รูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มอย่างง่าย โดยใช้สารสนเทศจากตัวแปรช่วย

A General Ratio Type of Exponential Estimator for Estimating the Population Mean Under Simple Random Sampling Using the Information of Auxiliary Variable

ภัททิตา เลิศจริยพร[1] และณภัทณ์จันทร์ ด่านสวัสดิ์[2] *
[1]คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยหัวเฉียวเฉลิมพระเกียรติ
[2]คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์
ผู้นิพนธ์หลัก (Corresponding Author) E-mail: napattchan@vru.ac.th

Received: March 15,2021 Revised: June 12,2021 Accepted: June 30,2021

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มอย่างง่ายแบบไม่ใส่คืน (Simple Random Sampling Without Replacement: SRSWOR) โดยใช้สารสนเทศจากตัวแปรช่วย (Auxiliary Variable: x) ซึ่งผู้วิจัยได้พัฒนาตัวประมาณนี้ขึ้นมาจากตัวประมาณที่นำเสนอโดย Cochran (1977) Sisodia & Dwivedi (1981) Bahl & Tuteja (1991) Singh & Tailor (2003) Singh et al. (2004) และ Yan & Tian (2010) นอกจากนี้ผู้วิจัยได้มีการศึกษาคุณสมบัติที่สำคัญบางประการของรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ ได้แก่ ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error: MSE) และจะทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณที่นำเสนอที่นำเสนอกับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องผ่านทางทฤษฎี และการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง ผลการวิจัยพบว่า รูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่นำเสนอ มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง เมื่อพิจารณาจากค่าร้อยละประสิทธิภาพสัมพัทธ์ (Percent Relative Efficiencies: PRE)

คำสำคัญ: ตัวประมาณอัตราส่วน, ค่าเฉลี่ยประชากร, ตัวแปรช่วย, การเลือกตัวอย่างสุ่มอย่างง่าย

Abstract

This paper presents a general ratio type of exponential estimator for estimating the population mean under simple random sampling without replacement (SRSWOR). The author has developed the estimator that proposed by Cochran (1977), Sisodia & Dwivedi (1981), Bahl & Tuteja (1991), Singh & Tailor (2003), Singh et al. (2004), and Yan & Tian (2010). In addition, some important properties of the suggested estimators such as Mean Squared Error (MSE) have been obtained. Furthermore, theoretical and empirical studies were used in order to access the performance of the suggested estimators. The results of this study show that the suggested estimators are more efficient under percent of relative efficiencies (PRE) criterion compared to other relevant estimators.

Keywords: Ratio Estimators, Population Mean, Auxiliary Variable, Simple Random Sampling

บทนำ

ในการวิจัยเชิงสำรวจ ผู้วิจัยมักเผชิญกับปัญหาหรืออุปสรรคต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการเก็บรวบรวมข้อมูลจากประชากรที่สนใจศึกษา เช่น จำนวนประชากรที่สนใจศึกษามีขนาดใหญ่เกินไป มีงบประมาณไม่เพียงพอ หรือมีเวลาที่จำกัดสำหรับการสำรวจข้อมูล ฯลฯ และหนึ่งในวิธีที่นิยมใช้สำหรับการแก้ปัญหาหรืออุปสรรคดังกล่าวข้างต้น คือ การเลือกตัวอย่างที่เป็นตัวแทนที่ดีของประชากร ซึ่งต้องอาศัยวิธีทางสถิติที่เรียกว่า เทคนิคการเลือกตัวอย่าง (Sampling Technique) เข้ามาช่วยเพื่อให้ได้ตัวอย่างที่มีความใกล้เคียงกับประชากรที่สนใจศึกษามากที่สุด เมื่อได้ข้อมูลที่ต้องการจากตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรแล้ว จึงนำไปสร้างตัวประมาณ (Estimator) โดยตัวประมาณที่ได้นั้นจะนำไปใช้ในการวิเคราะห์และสรุปผลเกี่ยวกับลักษณะของประชากรที่สนใจศึกษา กล่าวคือ เมื่อทำการสุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรขนาด N ด้วยการสุ่มตัวอย่างอย่างง่ายแบบไม่ใส่คืน การประมาณค่าเฉลี่ยประชากร (Population Mean: $\bar{Y}$) จะถูกประมาณด้วยค่าเฉลี่ยตัวอย่าง (Sample Mean: $\bar{y}$) ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (Unbiased Estimator) และมีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณดังต่อไปนี้

$$MSE(\bar{y}) = \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2 C_y^2 \tag{1}$$

โดยที่ $f = \dfrac{n}{N}$, $C_y^2 = \dfrac{S_y^2}{\bar{Y}^2}$, $S_y^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{Y})^2 / (N-1)$

เมื่อ C_y คือ สัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรที่สนใจศึกษา y

S_y^2 คือ ความแปรปรวนของประชากรของตัวแปรที่สนใจศึกษา y

นอกจากนี้ นักวิจัยหลาย ๆ ท่านนิยมนำตัวแปรช่วย x ที่มีความสัมพันธ์กับตัวแปรที่สนใจศึกษา (Study Variable: y) เข้ามาเพิ่มประสิทธิภาพในการประมาณค่าเฉลี่ยประชากรให้ดียิ่งขึ้น อาทิ Cochran (1977) ได้เสนอตัวประมาณอัตราส่วนของค่าเฉลี่ยประชากร (Ratio Estimator) หรือเรียกว่าอีกอย่างหนึ่งว่า ตัวประมาณอัตราส่วนดั้งเดิม (Classical Ratio Estimator) ซึ่งเป็นตัวประมาณที่มีความคงเส้นคงวา (Consistent) และเป็นตัวประมาณที่มีความเอนเอียง (Bias) แต่หากตัวอย่างมีขนาดใหญ่เพียงพอ ความเอนเอียงนี้จะมีขนาดเล็กมากจนไม่ต้องคำนึงถึง โดยที่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่สนใจศึกษา y และตัวแปรช่วย x จะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นในทิศทางเดียวกัน ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\hat{\bar{Y}}_1 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right) \tag{2}$$

โดยที่ $\bar{X}$ คือ ค่าเฉลี่ยของประชากรซึ่งเป็นตัวแปรช่วย x และทราบค่า

$\bar{y}$ คือ ค่าเฉลี่ยตัวอย่างของตัวแปรที่สนใจศึกษา y

$\bar{x}$ คือ ค่าเฉลี่ยตัวอย่างของตัวแปรช่วย x

โดยค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_1$ จะหาได้จาก

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_1) = \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2\theta_1(1-2K)\right) \tag{3}$$

เมื่อ $K = \dfrac{\rho_{yx} C_y}{C_x}$, $C_x^2 = \dfrac{S_x^2}{\bar{X}^2}$, $S_x^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{X})^2 / (N-1)$, $\theta_1 = \dfrac{\bar{X}}{\bar{X}} = 1$

โดยที่ C_x คือ สัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรช่วย x

ρ_{yx} คือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของประชากรระหว่างตัวแปรที่สนใจศึกษา y และตัวแปรช่วย x

S_x^2 คือ ความแปรปรวนของประชากรของตัวแปรที่สนใจศึกษา x

ต่อมา Sisodia & Dwivedi (1981) ได้ปรับปรุงประสิทธิภาพของตัวประมาณอัตราส่วนของค่าเฉลี่ยประชากร ที่นำเสนอโดย Cochran (1977) โดยนำสัมประสิทธิ์ความแปรผัน (Coefficient of Variation:

C_x) ของตัวแปรช่วย x มาใช้ในการเพิ่มประสิทธิภาพของตัวประมาณ โดยตัวประมาณที่นำเสนอขึ้นมาใหม่มีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\hat{\bar{Y}}_2 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}+C_x}{\bar{x}+C_x}\right) \tag{4}$$

โดยค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_2$ จะหาได้จาก

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_2) = \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2\theta_2(\theta_2 - 2K)\right) \tag{5}$$

เมื่อ $\theta_2 = \dfrac{\bar{X}}{\bar{X}+C_x}$

ในขณะที่ Singh & Tailor (2003) ได้นำค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient: ρ_{yx}) มาใช้ในหาตัวประมาณอัตราส่วนของค่าเฉลี่ยประชากร โดยตัวประมาณอัตราส่วนที่นำเสนอ คือ

$$\hat{\bar{Y}}_3 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}+\rho_{yx}}{\bar{x}+\rho_{yx}}\right) \tag{6}$$

โดยค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_3$ จะหาได้จาก

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_3) = \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2\theta_3(\theta_3 - 2K)\right) \tag{7}$$

เมื่อ $\theta_3 = \dfrac{\bar{X}}{\bar{X}+\rho_{yx}}$

Singh et al. (2004) ได้ขยายตัวประมาณอัตราส่วนของ Singh & Tailor (2003) โดยใช้ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง (Coefficient of Kurtosis: β_2) มาใช้ในการเสนอตัวประมาณอัตราส่วนของค่าเฉลี่ยประชากรใหม่ ดังรูปแบบต่อไปนี้

$$\hat{\bar{Y}}_4 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}+\beta_2}{\bar{x}+\beta_2}\right) \tag{8}$$

โดยค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_4$ จะหาได้จาก

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_4) = \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2\theta_4(\theta_4 - 2K)\right) \tag{9}$$

เมื่อ $\theta_4 = \dfrac{\bar{X}}{\bar{X} + \beta_2}$

จากนั้น Yan & Tian (2010) ได้ประยุกต์ตัวประมาณอัตราส่วนของ Singh et al. (2004) โดยนำค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ (Coefficient of Skewness: β_1) ของตัวแปรช่วย x มาใช้ในการเสนอตัวประมาณอัตราส่วนของค่าเฉลี่ยประชากร โดยตัวประมาณตัวใหม่ที่นำเสนอคือ

$$\hat{\bar{Y}}_5 = \bar{y}\left(\frac{\bar{X} + \beta_1}{\bar{x} + \beta_1}\right) \tag{10}$$

โดยค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_5$ จะหาได้จาก

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_5) = \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2\theta_5(\theta_5 - 2K)\right) \tag{11}$$

เมื่อ $\theta_5 = \dfrac{\bar{X}}{\bar{X} + \beta_1}$

ย้อนกลับไปในปี 1991 Bahl & Tuteja (1991) ได้นำเสนอตัวประมาณอีกรูปแบบหนึ่ง โดยนำฟังก์ชันเลขชี้กำลัง มาสร้างตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอัตราส่วนที่พบได้โดยทั่วไป และให้ชื่อตัวประมาณที่สร้างใหม่นี้ว่าตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง (Ratio-Type Exponential Estimator) มีรูปแบบของตัวประมาณคือ

$$\hat{\bar{Y}}_6 = \bar{y}\exp\left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}}\right) \tag{12}$$

โดยค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_6$ จะหาได้จาก

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_6) = \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C_y^2 + \frac{C_x^2}{4}(1-4K)\right] \tag{13}$$

จากตัวประมาณต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะนำเสนอรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มอย่างง่ายแบบไม่ใส่คืน โดยใช้สารสนเทศจากตัวแปรช่วย ซึ่งผู้วิจัยได้พัฒนามาจากตัวประมาณที่ถูกนำเสนอโดย Cochran (1977) Sisodia & Dwivedi (1981) Bahl & Tuteja (1991) Singh & Tailor (2003) Singh et al. (2004) และ Yan & Tian (2010) นอกจากนี้ผู้วิจัยจะมีการศึกษาคุณสมบัติที่สำคัญบางประการของรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณที่นำเสนอ ได้แก่ ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย พร้อมทั้งจะทำการ

เปรียบเทียบประสิทธิภาพของรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอกับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องในเชิงทฤษฎี และการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

วิธีดำเนินการวิจัย

1. การนำเสนอรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร

ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน ผู้วิจัยได้ทำการเสนอรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร โดยจะพัฒนาจากตัวประมาณที่นำเสนอโดย Cochran (1977) Sisodia & Dwivedi (1981) Bahl & Tuteja (1991) Singh & Tailor (2003) Singh et al. (2004) และ Yan & Tian (2010) ดังสมการที่ (2) (4) (6) (8) (12) และ (10) ตามลำดับ โดยรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับการประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่นำเสนอขึ้นใหม่ เกิดจากการที่ผู้วิจัยแทนค่า $\bar{y}$ ในสมการที่ (12) ด้วย $\bar{y}\left(\dfrac{\bar{X}+\tau}{\bar{x}+\tau}\right)$ เมื่อ τ คือค่าคงที่ หรือค่าสารสนเทศจากตัวแปรช่วย x ที่สนใจศึกษาเช่น 0, C_x , ρ_{yx} , β_2 และ β_1 เป็นต้น ดังนั้นรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ จะมีรูปแบบดังนี้

$$\hat{\bar{Y}}_N = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}+\tau}{\bar{x}+\tau}\right)\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) \tag{14}$$

ข้อสังเกตเมื่อพิจารณาจากพจน์ $\bar{y}\left(\dfrac{\bar{X}+\tau}{\bar{x}+\tau}\right)$ ถ้าผู้วิจัยแทนค่า τ ด้วย 0 จะทำให้พจน์ $\bar{y}\left(\dfrac{\bar{X}+\tau}{\bar{x}+\tau}\right)$ กลายเป็นตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_1 = \bar{y}\left(\dfrac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)$ ที่ถูกนำเสนอโดย Cochran (1977) และถ้าแทนค่า τ ด้วย C_x , ρ_{yx} , β_2 และ β_1 ตามลำดับ จะทำให้พจน์ $\bar{y}\left(\dfrac{\bar{X}+\tau}{\bar{x}+\tau}\right)$ กลายเป็นตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_2 = \bar{y}\left(\dfrac{\bar{X}+C_x}{\bar{x}+C_x}\right)$, $\hat{\bar{Y}}_3 = \bar{y}\left(\dfrac{\bar{X}+\rho_{yx}}{\bar{x}+\rho_{yx}}\right)$, $\hat{\bar{Y}}_4 = \bar{y}\left(\dfrac{\bar{X}+\beta_2}{\bar{x}+\beta_2}\right)$ และ $\hat{\bar{Y}}_5 = \bar{y}\left(\dfrac{\bar{X}+\beta_1}{\bar{x}+\beta_1}\right)$ ที่ถูกนำเสนอโดย Sisodia & Dwivedi (1981) Singh & Tailor (2003) Singh et al. (2004) และ Yan & Tian (2010) ตามลำดับ

2. การจัดรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง ให้อยู่ในเทอมความคลาดเคลื่อน (Error Terms)

ผู้วิจัยจะทำการจัดรูปแบบสมการที่)14(ใหม่ ให้อยู่ในเทอมความคลาดเคลื่อน โดยการกำหนดให้ $\bar{y}=\bar{Y}(1+e_0)$ และ $\bar{x}=\bar{X}(1+e_1)$ และเนื่องจาก $\bar{y}$ และ $\bar{x}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\bar{Y}$ และ $\bar{X}$ ตามลำดับ ดังนั้นจะได้ $E(e_0)=E(e_1)=0$, $E(e_0^2)=\dfrac{(1-f)}{n}C_y^2$, $E(e_1^2)=\dfrac{(1-f)}{n}C_x^2$, และ $E(e_0e_1)=\dfrac{(1-f)}{n}\rho_{yx}C_yC_x$

3. จากนั้นผู้วิจัยจะทำการคำนวณหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ แล้วจึงจะทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ กับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องในเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

ผลการวิจัย

1. จากสมการที่ (14) ผู้วิจัยจะทำการจัดรูปแบบสมการใหม่ ให้อยู่ในเทอมความคลาดเคลื่อน โดยการแทนค่า $\bar{y}=\bar{Y}(1+e_0)$ และ $\bar{x}=\bar{X}(1+e_1)$ จะได้

$$\hat{\bar{Y}}_N=\bar{Y}(1+e_0)\left(\frac{\bar{X}+\tau}{\bar{X}(1+e_1)+\tau}\right)\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{X}(1+e_1)}{\bar{X}+\bar{X}(1+e_1)}\right)$$

$$=\bar{Y}(1+e_0)\left(\frac{\bar{X}+\tau}{\bar{X}+\bar{X}e_1+\tau}\right)\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{X}-\bar{X}e_1}{\bar{X}+\bar{X}+\bar{X}e_1}\right)$$

$$=\bar{Y}(1+e_0)\left(\frac{\bar{X}+\tau}{\bar{X}+\bar{X}e_1+\tau}\right)\exp\left(\frac{-\bar{X}e_1}{2\bar{X}+\bar{X}e_1}\right)$$

$$=\bar{Y}(1+e_0)\left(\frac{1}{1+\theta_ie_1}\right)\exp\left(\frac{-e_1}{2+e_1}\right)$$

$$=\bar{Y}(1+e_0)(1+\theta_ie_1)^{-1}\exp\left(\left(\frac{-e_1}{2}\right)\left(1+\frac{e_1}{2}\right)^{-1}\right)$$

$$=\bar{Y}(1+e_0)(1-\theta_ie_1+\theta_i^2e_1^2)\left(1-\frac{e_1}{2}+\frac{e_1^2}{4}+\frac{e_1^2}{8}\right)$$

$$= \bar{Y}\left(1-\theta_i e_1+\theta_i^2 e_1^2+e_0-\theta_i e_0 e_1\right)\left(1-\frac{e_1}{2}+\frac{3e_1^2}{8}\right)$$

$$= \bar{Y}\left(1-\frac{e_1}{2}+\frac{3e_1^2}{8}-\theta_i e_1+\theta_i\frac{e_1^2}{2}+\theta_i^2 e_1^2+e_0-\frac{e_0 e_1}{2}-\theta_i e_0 e_1\right) \tag{15}$$

2. หลังจากผู้วิจัยได้มีการจัดรูปแบบสมการที่ (15) ให้อยู่ในเทอมความคลาดเคลื่อนแล้ว จากนั้นผู้วิจัยจะทำการหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_N$ จาก

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_N)=E(\hat{\bar{Y}}_N-\bar{Y})^2$$

$$= E\left(\bar{Y}\left(1-\frac{e_1}{2}+\frac{3e_1^2}{8}-\theta_i e_1+\theta_i\frac{e_1^2}{2}+\theta_i^2 e_1^2+e_0-\frac{e_0 e_1}{2}-\theta_i e_0 e_1\right)-\bar{Y}\right)^2$$

$$= \bar{Y}^2 E\left(-\frac{e_1}{2}+\frac{3e_1^2}{8}-\theta_i e_1+\theta_i\frac{e_1^2}{2}+\theta_i^2 e_1^2+e_0-\frac{e_0 e_1}{2}-\theta_i e_0 e_1\right)^2$$

$$= \bar{Y}^2 E\left(\frac{e_1^2}{4}+\theta_i^2 e_1^2+e_0^2+\theta_i e_1^2-e_0 e_1-2\theta_i e_0 e_1\right) \tag{16}$$

ทำการแทนค่า $E(e_0)=E(e_1)=0$, $E(e_0^2)=\frac{(1-f)}{n}C_y^2$, $E(e_1^2)=\frac{(1-f)}{n}C_x^2$ และ $E(e_0e_1)=\frac{(1-f)}{n}\rho_{yx}C_yC_x$ ลงในสมการที่ (16) และจัดรูปสมการใหม่อีกครั้ง จะได้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_N$ คือ

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_N)=\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{1}{4}C_x^2+\theta_i^2C_x^2+\theta_iC_x^2-\rho_{yx}C_yC_x-2\theta_i\rho_{yx}C_yC_x\right)$$

$$=\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2+(\frac{1}{4}C_x^2+\theta_i^2C_x^2+\theta_iC_x^2)-(\rho_{yx}C_yC_x+2\theta_i\rho_{yx}C_yC_x)\right)$$

$$=\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2+(\frac{1}{4}C_x^2+\theta_i^2C_x^2+\theta_iC_x^2)-(KC_x^2+2\theta_iKC_x^2)\right)$$

$$=\frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2+\frac{C_x^2}{4}\left[(4\theta_i^2+4\theta_i+1)-4K(1+2\theta_i)\right]\right)$$

$$= \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2 + \frac{C_x^2}{4}\left[(1+2\theta_i)^2 - 4K(1+2\theta_i)\right]\right)$$

$$= \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2 + (1+2\theta_i)\frac{C_x^2}{4}\left[(1+2\theta_i) - 4K\right]\right) \tag{17}$$

อีกทั้งผู้วิจัยจะทำการแทนค่าคงที่ หรือค่าสารสนเทศจากตัวแปรช่วย x เช่น 0, C_x , ρ_{yx} , β_2 และ β_1 ลงในสมการที่ (14) จะได้ตัวประมาณที่เป็นสมาชิกของรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ ดังนี้

$$\hat{\bar{Y}}_{N1} = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) \tag{18}$$

$$\hat{\bar{Y}}_{N2} = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}+C_x}{\bar{x}+C_x}\right)\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) \tag{19}$$

$$\hat{\bar{Y}}_{N3} = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}+\rho_{yx}}{\bar{x}+\rho_{yx}}\right)\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) \tag{20}$$

$$\hat{\bar{Y}}_{N4} = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}+\beta_2}{\bar{x}+\beta_2}\right)\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) \tag{21}$$

$$\hat{\bar{Y}}_{N5} = \bar{y}\left(\frac{\bar{X}+\beta_1}{\bar{x}+\beta_1}\right)\exp\left(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\right) \tag{22}$$

และผู้วิจัยจะทำการแทนค่า $\theta_i; i = 1, 2, ..., 5$ ลงในสมการที่ (17) เพื่อหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{N1}$, $\hat{\bar{Y}}_{N2}$, $\hat{\bar{Y}}_{N3}$, $\hat{\bar{Y}}_{N4}$ และ $\hat{\bar{Y}}_{N5}$ จะได้

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{N1}) = \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2 + (1+2)\frac{C_x^2}{4}\left[(1+2) - 4K\right]\right) \tag{23}$$

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{N2}) = \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2 + (1+2\theta_2)\frac{C_x^2}{4}\left[(1+2\theta_2) - 4K\right]\right) \tag{24}$$

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{N3}) = \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2 + (1+2\theta_3)\frac{C_x^2}{4}\left[(1+2\theta_3) - 4K\right]\right) \tag{25}$$

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{N4}) = \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2 + (1+2\theta_4)\frac{C_x^2}{4}\left[(1+2\theta_4)-4K\right]\right) \quad (26)$$

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{N5}) = \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left(C_y^2 + (1+2\theta_5)\frac{C_x^2}{4}\left[(1+2\theta_5)-4K\right]\right) \quad (27)$$

3. ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง ที่นำเสนอ $\hat{\bar{Y}}_N$ กับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยจะพิจารณาจากค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย โดยจะทำการเปรียบเทียบในเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง ดังรายละเอียดต่อไปนี้

3.1 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง $\hat{\bar{Y}}_N$ กับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ในเชิงทฤษฎี จะพิจารณาภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ แสดงดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง $\hat{\bar{Y}}_N$ กับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

รูปแบบทั่วไปของตัวประมาณที่นำเสนอ	ตัวประมาณที่เปรียบเทียบ	เงื่อนไข
$\hat{\bar{Y}}_N$	$\bar{y}$	$\rho_{yx} > \frac{\left[C_x^2(1+2\theta_i)^2 - 2^2\right]}{4C_yC_x(1+2\theta_i)}$
	$\hat{\bar{Y}}_1$	$\rho_{yx} > \frac{\left[(1+2\theta_i)^2 - 4\theta_1\right]C_x}{4\left[(1+2\theta_i) - 2\theta_1\right]C_y}$
	$\hat{\bar{Y}}_2$	$\rho_{yx} > \frac{\left[(1+2\theta_i)^2 - 4\theta_2\right]C_x}{4\left[(1+2\theta_i) - 2\theta_2\right]C_y}$
	$\hat{\bar{Y}}_3$	$\rho_{yx} > \frac{\left[(1+2\theta_i)^2 - 4\theta_3\right]C_x}{4\left[(1+2\theta_i) - 2\theta_3\right]C_y}$

ตารางที่ 1 (ต่อ)

รูปแบบทั่วไปของตัวประมาณที่นำเสนอ	ตัวประมาณที่เปรียบเทียบ	เงื่อนไข
$\hat{\bar{Y}}_N$	$\hat{\bar{Y}}_4$	$\rho_{yx} > \frac{\left[(1+2\theta_i)^2-4\theta_4\right]C_x}{4\left[(1+2\theta_i)-2\theta_4\right]C_y}$
	$\hat{\bar{Y}}_5$	$\rho_{yx} > \frac{\left[(1+2\theta_i)^2-4\theta_5\right]C_x}{4\left[(1+2\theta_i)-2\theta_5\right]C_y}$
	$\hat{\bar{Y}}_6$	$\rho_{yx} > \frac{\left[1+\theta_i\right]C_x}{2C_y}$

จากตารางที่ 1 พบว่า รูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง $\hat{\bar{Y}}_N$ ที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}$, $\hat{\bar{Y}}_1$, $\hat{\bar{Y}}_2$, $\hat{\bar{Y}}_3$, $\hat{\bar{Y}}_4$, $\hat{\bar{Y}}_5$ และ $\hat{\bar{Y}}_6$ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขต่าง ๆ ที่กำหนดไว้ในตารางที่ 1 เป็นจริง

ตารางที่ 2 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณที่เป็นสมาชิกของ $\hat{\bar{Y}}_N$ กับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

ตัวประมาณที่เป็นสมาชิกของ $\hat{\bar{Y}}_N$	ตัวประมาณที่เปรียบเทียบ	เงื่อนไข
$\hat{\bar{Y}}_{Ni}; i=1,2,...,5$	$\bar{y}$	$\rho_{yx} > \frac{\left[C_x^2(1+2\theta_i)^2-2^2\right]}{4C_yC_x(1+2\theta_i)}$
$\hat{\bar{Y}}_{N1}$	$\hat{\bar{Y}}_1$	$\rho_{yx} > \frac{\left[1+4\theta_1^2\right]C_x}{4C_y}$
$\hat{\bar{Y}}_{N2}$	$\hat{\bar{Y}}_2$	$\rho_{yx} > \frac{\left[1+4\theta_2^2\right]C_x}{4C_y}$
$\hat{\bar{Y}}_{N3}$	$\hat{\bar{Y}}_3$	$\rho_{yx} > \frac{\left[1+4\theta_3^2\right]C_x}{4C_y}$
$\hat{\bar{Y}}_{N4}$	$\hat{\bar{Y}}_4$	$\rho_{yx} > \frac{\left[1+4\theta_4^2\right]C_x}{4C_y}$
$\hat{\bar{Y}}_{N5}$	$\hat{\bar{Y}}_5$	$\rho_{yx} > \frac{\left[1+4\theta_5^2\right]C_x}{4C_y}$
$\hat{\bar{Y}}_{Ni}; i=1,2,...,5$	$\hat{\bar{Y}}_6$	$\rho_{yx} > \frac{\left[1+\theta_i\right]C_x}{2C_y}$

จากตารางที่ 2 พบว่า ตัวประมาณที่เป็นสมาชิกของ $\hat{\bar{Y}}_N$ ซึ่งได้แก่ $\hat{\bar{Y}}_{N1}$, $\hat{\bar{Y}}_{N2}$, $\hat{\bar{Y}}_{N3}$, $\hat{\bar{Y}}_{N4}$ และ $\hat{\bar{Y}}_{N5}$ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ $\bar{y}$, $\hat{\bar{Y}}_1$, $\hat{\bar{Y}}_2$, $\hat{\bar{Y}}_3$, $\hat{\bar{Y}}_4$, $\hat{\bar{Y}}_5$ และ $\hat{\bar{Y}}_6$ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขต่าง ๆ ที่กำหนดไว้ในตารางที่ 2 เป็นจริง

3.2 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง $\hat{\bar{Y}}_N$ กับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง โดยใช้ประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง ผู้วิจัยใช้ข้อมูลจริงจำนวน 2 ชุด จากการเก็บรวบรวมโดย Cochran (1977) และ Singh & Chaudhary (1986) รายละเอียดข้อมูลลักษณะประชากรที่เก็บรวบรวมได้แสดงดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ลักษณะประชากรของข้อมูลทั้ง 2 ชุด

ค่าพารามิเตอร์	Cochran (1977)	Singh & Chaudhary (1986)
	ข้อมูลชุดที่ 1	**ข้อมูลชุดที่ 2**
N	49	22
n	20	5
$\bar{Y}$	116.1633	22.6209
$\bar{X}$	98.6735	1,467.5455
ρ_{yx}	0.6904	0.9022
S_y	98.8286	33.0469
C_y	0.8508	1.4609
S_x	102.9709	2,562.1449
C_x	1.0436	1.7459
β_1	2.4224	3.3914
β_2	5.9878	13.3694

ในการศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง $\hat{\bar{Y}}_N$ กับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ผู้วิจัยจะใช้ค่าร้อยละประสิทธิภาพ (Percent Relative Efficiency: PRE)เป็นเกณฑ์ที่ใช้ในการพิจารณาประสิทธิภาพของตัวประมาณ โดยผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพแสดงดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 ค่า PRE ของตัวประมาณอัตราส่วนต่าง ๆ ที่ศึกษาจากข้อมูลชุดที่ 1 และ 2 เทียบกับตัวประมาณ $\bar{y}$

ตัวประมาณ	ข้อมูลชุดที่ 1	ข้อมูลชุดที่ 2
$\bar{y}$	100.0000	100.0000
$\hat{\bar{Y}}_1$	123.3244	115.6993
$\hat{\bar{Y}}_2$	125.4285	115.8105
$\hat{\bar{Y}}_3$	124.7191	115.7568
$\hat{\bar{Y}}_4$	135.0373	116.5357
$\hat{\bar{Y}}_5$	128.1701	115.9147
$\hat{\bar{Y}}_6$	**188.9318**	**114.7652**
$\hat{\bar{Y}}_{N1}$	216.9839	124.8207
$\hat{\bar{Y}}_{N2}$	231.7415	125.2157
$\hat{\bar{Y}}_{N3}$	188.9318	114.7652
$\hat{\bar{Y}}_{N4}$	**244.9527**	**127.8688**
$\hat{\bar{Y}}_{N5}$	233.2347	125.5887

จากตารางที่ 4 เมื่อพิจารณาเฉพาะตัวประมาณอัตราส่วนที่ถูกนำเสนอโดย Cochran (1977) Sisodia & Dwivedi (1981) Singh & Tailor (2003) Singh et al. (2004) Yan & Tian (2010) และ Bahl & Tuteja (1991) ซึ่งได้แก่ตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_1$, $\hat{\bar{Y}}_2$, $\hat{\bar{Y}}_3$, $\hat{\bar{Y}}_4$, $\hat{\bar{Y}}_5$ และ $\hat{\bar{Y}}_6$ ตามลำดับ จะพบว่าตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_6$ เป็นตัวประมาณที่มีค่า PRE ที่สูงที่สุด โดยมีตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_4$ เป็นตัวประมาณที่มีค่า PRE สูงรองลงมา

ในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณาตัวประมาณที่เป็นสมาชิกของรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง $\hat{\bar{Y}}_N$ ซึ่งได้แก่ ตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{N1}$, $\hat{\bar{Y}}_{N2}$, $\hat{\bar{Y}}_{N3}$, $\hat{\bar{Y}}_{N4}$ และ $\hat{\bar{Y}}_{N5}$ จะพบว่า ตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{N4}$ จะมีค่า PRE ที่สูงที่สุดเมื่อเทียบกับค่า PRE ของตัวประมาณตัวอื่น ๆ โดยมีตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{N5}$ เป็นตัวประมาณที่มีค่า PRE สูงรองลงมา

เมื่อเปรียบเทียบค่า PRE ระหว่างตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_6$ และ $\hat{\bar{Y}}_{N4}$ จะพบว่า ตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{N4}$ มีค่า PRE ที่สูงกว่าตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_6$ นั่นหมายความว่า ภายใต้ค่า PRE ของข้อมูลที่ทำการศึกษาทั้ง 2 ชุด ตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_{N4}$ เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพดีที่สุดสำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การศึกษาจากข้อมูลจริงทั้ง 2 ชุด ที่เก็บรวบรวมโดย Cochran (1977) และ Singh & Chaudhary (1986)

โดยที่ตัวประมาณ $\hat{\bar{Y}}_6$ จะมีประสิทธิภาพดีรองลงมา เมื่อเปรียบเทียบกับตัวประมาณทุกตัวที่ทำการศึกษาในงานวิจัยฉบับนี้

สรุปผลการวิจัย

จากการนำเสนอรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน โดยใช้สารสนเทศจากตัวแปรช่วย x ซึ่งพัฒนามาจากตัวประมาณที่นำเสนอโดย Cochran (1977) Sisodia & Dwivedi (1981) Bahl & Tuteja (1991) Singh & Tailor (2003) Singh et al. (2004) และ Yan & Tian (2010) พบว่า ผลจากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างรูปแบบทั่วไปของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง ที่นำเสนอ กับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง เช่น ตัวประมาณ $\bar{y}$, $\hat{\bar{Y}}_1$, $\hat{\bar{Y}}_2$, $\hat{\bar{Y}}_3$, $\hat{\bar{Y}}_4$, $\hat{\bar{Y}}_5$, และ $\hat{\bar{Y}}_6$ ทั้งในทางทฤษฎีและประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงให้ผลที่สอดคล้องกัน กล่าวคือ ภายใต้สถานการณ์ที่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรช่วย x กับตัวแปรที่สนใจศึกษา y มีค่าเป็นบวก ตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ จะยังคงมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณตัวอื่น ๆ ดังนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่า ตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอมีประสิทธิภาพมากเพียงพอที่จะนำไปใช้ได้ต่อไปในกรณีที่มีการศึกษาภายใต้สถานการณ์เดียวกันกับงานวิจัยฉบับนี้

เอกสารอ้างอิง

Bahl, S. & Tuteja, R.K. (1991). Ratio and product type estimator. Journal of Information and Optimization Sciences, (12), 159-163.

Cochran, W. G. (1977). *Sampling Techniques*. (3rd ed), New York: John Wiley and Sons.

Singh, D. & Chaudhary, F. S. (1986). *Theory and Analysis of Sample Survey Designs*. New York: New Age International Private Limited.

Singh, H. P. & Tailor, R. (2003). Use of known correlation coefficient in estimating the finite population mean. Statistics in Transition. 6, 555-560.

Singh, H.P., Tailor, R., & Kakaran, M. S. (2004). An estimator of population mean using power transformation. Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics. 58(2), 223-230.

Sisodia, B. V. S. & Dwivedi, V. K. (1981). A modified ratio estimator using coefficient of variation of auxiliary variable. Journal of Indian Society Agricultural Statistics. 33, 13-18.

Yan, Z. & Tian, B. (2010). Ratio method to the mean estimation using coefficient of skewness of auxiliary variable. Communications in Computer and Information Science. 106, 103-110.