - 4K \} \right)$ |
| 9.                                             | $\bar{y}_{T(3)} = \bar{y} \left( \frac{\bar{X} + n}{\bar{x} + n} \right) \exp\left(\frac{(\bar{X} - \bar{x})}{(\bar{X} + \bar{x}) + 2n}\right)$                         | 1                    | $n$         | 1 | $\lambda \bar{Y}^2 \left( C_y^2 + \frac{(4g - 1)}{4} \theta_3 C_x^2 \{ \theta_3 (4g - 1) - 4K \} \right)$ |

$$\text{เมื่อ } \theta_1 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + C_x}, \theta_2 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + \rho_{yx}}, \theta_3 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + n}$$

จากนั้นผู้วิจัยจะใช้ค่าจากข้อมูลจริงจำนวน 2 ชุด ที่เก็บรวบรวมโดย Koyuncu & Kadilar (2009) และ Yadav et al. (2019) แทนลงไปในตัวแปรต่าง ๆ ของพจน์ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณแต่ละตัวที่แสดงในตารางที่ 1 ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ข้อมูลชุดที่ 1 เก็บรวบรวมโดย Koyuncu & Kadilar (2009) เป็นข้อมูลเกี่ยวกับโรงเรียนระดับชั้นประถมศึกษาและมัธยมศึกษาใน 923 อำเภอของประเทศตุรกี ในปี 2007 เมื่อกำหนดให้จำนวนบุคลากรครูทั้งหมดที่ทำการสอนจริง ณ วันที่เก็บข้อมูล เป็นตัวแปรที่สนใจศึกษา  $Y$  และกำหนดให้จำนวนนักเรียนที่มีอยู่ ณ ขณะนั้น เป็นตัวแปรช่วย  $X$  โดยข้อมูลลักษณะประชากรที่เก็บรวบรวมได้มีดังต่อไปนี้

$$N = 923, n = 180, \bar{Y} = 436.4345, \bar{X} = 11,440.4984, \rho_{yx} = 0.9543, C_y = 1.7183, \\ C_x = 1.8645, S_y = 749.9395, S_x = 21,331.1315$$

ในขณะที่ข้อมูลชุดที่ 2 เก็บรวบรวมโดย Yadav et al. (2019) เป็นข้อมูลปริมาณผลผลิตน้ำมันสระแหน่ ที่ผลิตจากเมืองบาราบังกิ รัฐอุตตรประเทศ ประเทศอินเดีย โดยกำหนดให้ปริมาณผลผลิตน้ำมันสระแหน่ เป็นตัวแปรที่สนใจศึกษา  $Y$  และพื้นที่ที่ใช้ในการเพาะต้นสระแหน่ เป็นตัวแปรช่วย  $X$  โดยข้อมูลลักษณะประชากรที่เก็บรวบรวมจากประชากรชุดที่ 2 มีดังต่อไปนี้

$$N = 150, n = 40, \bar{Y} = 33.4620, \bar{X} = 4.2047, \rho_{yx} = 0.9112, C_y = 0.7622, C_x = 0.7326, \\ S_y = 25.5031, S_x = 3.0804$$

หลังจากแทนค่าที่ได้จากข้อมูลจริงทั้ง 2 ชุด ลงไปในตัวแปรต่าง ๆ ของพจน์ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณแต่ละตัวที่แสดงในตารางที่ 1 แล้ว ผู้วิจัยจะคำนวณหาค่าร้อยละประสิทธิภาพสัมพัทธ์ เพื่อใช้เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบระหว่างตัวประมาณแบบอัตราส่วนที่นำเสนอขึ้นมาใหม่  $\bar{y}_T$  กับตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง และตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh et al. (2009) และ Singh et al. (2016) จากสมการดังต่อไปนี้

$$PRE(\bar{y}_T, \bar{y}, \bar{y}_{S1}, \bar{y}_{S2}) = \frac{MSE(\bar{y}, \bar{y}_{S1}, \bar{y}_{S2})}{MSE(\bar{y}_T)} \times 100 \quad (27)$$

กล่าวคือตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณที่นำเสนอขึ้นมาใหม่  $\bar{y}_T$  จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง และตัวประมาณที่นำเสนอโดย Singh et al. (2009) และ Singh et al. (2016) ก็ต่อเมื่อ  $MSE(\bar{y}_T) < MSE(\bar{y}, \bar{y}_{S1}, \bar{y}_{S2})$

โดยผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณโดยการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงแสดงดังตารางที่ 2

**ตารางที่ 2** ค่า MSE และ PRE ของตัวประมาณภายใต้ประชากรที่ศึกษาจากข้อมูลชุดที่ 1 และ ชุดที่ 2

| ตัวประมาณอัตราส่วน                             | ข้อมูลชุดที่ 1 |           | ข้อมูลชุดที่ 2 |           |
|------------------------------------------------|----------------|-----------|----------------|-----------|
|                                                | MSE            | PRE       | MSE            | PRE       |
| $\bar{y}$                                      | 2,515.0738     | 100.0000  | 11.9242        | 100.0000  |
| สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\bar{y}_{S1}$       |                |           |                |           |
| $\bar{y}_{S1(1)}$                              | 651.2254       | 386.2064  | 5.0270         | 237.2022  |
| $\bar{y}_{S1(2)}$                              | 651.1360       | 386.2594  | 5.0105         | 237.9828  |
| $\bar{y}_{S1(3)}$                              | 643.6261       | 390.7663  | 4.9557         | 240.6183  |
| สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ $\bar{y}_{S2}$       |                |           |                |           |
| $\bar{y}_{S2(1)}$                              | 267.5278       | 940.1167  | 2.1251         | 561.1013  |
| $\bar{y}_{S2(2)}$                              | 267.5846       | 939.9174  | 2.1980         | 542.4951  |
| $\bar{y}_{S2(3)}$                              | 257.2973       | 977.4970  | 2.0369         | 585.3987  |
| สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณที่นำเสนอ $\bar{y}_T$ |                |           |                |           |
| $\bar{y}_{T(1)}$                               | 221.7467       | 1134.2100 | 1.2863         | 927.0069  |
| $\bar{y}_{T(2)}$                               | 221.7209       | 1134.3425 | 1.2251         | 973.2976  |
| $\bar{y}_{T(3)}$                               | 206.7363       | 1216.5611 | 1.1740         | 1015.7053 |

### สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

ในงานวิจัยฉบับนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอตัวประมาณแบบอัตราส่วนร่วมกับผลคูณในรูปแบบเลขชี้กำลัง โดยปรับปรุงมาจากตัวประมาณของ Singh et al. (2009) และ Singh et al. (2016) สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน โดยตัวประมาณแบบอัตราส่วนที่นำเสนอขึ้นมาใหม่นี้ จะมีความครอบคลุมตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง ตัวประมาณที่นำเสนอโดย Bahl & Tuteja (1991) Singh & Agnihotri (2008) Singh et al. (2009) และ Singh et al. (2016) และจากการหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดของตัวประมาณที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ พบว่า มีค่าเท่ากับ ความคลาดเคลื่อนกำลังสองของตัวประมาณแบบการถดถอยเชิงเส้น ซึ่งเป็นที่ทราบกันในทางทฤษฎีว่าตัวประมาณแบบการถดถอยเชิงเส้น เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณแบบอัตราส่วน และตัวประมาณแบบผลคูณ (Cochran, 1942, Robson, 1957, Murthy, 1967, Perri, 2005, Enang et al., 2014) นอกจากนี้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณในเชิงทฤษฎี ยังพบว่า ตัวประมาณแบบอัตราส่วนที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง ตัวประมาณที่นำเสนอ

โดย Singh et al. (2009) และ Singh et al. (2016) ถ้าเงื่อนไขจากสมการที่ (21) ถึงสมการที่ (26) เป็นจริง สำหรับผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณโดยการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง ดังแสดงใน ตารางที่ 2 เมื่อพิจารณาภายใต้ข้อมูลที่ทำการศึกษาคู่เดียวกัน พบว่า ค่า MSE และ PRE ของสมาชิก บางส่วนของตัวประมาณแต่ละตัวที่อยู่ในกลุ่มเดียวกัน มีค่าที่ค่อนข้างใกล้เคียงกัน โดยกลุ่มของสมาชิก บางส่วนของตัวประมาณที่นำเสนอ  $\bar{y}_T$  จะมีค่า MSE ที่ต่ำที่สุด และมีค่า PRE ที่สูงที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับกลุ่มของสมาชิกบางส่วนของตัวประมาณอื่น ๆ ที่สนใจศึกษา ดังนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่า กลุ่มของ สมาชิกบางส่วนของตัวประมาณที่นำเสนอ  $\bar{y}_T$  มีประสิทธิภาพดีกว่ากลุ่มของสมาชิกบางส่วนของตัว ประมาณอื่น ๆ ที่สนใจศึกษา ทั้งนี้เมื่อพิจารณาประสิทธิภาพของตัวประมาณทีละตัวจะพบว่า ตัวประมาณ  $\bar{y}_{T(3)}$  ที่มีการนำขนาดตัวอย่าง ( $n$ ) มาใช้ในการเพิ่มประสิทธิภาพของตัวประมาณ โดยประยุกต์จากตัว ประมาณแบบเลขชี้กำลัง เป็นตัวประมาณที่มีค่า MSE ที่ต่ำที่สุด และมีค่า PRE ที่สูงที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับตัวประมาณอื่น ๆ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า นอกจากกลุ่มของสมาชิกบางส่วนของตัวประมาณที่ นำเสนอ  $\bar{y}_T$  แล้ว ตัวประมาณ  $\bar{y}_{T(3)}$  ยังเป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอื่น ๆ นอกจากตัวประมาณ  $\bar{y}_{T(3)}$  แล้ว ยังพบว่าตัวประมาณ  $\bar{y}_{T(1)}$  และ  $\bar{y}_{T(2)}$  ซึ่งเป็นสมาชิกบางส่วนของตัว ประมาณที่นำเสนอ  $\bar{y}_T$  มีประสิทธิภาพที่ใกล้เคียงกับตัวประมาณ  $\bar{y}_{T(3)}$  มากที่สุด โดยมีประสิทธิภาพ น้อยกว่าตัวประมาณ  $\bar{y}_{T(3)}$  ประมาณ 1 เท่า ในขณะที่ตัวประมาณ  $\bar{y}_{S1(1)}$  ตัวประมาณ  $\bar{y}_{S1(2)}$  และตัว ประมาณ  $\bar{y}_{S1(3)}$  ซึ่งเป็นสมาชิกบางส่วนของตัวประมาณ  $\bar{y}_{S1}$  มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับตัวประมาณ  $\bar{y}_{T(3)}$  น้อยที่สุด โดยมีประสิทธิภาพน้อยกว่าตัวประมาณ  $\bar{y}_{T(3)}$  ประมาณ 3 เท่า จากที่กล่าวมาข้างต้น จึงสามารถสรุปได้ทั้งในทางทฤษฎีและการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงได้ว่า ตัวประมาณแบบอัตราส่วน ร่วมกับผลคูณในรูปแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ ยังคงมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอื่น ๆ และ มีประสิทธิภาพมากเพียงพอที่จะนำไปใช้ได้ต่อไป ในกรณีที่มีการศึกษาภายใต้สถานการณ์เดียวกันกับ งานวิจัยฉบับนี้

## เอกสารอ้างอิง

- Bahl, S., & Tuteja, R. (1991). Ratio and product type exponential estimators. *Journal of information and optimization sciences*. 12(1), 159-164.
- Cochran, W. G. (1940). The estimation of the yields of the cereal experiments by sampling for the ratio of grain to total produce. *The Journal of Agric Science*. 3(2), 262-275.
- Enang, E. I., Akpan, V. M., & Ekpenyong, E. J. (2014). Alternative ratio estimator of population mean in simple random sampling. *Journal of Mathematics Research*. 4(3), 54-61.

- Koyuncu, N., & Kadilar, C. (2009). Efficient estimators for the population mean, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. 38(2), 217-225.
- Murthy, M. N. (1967). *Sampling Theory and Methods*. Calcutta: Statistics Publishing Society.
- Perri, P. F. (2005). Combining two auxiliary variables in ratio-cum-product type estimators. In *Italian Statistical Society Intermediate meeting on Statistics and Environment* (p. 193-196). Messina: Italy.
- Robson, D. S. (1957). Application of multivariate polykeys to the theory of unbiased ratio-type estimation. *Journal of the American Statistical Association*. 52(280), 511-522.
- Singh, H. P., & Agnihotri, N. (2008). A general procedure of estimating population mean using auxiliary information in sample surveys. *Statistics in Transition- new series*. 9, 71-87.
- Singh, R., Chauhan, P., Sawan, N., & Smarandache F. (2009). Improvement in estimating the population mean using exponential estimator in simple random sampling. *Bulletin of Statistics and Economics*. 3(13), 13-18.
- Singh, H. P., Solanki, R. S., & Singh, A.K. (2016). A generalized ratio-cum-product estimator for estimating the finite population mean in survey sampling. *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 45(1), 158-172.
- Yadav, S. K., Dixit, M. K., Dungana, H. N., & Mishra, S. S. (2019). Improved estimators for estimating average yield using supplementary variable. *International Journal of Mathematical Engineering and Management Sciences*. 4, 1228-1238.