กลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนสำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากรโดยใช้สารสนเทศจากตัวแปรช่วยในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย

Restructured Class of Ratio Estimators for Estimating the Population Mean using the Information of Auxiliary Variable in Simple Random Sampling

ภัททิตา เลิศจริยพร[1] และณภัทณ์จันทร์ ด่านสวัสดิ์[2] *
Pattita Lurdjariyaporn[1], and Napattchan Dansawad[2] *
[1] คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยหัวเฉียวเฉลิมพระเกียรติ
[2] คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์
ผู้นิพนธ์หลัก (Corresponding Author) E-mail: napattchan@vru.ac.th

Received: April 28,2021 Revised: June 9,2021 Accepted: June 30,2021

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนสำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน (Simple Random Sampling Without Replacement: SRSWOR) นอกจากนี้ผู้วิจัยจะศึกษาคุณสมบัติที่สำคัญบางประการของกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ เช่น ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error: MSE) และความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุด (Minimum Mean Squared Error: MMSE) จากนั้นจะทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนที่นำเสนอกับตัวประมาณอัตราส่วนตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง โดยใช้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย และค่าร้อยละประสิทธิภาพสัมพัทธ์ (Percent Relative Efficiencies: PRE) เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบภายใต้สถานการณ์ต่าง ๆ ผลการศึกษาพบว่ากลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนที่นำเสนอขึ้นมาใหม่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอัตราส่วนตัวอื่น ๆ

คำสำคัญ: ตัวประมาณอัตราส่วน, ค่าเฉลี่ยประชากร, ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย, ค่าร้อยละประสิทธิภาพสัมพัทธ์, ตัวแปรช่วย

Abstract

This paper proposes restructured class of ratio estimators for estimating the population mean under simple random sampling without replacement (SRSWOR) scheme. In addition, the authors have studied some expressions of proposed estimator such as Mean Squared Error (MSE) and MinimuM eanS quaredE rror(MMSE). Furthermore, the values of MSE and Percent of Relative Efficiencies (PRE) have also been compared with the considered existing competing ratio estimators under several situation. The results of this study show that the proposed estimator performs better than the existing ratio estimators.

Keywords: Ratio Estimators, Population Mean, Mean Squared Error, Percent Relative Efficiencies, Auxiliary Variable

บทนำ

ในการวิจัยเชิงสำรวจส่วนใหญ่ บ่อยครั้งที่ผู้วิจัยมักจะประสบกับปัญหาเรื่องการเก็บข้อมูลให้ได้ครบจากทุกหน่วยของประชากรที่ต้องการศึกษา อาจเนื่องจากข้อจำกัดในด้านต่าง ๆ ที่เป็นอุปสรรคสำคัญ เช่น ระยะเวลาที่ใช้ในการเก็บข้อมูลไม่ได้มีมากเพียงพอ มีงบประมาณที่จำกัด มีสภาพแวดล้อมที่ไม่เอื้ออำนวย เป็นต้น ทั้งนี้ข้อจำกัดต่าง ๆ อาจจะส่งผลทำให้ข้อมูลที่ได้ไม่ได้มีความครอบคลุมถึงลักษณะของประชากรที่ต้องการศึกษาทั้งหมด และเพื่อแก้ปัญหาดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ผู้วิจัยหลายท่านจึงนิยมใช้การเก็บข้อมูลจากตัวอย่างที่ใช้เป็นตัวแทนของประชากร โดยตัวอย่างที่ถูกเลือกมานั้นจะต้องเป็นตัวแทนที่ดีของประชากร กล่าวคือจะต้องให้ข้อมูลและสารสนเทศที่ครอบคลุมถึงลักษณะของประชากรที่ต้องการศึกษาให้ได้มากที่สุด ซึ่งการเลือกตัวอย่างที่เป็นตัวแทนที่ดีของประชากร จำเป็นต้องอาศัยวิธีการทางสถิติที่เรียกว่า เทคนิคการเลือกตัวอย่าง (Sampling Technique) และเมื่อได้ข้อมูลที่ต้องการจากตัวอย่างที่แล้ว นักวิจัยจึงนำข้อมูลและสารสนเทศที่ได้ไปใช้ในการวิเคราะห์ อธิบาย และสรุปผลเกี่ยวกับลักษณะของประชากรที่สนใจศึกษา รวมถึงอาจนำไปใช้ในการสร้างตัวประมาณ (Estimator) โดยหนึ่งในตัวประมาณที่เป็นที่นิยมในปัจจุบันได้แก่ ตัวประมาณที่ใช้ในการประมาณค่าเฉลี่ยของประชากร

ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน ผู้วิจัยจะทำการสุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรขนาด N และจะกำหนดให้ Y เป็นตัวแปรที่สนใจศึกษา ในการประมาณค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$

ผู้วิจัยจะประมาณด้วยค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{y} = t_0$ ที่คำนวณจาก $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i/n = t_0$ ซึ่งค่าเฉลี่ยดังกล่าว มีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (Unbiased Estimator) และมีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยดังต่อไปนี้

$$MSE(\bar{y}) = \lambda \bar{Y}^2 C_y^2 \tag{1}$$

โดยที่ $\lambda = \dfrac{(1-f)}{n}$, $f = \dfrac{n}{N}$, $C_y^2 = \dfrac{S_y^2}{\bar{Y}^2}$, $S_y^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{Y})^2 / (N-1)$

เมื่อ C_y คือ สัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรที่สนใจศึกษา Y

S_y^2 คือ ความแปรปรวนของประชากรของตัวแปรที่สนใจศึกษา Y

นอกจากนี้ในทางทฤษฎีถ้าหากทราบว่าตัวแปร Y มีความสัมพันธ์กับตัวแปรช่วย X และทราบค่าสารสนเทศของตัวแปรช่วย X เช่น ค่าเฉลี่ย $\bar{X}$ หรือค่าผลรวม T_X เป็นต้น ผู้วิจัยอาจสร้างตัวประมาณในรูปแบบอื่น ๆ จากการนำสารสนเทศดังกล่าวมาใช้ ซึ่งอาจทำให้ได้ตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ที่ดีขึ้น อีกทั้งในทางทฤษฎียังพบว่าภายหลังจากการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน ในกรณีที่ตัวแปร y และตัวแปรช่วย x มีความสัมพันธ์เชิงเส้นในทิศทางเดียวกัน (Positively Correlation) ตัวประมาณอัตราส่วน (Ratio Estimator) จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณผลคูณ (Product Estimator) แต่ในทางกลับกันถ้าหากพบว่าตัวแปร y และตัวแปรช่วย x มีความสัมพันธ์เชิงเส้นในทิศทางตรงกันข้าม (Negatively Correlation) จะพบว่าตัวประมาณผลคูณจะมีประสิทธิภาพดีว่าตัวประมาณอัตราส่วน (Chami et al., 2012, Swain, 2013, Enang et al., 2014, Subzar et al. 2019)

นักวิจัยหลาย ๆ ท่าน นิยมใช้ประโยชน์จากความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างตัวแปร y และตัวแปรช่วย x มาใช้ในการสร้างและพัฒนาตัวประมาณที่สนใจในรูปแบบที่หลากหลาย หนึ่งในนักวิจัยที่เป็นที่รู้จักอย่างกว้างขวางได้แก่ Cochran (1977) โดย Cochran (1977) ได้สร้างตัวประมาณอัตราส่วนแบบดั้งเดิม (Classical Ratio Estimator) ภายใต้สถานการณ์ที่ตัวแปร y มีความสัมพันธ์เชิงเส้นในทิศทางเดียวกันกับตัวแปรช่วย x ในระดับสูง และยังได้อธิบายเกี่ยวกับตัวประมาณที่ได้สร้างขึ้นนี้ว่าเป็นตัวประมาณที่มีความคงเส้นคงวา (Consistent) และมีความเอนเอียงเพียงเล็กน้อย แต่ความเอนเอียงดังกล่าวจะมีขนาดเล็กมากจนไม่ต้องคำนึงถึง ถ้าหากตัวอย่างที่เลือกมาจากประชากร พบว่ามีขนาดใหญ่มากเพียงพอ โดยรูปแบบของตัวประมาณอัตราส่วนแบบดั้งเดิม รวมถึงความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณที่สร้างโดย Cochran (1977) มีดังต่อไปนี้

$$t_1 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right) \tag{2}$$

$$MSE(t_1) = \lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + C_x^2 \theta_1 (\theta_1 - 2K)\right) \tag{3}$$

โดยที่ $\theta_1 = \frac{\bar{X}}{\bar{X}} = 1$, $C_x^2 = \frac{S_x^2}{\bar{X}^2}$, $S_x^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{X})^2 / (N-1)$, $K = \frac{\rho_{yx} C_y}{C_x}$

เมื่อ C_x คือ สัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรช่วย X (Coefficient of Variation)

S_x^2 คือ ความแปรปรวนของประชากรของตัวแปรช่วย X

ρ_{yx} คือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของประชากรระหว่างตัวแปรที่สนใจศึกษา Y และตัวแปรช่วย X

ต่อมา Sisodia & Dwivedi (1981) ได้พัฒนาและปรับปรุงประสิทธิภาพของตัวประมาณอัตราส่วนแบบดั้งเดิมที่นำเสนอโดย Cochran (1977) ด้วยการนำค่าสัมประสิทธิ์ความแปรผัน (Coefficient of Variation) ของตัวแปรช่วย x มาพิจารณาเพิ่มเติม โดยตัวประมาณอัตราส่วนที่ Sisodia & Dwivedi (1981) นำเสนอขึ้นมาใหม่นี้ มีรูปแบบและมีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยคือ

$$t_2 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x} + C_x}\right) \tag{4}$$

$$MSE(t_2) = \lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + C_x^2 \theta_2 (\theta_2 - 2K)\right) \tag{5}$$

โดยที่ $\theta_2 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + C_x}$

เช่นเดียวกันกับ Singh & Tailor (2003) ที่ได้พัฒนาและปรับปรุงประสิทธิภาพของตัวประมาณอัตราส่วนที่นำเสนอโดย Sisodia & Dwivedi (1981) โดยการแทนค่าสัมประสิทธิ์ความแปรผันของตัวแปรช่วย x ด้วยค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient: ρ_{yx}) โดยรูปแบบและความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณอัตราส่วนตัวใหม่ที่ Singh & Tailor (2003) นำเสนอมีดังนี้

$$t_3 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X} + \rho_{yx}}{\bar{x} + \rho_{yx}}\right) \tag{6}$$

$$MSE(t_3) = \lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + C_x^2 \theta_3 (\theta_3 - 2K)\right) \tag{7}$$

โดยที่ $\theta_3 = \dfrac{\bar{X}}{\bar{X} + \rho_{yx}}$

นอกจากการปรับปรุงประสิทธิภาพของตัวประมาณอัตราส่วนโดยใช้ค่าสัมประสิทธิ์ความแปรผันของตัวแปรช่วย x และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แล้ว Singh et al. (2004) ยังใช้ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง (Coefficient of Kurtosis: $\beta_{2(x)}$) มาช่วยในการปรับปรุงประสิทธิภาพของตัวประมาณอัตราส่วนที่ Singh & Tailor (2003) เคยนำเสนอไว้มาก่อนหน้านี้ โดยตัวประมาณอัตราส่วนตัวใหม่ที่ Singh et al. (2004) นำเสนอมีรูปแบบและความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยดังต่อไปนี้

$$t_4 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X} + \beta_{2(x)}}{\bar{x} + \beta_{2(x)}}\right) \tag{8}$$

$$MSE(t_4) = \lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + C_x^2 \theta_4 (\theta_4 - 2K)\right) \tag{9}$$

โดยที่ $\theta_4 = \dfrac{\bar{X}}{\bar{X} + \beta_{2(x)}}$

ในขณะที่ Yan & Tian (2010) ได้ขยายตัวประมาณอัตราส่วนของ Singh et al. (2004) โดยการนำสัมประสิทธิ์ความเบ้ (Coefficient of Skewness: $\beta_{1(x)}$) มาใช้แทนค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของตัวประมาณอัตราส่วนที่นำเสนอให้ดียิ่งขึ้น โดยตัวประมาณอัตราส่วนที่ Yan & Tian (2010) ได้นำเสนอขึ้นใหม่มีรูปแบบและความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยดังนี้

$$t_5 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X} + \beta_{1(x)}}{\bar{x} + \beta_{1(x)}}\right) \tag{10}$$

$$MSE(t_5) = \lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + C_x^2 \theta_5 (\theta_5 - 2K)\right) \tag{11}$$

โดยที่ $\theta_5 = \dfrac{\bar{X}}{\bar{X} + \beta_{1(x)}}$

นอกจากนี้ Nangsue (2009) ได้ค้นพบว่าถ้าหากนำเอาค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย (Regression Coefficient: b_1) ของตัวแปรช่วยอัตราส่วน x มาใช้ในการสร้างตัวประมาณอัตราส่วนตัวใหม่ ให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง จะทำให้ตัวประมาณอัตราส่วนตัวใหม่ที่สร้างขึ้นนั้นมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอัตราส่วนตัวเดิม ๆ ที่นักวิจัยหลาย ๆ ท่านเคยนำเสนอ โดยตัวประมาณอัตราส่วนตัวใหม่นี้ มีรูปแบบและความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยคือ

$$t_6 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)^{b_1} \tag{12}$$

$$MSE(t_6) = \lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + C_x^2 \theta_1 (\theta_1 - 2K)\right) \tag{13}$$

ต่อมา Soponviwatkul & Lawson (2017) ได้ขยายตัวประมาณอัตราส่วนที่นำเสนอโดย Singh et al. (2004) และ Yan & Tian (2010) โดยใช้แนวคิดในการสร้างตัวประมาณอัตราส่วนให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันเลขชี้กำลังที่นำเสนอโดย Nangsue (2009) โดยตัวประมาณอัตราส่วนที่ Soponviwatkul & Lawson (2017) นำเสนอใหม่มีรูปแบบดังนี้

$$t_7 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x} + C_x}\right)^{b_1} \tag{14}$$

$$t_8 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X} + \rho_{yx}}{\bar{x} + \rho_{yx}}\right)^{b_1} \tag{15}$$

และมีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยคือ

$$MSE(t_7) = \lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + b_1\theta_2 C_x^2 (b_1\theta_2 - 2K)\right) \tag{16}$$

$$MSE(t_8) = \lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + b_1\theta_3 C_x^2 (b_1\theta_3 - 2K)\right) \tag{17}$$

ในขณะที่ Lurdjariyaporn & Dansawad (2021) ได้ขยายแนวคิดของ Nangsue (2009) และ Soponviwatkul & Lawson (2017) โดยการพัฒนาและปรับปรุงประสิทธิภาพของตัวประมาณอัตราส่วนที่นำเสนอโดย Sisodia & Dwivedi (1981) และ Singh & Tailor (2003) ให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง โดยตัวประมาณอัตราส่วนที่นำเสนอใหม่นี้มีรูปแบบและมีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยดังต่อไปนี้

$$t_9 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X} + \beta_{2(x)}}{\bar{x} + \beta_{2(x)}}\right)^{b_1} \tag{18}$$

$$t_{10} = \bar{y}\left(\frac{\bar{X} + \beta_{1(x)}}{\bar{x} + \beta_{1(x)}}\right)^{b_1} \tag{19}$$

และมีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยคือ

$$MSE(t_9) = \lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + b_1\theta_4 C_x^2 (b_1\theta_4 - 2K) \right) \tag{20}$$

$$MSE(t_{10}) = \lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + b_1\theta_5 C_x^2 (b_1\theta_5 - 2K) \right) \tag{21}$$

จากตัวประมาณอัตราส่วนต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะปรับปรุงประสิทธิภาพของตัวประมาณอัตราส่วนสำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน โดยจะนำเสนอกลุ่มของตัวประมาณขึ้นมาใหม่ในรูปแบบของฟังก์ชันเลขชี้กำลังจากการขยายจากแนวคิดของ Nangsue (2009) โดยกลุ่มของตัวประมาณที่จะนำเสนอนี้จะครอบคลุมตัวประมาณที่ถูกนำเสนอโดย Cochran (1977) Sisodia & Dwivedi (1981) Singh & Tailor (2003) Singh et al. (2004) Yan & Tian (2010) Soponviwatkul & Lawson (2017) และ Lurdjariyaporn & Dansawad (2021) นอกจากนี้ผู้วิจัยจะศึกษาถึงคุณสมบัติที่สำคัญบางประการของกลุ่มของตัวประมาณที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ เช่น ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย และความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุด พร้อมทั้งจะทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของกลุ่มของตัวประมาณที่นำเสนอขึ้นมาใหม่กับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องในเชิงทฤษฎี และการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

วิธีดำเนินการวิจัย

จากตัวประมาณอัตราส่วนสำหรับการประมาณค่าเฉลี่ยประชากรดังที่กล่าวข้างต้น ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะปรับปรุงประสิทธิภาพของตัวประมาณต่าง ๆ และนำเสนอกลุ่มของตัวประมาณขึ้นมาใหม่ โดยใช้ประโยชน์จากสารสนเทศจากตัวแปรช่วย x ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน โดยกลุ่มของตัวประมาณที่ได้รับการปรับปรุงประสิทธิภาพและนำเสนอขึ้นมาใหม่นี้ มีรูปแบบดังนี้

$$t = \alpha \bar{y} + (1-\alpha)\bar{y}\left(\frac{\bar{X}+a}{\bar{x}+a} \right)^{b_1}$$

(22)

เมื่อ α คือค่าคงที่ใด ๆ ที่ทำให้กลุ่มของตัวประมาณ t มีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุด ในขณะที่ a คือค่าคงที่หรือฟังก์ชันที่คำนวณได้จากสารสนเทศจากตัวแปรช่วย x

จากกลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอในสมการที่ (22) ถ้าผู้วิจัยแทนค่าคงที่ α และ a จะปรากฏผลดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ตัวประมาณอัตราส่วนสำหรับการประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่ลดรูปมาจากกลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอ

ลำดับที่	ตัวประมาณ	ค่าคงที่		
		α	a	b_1
1	$t_0 = \bar{y}$	1	-	
2	$t_1 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)$ Cochran (1977)	0	0	1
3	$t_2 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}+C_x}{\bar{x}+C_x}\right)$ Sisodia & Dwivedi (1981)	0	C_x	1
4	$t_3 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}+\rho_{yx}}{\bar{x}+\rho_{yx}}\right)$ Singh & Tailor (2003)	0	ρ_{yx}	1
5	$t_4 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}+\beta_{2(x)}}{\bar{x}+\beta_{2(x)}}\right)$ Singh et al.(2004)	0	$\beta_{2(x)}$	1
6	$t_5 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}+\beta_{1(x)}}{\bar{x}+\beta_{1(x)}}\right)$ Yan & Tian (2010)	0	$\beta_{1(x)}$	1
7	$t_6 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)^{b_1}$ Nangsue (2009)	0	0	b_1
8	$t_7 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}+C_x}{\bar{x}+C_x}\right)^{b_1}$ Soponviwatkul & Lawson (2017)	0	C_x	b_1

ตารางที่ 1 (ต่อ)

ลำดับที่	ตัวประมาณ	ค่าคงที่		
		α	a	b_1
9	$t_8 = \bar{y}\left(\dfrac{\bar{X}+\rho_{yx}}{\bar{x}+\rho_{yx}}\right)^{b_1}$ Soponviwatkul & Lawson (2017)	0	ρ_{yx}	b_1
10	$t_9 = \bar{y}\left(\dfrac{\bar{X}+\beta_{2(x)}}{\bar{x}+\beta_{2(x)}}\right)^{b_1}$ Lurdjariyaporn & Dansawad (2021)	0	$\beta_{2(x)}$	b_1
11	$t_{10} = \bar{y}\left(\dfrac{\bar{X}+\beta_{1(x)}}{\bar{x}+\beta_{1(x)}}\right)^{b_1}$ Lurdjariyaporn & Dansawad (2021)	0	$\beta_{1(x)}$	b_1

เนื่องจาก $\bar{y}$ และ $\bar{x}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\bar{Y}$ และ $\bar{X}$ ตามลำดับ ในการหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณที่นำเสนอ ผู้วิจัยจะทำการแปลงกลุ่มของตัวประมาณที่นำเสนอ t ให้อยู่ในเทอมของค่าคลาดเคลื่อน (Error terms) ดังนั้นผู้วิจัยจึงกำหนดให้ $\bar{y}=\bar{Y}(1+e_0)$ และ $\bar{x}=\bar{X}(1+e_1)$

โดยที่ $E(e_0)=E(e_1)=0$, $E(e_0^2)=\lambda C_y^2$, $E(e_1^2)=\lambda C_x^2$ และ $E(e_0e_1)=\lambda\rho_{yx}C_yC_x$

จากนั้นผู้วิจัยจะแทนค่า $\bar{y}=\bar{Y}(1+e_0)$ และ $\bar{x}=\bar{X}(1+e_1)$ ลงในสมการ)22 (จะได้

$$t=\alpha\bar{Y}(1+e_0)+(1-\alpha)\bar{Y}(1+e_0)\left(\frac{\bar{X}+a}{\bar{X}(1+e_1)+a}\right)^{b_1}$$

$$=\alpha\bar{Y}(1+e_0)+(1-\alpha)\bar{Y}(1+e_0)\left(\frac{\bar{X}+a}{\bar{X}+\bar{X}e_1+a}\right)^{b_1} \tag{23}$$

เมื่อแทนค่า $\theta=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}+a}$ ลงในสมการที่ (23) จะได้ว่า

$$t = \alpha\bar{Y}(1+e_0) + (1-\alpha)\bar{Y}(1+e_0)\left(\frac{\frac{\bar{X}}{\theta}}{\frac{\bar{X}}{\theta} + \bar{X}e_1}\right)^{b_1}$$

$$= \alpha\bar{Y}(1+e_0) + (1-\alpha)\bar{Y}(1+e_0)\left(\frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\theta} + e_1}\right)^{b_1}$$

$$= \alpha\bar{Y}(1+e_0) + (1-\alpha)\bar{Y}(1+e_0)\left(\frac{1}{1+\theta e_1}\right)^{b_1}$$

$$= \alpha\bar{Y}(1+e_0) + (1-\alpha)\bar{Y}(1+e_0)(1+\theta e_1)^{-b_1}$$

$$= \alpha\bar{Y}(1+e_0) + (1-\alpha)\bar{Y}(1+e_0)(1 - b_1\theta e_1 + \frac{b_1(b_1+1)}{2}\theta^2 e_1^2)$$

$$= \alpha\bar{Y}(1+e_0) + (1-\alpha)\bar{Y}\left[1 - b_1\theta e_1 + \frac{b_1(b_1+1)}{2}\theta^2 e_1^2 + e_0 - b_1\theta e_0 e_1\right]$$

$$= \bar{Y}\left[1 - b_1\theta e_1 + \frac{b_1(b_1+1)}{2}\theta^2 e_1^2 + e_0 - b_1\theta e_0 e_1 + \alpha b_1\theta e_1 - \alpha\frac{b_1(b_1+1)}{2}\theta^2 e_1^2 + \alpha b_1\theta e_0 e_1\right]$$

$$= \bar{Y}\left[1 + e_0 + (\alpha-1)b_1\theta e_1 - (\alpha-1)\frac{b_1(b_1+1)}{2}\theta^2 e_1^2 + (\alpha-1)b_1\theta e_0 e_1\right] \qquad (24)$$

จากสมการที่ (24) สามารถหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของกลุ่มของตัวประมาณ t ได้ดังนี้

$$MSE(t) = E(t-\bar{Y})^2$$

$$= E\left[\bar{Y}(1 + e_0 + (\alpha-1)b_1\theta e_1 - (\alpha-1)\frac{b_1(b_1+1)}{2}\theta^2 e_1^2 + (\alpha-1)b_1\theta e_0 e_1) - \bar{Y}^2\right]^2$$

$$= \bar{Y}^2 E\left[e_0 + (\alpha-1)b_1\theta e_1 - (\alpha-1)\frac{b_1(b_1+1)}{2}\theta^2 e_1^2 + (\alpha-1)b_1\theta e_0 e_1\right]^2$$

$$= \bar{Y}^2 E\left[e_0^2 + (\alpha-1)^2 b_1^2\theta^2 e_1^2 + 2(\alpha-1)b_1\theta e_0 e_1\right] \qquad (25)$$

แทนค่า $E(e_0)=E(e_1)=0$, $E(e_0^2)=\lambda C_y^2$, $E(e_1^2)=\lambda C_x^2$, และ $E(e_0e_1)=\lambda\rho_{yx}C_yC_x$ ลงในสมการ (25) และจัดรูปสมการใหม่อีกครั้งจะได้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของกลุ่มของตัวประมาณ t คือ

$$MSE(t)=\bar{Y}^2\left[\lambda C_y^2+(\alpha-1)^2b_1^2\theta^2\lambda C_x^2+2(\alpha-1)b_1\theta\lambda\rho_{yx}C_yC_x\right]$$

$$=\lambda\bar{Y}^2\left[C_y^2+(\alpha-1)^2b_1^2\theta^2C_x^2+2(\alpha-1)b_1\theta\rho_{yx}C_yC_x\right] \tag{26}$$

แทนค่า $K=\dfrac{\rho_{yx}C_y}{C_x}$ ลงในสมการที่ (26) และจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$MSE(t)=\lambda\bar{Y}^2\left[C_y^2+(\alpha-1)^2b_1^2\theta^2C_x^2+2(\alpha-1)b_1\theta KC_x^2\right]$$

$$=\lambda\bar{Y}^2\left[C_y^2+(\alpha-1)b_1\theta C_x^2\left[(\alpha-1)b_1\theta+2K\right]\right] \tag{27}$$

ในการหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของกลุ่มของตัวประมาณ t ที่มีค่าต่ำที่สุด จะหาจากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $MSE(t)$ เทียบกับค่า α และให้เท่ากับ 0 จะได้

$$\frac{\partial MSE(t)}{\partial\alpha}=2\alpha b_1^2\theta^2C_x^2-2b_1^2\theta^2C_x^2+2b_1\theta\rho_{yx}C_yC_x=0 \tag{28}$$

แก้สมการหาค่า α จากสมการที่ (28) จะได้

$$\alpha=\frac{2b_1^2\theta^2C_x^2-2b_1\theta\rho_{yx}C_yC_x}{2\alpha b_1^2\theta^2C_x^2}$$

$$=1-\frac{\rho_{yx}C_y}{b_1\theta C_x}$$

$$=1-\frac{K}{b_1\theta}=\alpha_{opt} \tag{29}$$

และหาอนุพันธ์อันดับที่สองของ $MSE(t)$ เทียบกับค่า α จะได้

$$\frac{\partial^2MSE(t)}{\partial\alpha^2}=2b_1^2\theta^2C_x^2 \tag{30}$$

ภายใต้เงื่อนไข θ มีค่ามากกว่า 0 ซึ่งจะทำให้สมการ (30) มีค่ามากกว่า 0 เช่นเดียวกัน ดังนั้นจะได้ว่ากลุ่มของตัวประมาณ t จะมีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุด และจะแทนค่า α_{opt} จากสมการ (29) ลงในสมการ (27) จะได้

$$\min.MSE(t) = \lambda\bar{Y}^2\left[C_y^2 + ((1-K/b_1\theta)-1)b_1\theta C_x^2\left[((1-K/b_1\theta)-1)b_1\theta + 2K\right]\right]$$

$$= \lambda\bar{Y}^2\left[C_y^2 + \frac{-K}{b_1\theta}(b_1\theta C_x^2)\left[\frac{-K}{b_1\theta}(b_1\theta) + 2K\right]\right]$$

$$= \lambda\bar{Y}^2\left[C_y^2 - KC_x^2\left[-K+2K\right]\right]$$

$$= \lambda\bar{Y}^2\left[C_y^2 - KC_x^2\left[K\right]\right]$$

$$= \lambda\bar{Y}^2\left[C_y^2 - K^2C_x^2\right] \qquad (31)$$

และแทนค่า $K = \dfrac{\rho_{yx}C_y}{C_x}$ ลงในสมการที่ (31) จะได้

$$\min.MSE(t) = \lambda\bar{Y}^2\left[C_y^2 - \left(\frac{\rho_{yx}C_y}{C_x}\right)^2 C_x^2\right]$$

$$= \lambda\bar{Y}^2\left[C_y^2 - \rho_{yx}^2 C_y^2\right]$$

$$= \lambda\bar{Y}^2 C_y^2(1-\rho_{yx}^2) \qquad (32)$$

ผลการวิจัย

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างกลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอ และตัวประมาณตัวอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยจะพิจารณาจากค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด โดยจะทำการเปรียบเทียบในเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณเชิงทฤษฎี

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างกลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอ และตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องทางทฤษฎี จะพิจารณาภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ แสดงดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างกลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอ กับตัวประมาณตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

ลำดับที่	การเปรียบเทียบ	เงื่อนไข
1	$\min .MSE(t) < MSE(t_0)$	$\rho_{yx}^2 > 0$
2	$\min .MSE(t) < MSE(t_i);\ i = 1,...,5$	$(C_y \rho_{yx} - C_x \theta_i)^2 > 0$
3	$\min .MSE(t) < MSE(t_i);\ i = 6,...,10$	$(C_y \rho_{yx} - b_1 C_x \theta_{i-5})^2 > 0$

จากตารางที่ 2 พบว่า กลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขต่าง ๆ ที่กำหนดไว้ในตารางที่ 2 เป็นจริง

2. การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณโดยการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของกลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอกับตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยใช้ข้อมูลจริงจำนวน 2 ชุด โดยข้อมูลจริงชุดที่ 1 ได้จากการเก็บรวบรวมโดย Khare & Sinha (2004) เป็นข้อมูลเกี่ยวกับอัตราการเจริญเติบโตของนักเรียนที่เรียนอยู่ในเมืองพาราณสี แคว้นอุตรประเทศ ประเทศอินเดีย จำนวน 95 โรงเรียน โดยกำหนดให้น้ำหนักของนักเรียนแต่ละคน (หน่วยเป็นกิโลกรัม) เป็นตัวแปรที่สนใจศึกษา y และส่วนสูง (หน่วยเป็น เซนติเมตร) เป็นตัวแปรช่วย x ข้อมูลลักษณะประชากรที่เก็บรวบรวมได้มีดังต่อไปนี้

$$N = 95,\ n = 35,\ \bar{Y} = 19.4968,\ \bar{X} = 55.8611,\ \rho_{yx} = 0.8460,\ C_y = 0.1561,\ C_x = 0.0586,$$

$$\beta_{1(x)} = 0.7865,\ \beta_{2(x)} = 0.6829,\ S_y = 3.0435,\ S_x = 3.2735$$

ในขณะที่ข้อมูลชุดที่ 2 เป็นข้อมูลเกี่ยวกับพื้นที่เพาะปลูกข้าวสาลี ซึ่งเก็บรวบรวมโดย Daroga & Chaudhary (1986) เมื่อกำหนดให้ตัวแปรที่สนใจศึกษา y แทนพื้นที่เพาะปลูกข้าวสาลีในปี ค.ศ. 1974 และตัวแปรช่วย x แทนพื้นที่เพาะปลูกข้าวสาลีในปี ค.ศ. 1973 ข้อมูลลักษณะประชากรที่เก็บรวบรวมได้จากข้อมูลชุดที่ 2 มีดังต่อไปนี้

$$N = 34,\ n = 5,\ \bar{Y} = 199.4412,\ \bar{X} = 208.8824,\ \rho_{yx} = 0.9801,\ C_y = 0.7532,\ C_x = 0.7205,$$

$$\beta_{1(x)} = 0.8732,\ \beta_{2(x)} = 5.9123,\ S_y = 150.2150,\ S_x = 150.5060$$

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของกลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอกับตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง จะพิจารณาจากคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย โดยกลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ก็ต่อเมื่อ $MSE(t) < MSE(\hat{\theta})$ โดยที่ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณตัวอื่น ๆ จากนั้นจะทำการคำนวณหาค่าร้อยละประสิทธิภาพ)Percent Relative Efficiency: PRE((Singh & Choudhury, 2012) จาก

$$PRE(\hat{\theta}, \bar{y}) = \frac{MSE(\bar{y})}{MSE(\hat{\theta})} \times 100 \tag{33}$$

ผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณโดยการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงแสดงดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ค่า MSE และ PRE ของตัวประมาณภายใต้ประชากรที่ศึกษาจากข้อมูลชุดที่ 1 และ ชุดที่ 2

ข้อมูลชุดที่ 1			ข้อมูลชุดที่ 2		
ตัวประมาณ	MSE	PRE	**ตัวประมาณ**	MSE	PRE
t_0	0.1671	100.0000	t_0	3849.457	100.0000
t_1	0.0845	197.7269	t_1	153.8125	2502.6945
t_2	0.0846	197.5822	t_2	154.4494	2492.3740
t_3	0.0856	195.6754	t_3	154.6981	2488.3673
t_4	0.0859	194.9214	t_4	161.2481	2387.2886
t_5	0.0854	195.8170	t_5	154.5945	2490.0353
t_6	0.0629	265.5356	t_6	152.5150	2523.9862
t_7	0.0729	229.1340	t_7	152.5850	2522.8283
t_8	0.0849	196.7652	t_8	153.0150	2515.7387
t_9	0.0856	195.1570	t_9	153.6150	2505.9125
t_{10}	0.0829	201.5096	t_{10}	152.8150	2519.0312
t	0.0475	351.7609	t	151.6840	2537.8141

จากตารางที่ 3 ในการเลือกตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด ภายใต้ข้อมูลที่ทำการศึกษา จะเลือกจากตัวประมาณที่มีค่า MSE ที่ต่ำที่สุด และมีค่า PRE ที่สูงที่สุด (Jaroengeratikun & Lawson, 2019) และเมื่อพิจารณาภายใต้ข้อมูลที่ทำการศึกษาชุดเดียวกัน พบว่า ค่า MSE และ PRE ของตัวประมาณแต่ละตัว มีค่าที่ค่อนข้างใกล้เคียงกัน โดยกลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอ เป็นตัวประมาณ

เดียวที่มีค่า MSE ที่ต่ำที่สุด และมีค่า PRE ที่สูงที่สุด ดังนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่า กลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอ เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องทุกตัว

เมื่อพิจารณาจากข้อมูลชุดที่ 1 พบว่า นอกจากกลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอแล้ว ตัวประมาณ t_6 ที่มีการนำค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย (b_1) ของตัวแปรช่วยอัตราส่วน x มาใช้ในการเพิ่มประสิทธิภาพของตัวประมาณจะมีประสิทธิภาพที่ใกล้เคียงกับตัวกลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอมากที่สุด โดยมีประสิทธิภาพน้อยกว่ากลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอเพียง 1.3247 เท่า ในขณะที่ตัวประมาณ t_0 จัดเป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับกลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอน้อยที่สุด โดยตัวประมาณ t_0 มีประสิทธิภาพน้อยกว่ากลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอประมาณ 3.5176 เท่า

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาจากข้อมูลชุดที่ 2 พบว่า ตัวประมาณ t_6 มีประสิทธิภาพที่ใกล้เคียงกับกลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอมากที่สุด โดยมีประสิทธิภาพน้อยกว่ากลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอเพียง 1.0055 เท่า ในขณะที่ตัวประมาณ t_0 เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับกลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอน้อยที่สุด โดยตัวประมาณ t_0 มีประสิทธิภาพน้อยกว่ากลุ่มของตัวประมาณ t ที่นำเสนอประมาณ 25.3781 เท่า

สรุปผลการวิจัย

จากการนำเสนอกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนสำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากรในรูปแบบของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง จากการขยายแนวคิดของ Nangsue (2009) ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน ผลการศึกษาพบว่า กลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนที่นำเสนอขึ้นมาใหม่นี้ มีความครอบคลุมตัวประมาณอัตราส่วนที่ถูกนำเสนอโดย Cochran ((1977Sisodia & Dwivedi ((1981Singh & Tailor ((2003Singh et al. ((2004Yan & Tian ((2010Soponviwatkul & Lawson (2017) และ Lurdjariyaporn & Dansawad (2021) และเมื่อพิจารณาผลจากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนที่นำเสนอกับตัวประมาณอัตราส่วนตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง เช่น ตัวประมาณ t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9 และ t_{10} ทั้งในทางทฤษฎีและการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง พบว่า ให้ผลที่สอดคล้องกัน กล่าวคือ ภายใต้สถานการณ์เดียวกัน กลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนที่นำเสนอ t จะยังคงมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอื่น ๆ และมีประสิทธิภาพมากเพียงพอที่จะนำไปใช้ได้ต่อไป ในกรณีที่มีการศึกษาภายใต้สถานการณ์เดียวกันกับงานวิจัยฉบับนี้

เอกสารอ้างอิง

Chami, P. S., Sing. B. & Thomas, D. (2012). A two-parameter ratio-product-ratio estimator using auxiliary information. ISRN Probability and Statistics. 2012, 1-15.

Cochran, W. G. (1977). *Sampling Techniques*. (3rd ed), New York: John Wiley and Sons.

Daroga, S. & Chaudhary, F. S. (1986). *Sample Survey Designs.* New York*:* Wiley Eastern Limited*.*

Enang, E. I., Akpan, V. M., & Ekpenyong, E. J. (2014). Alternative ratio estimator of population mean in simple random sampling. Journal of Mathematics Research. 6(3), 54-61.

Jaroengeratikun, U. & Lawson, N. (2019). A combined family of ratio estimators for population mean using an auxiliary variable in simple random sampling. Journal of Mathematical and Fundamental Sciences. 51(1), 1-12.

Khare, B. B. & Sinha, R. R. (2004). Estimation of finite population ratio using two-phase sampling scheme in the presence of non-response. Aligarh Journal of Statistics. 24, 43-56.

Lurdjariyaporn, P. & Dansawad, N. (2021). Ratio estimators for estimating the population mean using coefficients of kurtosis and skewness of auxiliary variable. Journal of Research and Innovation in Science and Technology. Manuscript submitted for publication.

Nangsue, N. (2009). Adjusted ratio and regression type estimators for estimation of population mean when some observations are missing. World Academy of Science. 53, 787-790.

Singh, B. K. & Choudhury, S. (2012). A class of product-cum-dual to ratio estimator of finite population mean in simple random sampling, *Proceedings of the Annual International Conference on Computational Mathematics, Computational Geometry and Statistics (*p. 134-139). Singapore: Global Science and Technology Forum.

Singh, H. P. & Tailor, R. (2003). Use of known correlation coefficient in estimating the finite population mean. Statistics in Transition. 6, 555-560.

Singh, H. P., Tailor, R., & Kakaran, M.S. (2004). An estimator of population mean using power transformation. Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics. 58(2), 223-230.

Sisodia, B. V. S. & Dwivedi, V. K. (1981). A modified ratio estimator using coefficient of variation of auxiliary variable. Journal of Indian Society Agricultural Statistics. 33, 13-18.

Soponviwatkul, K. & Lawson, N. (2017). New ratio estimators for estimating population mean in simple random sampling using a coefficient of variation, correlation coefficient and a regression coefficient. Gazi University Journal of Science, 30, 610-621.

Subzar, M., Maqbool, S., Raja. T. A. & Sharma, P. (2019). A new ratio Estimator: An alternative to regression estimator in survey sampling using auxiliary information. STATISTICS IN TRANSITION new series, 20(4), 181-189.

Swain, A. K. P. C. (2013). On some modified ratio and product type estimators-revisited. Revista Investigación Operacional. 34(1), 35-57.

Yan, Z. & Tian, B. (2010). Ratio method to the mean estimation using coefficient of skewness of auxiliary variable. Communications in Computer and Information Science. 106, 103-110.