

กิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณ
เชิงกราฟ สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี

INSTRUCTIONAL ACTIVITY ON LIMITS AND CONTINUITY OF A FUNCTION BY
USING A GRAPHING CALCULATOR FOR UNDERGRADUATES

เคมีจิรา เตียงอยู่^{1*}, กฤติธี อนันต์², ปิยดา โพธิ์ศรี³, สุดาภรณ์ ภูแพร์⁴ และนภลัย เหล่ามะลอ⁵
Khemjira Tiengyoo^{1*}, Krittitee Anan², Piyada Phosri³, Sudaporn Poopra⁴ and Napalai Laomalaw⁵

Received: October 15, 2021

Revised: October 29, 2021

Accepted: December 29, 2021

ABSTRACT

The researchers had constructed the instructional activity on limits and continuity of a function by using a graphing calculator to enhance understanding levels of mathematical conceptual on limits and continuity of a function based on APOS theory and students' satisfaction after used our constructed activity. Students would understand the concept of convergence of a function by observed left and right limit of a function conducted by a graphing calculator. The study was conducted during the first semester of the 2021 academic year with undergraduates of the Department of Logistics Management, Thepsatri Rajabhat University. The experiment group with 60 students was using the cluster random sampling approach. The researchers taught the group for three periods of 180 minutes each. Final achievement on limits and continuity of a function test were used to assess the undergraduates' performance. Moreover, the selected sample was given a questionnaire to measure his/her satisfaction toward instructional activity. The results of the study were as follows: 1) The effectiveness of the instructional activity on the limits and continuity of a function by using a graphing calculator for undergraduates were 87.28/82.66, which is higher than the criteria of 80/80. 2) Limits and continuity of a function showed that the mean score of the action level was 16.45, the process level was 11.02, and the object level was 9.11, where the total marks are 20, 15, and 15, respectively. 3) The satisfaction toward the instructional activity on limits and continuity of a function by using a graphing calculator achieved a high score.

Keywords: Limits and continuity of a function; APOS theory; Graphing calculator

*Corresponding Author E-mail: khemjira.ty@gmail.com

^{1,3,4,5} ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี จ.ลพบุรี 15000

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University,
Lopburi 15000 Thailand

²ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10330

Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Chulalongkorn University,
Bangkok 10330 Thailand

บทคัดย่อ

คณะผู้วิจัยได้พัฒนากิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ เพื่อเสริมสร้างระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ตามกรอบทฤษฎี APOS และสอบถามความพึงพอใจที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนที่คณะผู้วิจัยพัฒนาขึ้น โดยนักศึกษาเกิดความเข้าใจเชิงมโนทัศน์เกี่ยวกับการเข้าสู่ของฟังก์ชันผ่านการสังเกตการเข้าสู่ลิ้มิตทางซ้ายและลิ้มิตทางขวาของฟังก์ชันโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ซึ่งมีกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 3 สาขาการจัดการโลจิสติกส์ มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2564 ซึ่งมีนักศึกษาจำนวน 60 คน นักศึกษาเหล่านี้ได้จากการสุ่มแบบแบ่งกลุ่ม (Cluster random sampling) ดำเนินการสอนนักศึกษาในกลุ่มตัวอย่างโดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น จำนวน 3 คาบ คาบละ 180 นาที รวม 540 นาที และประเมินผลการเรียนรู้จากคะแนนแบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน และสอบถามความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอน ผลการวิจัยพบว่า 1) กิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี มีประสิทธิภาพเท่ากับ 87.28/82.66 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้ 2) นักศึกษาที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น มีคะแนนเฉลี่ยระดับการกระทำ (A) กระบวนการ (P) และวัตถุ (O) เป็น 16.45, 11.02, 9.11 จากคะแนนเต็ม 20, 15, และ 15 คะแนน ตามลำดับ และ 3) นักศึกษากลุ่มตัวอย่างมีความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอนอยู่ในระดับมาก

คำสำคัญ: ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน; ทฤษฎี APOS; เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

1. บทนำ

สำนักงานคณะกรรมการอุดมศึกษาได้กำหนดแผนอุดมศึกษาระยะยาวฉบับที่ 2 (พ.ศ. 2551-2566) เกี่ยวกับการยกระดับคุณภาพอุดมศึกษาไทย เพื่อผลิตและพัฒนาบุคลากรให้มีคุณภาพ สามารถปรับตัวเข้ากับงานและสังคม มีศักยภาพในการสร้างความรู้และนวัตกรรม รวมทั้งสามารถแข่งขันในโลกยุคโลกาภิวัตน์ได้ (Office of the Higher Education Commission [OHEC], 2007, pp. 1-63) ส่งผลให้เกิดการปฏิรูปการศึกษาโดยกระทรวงศึกษาธิการออกพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ. 2545 และ (ฉบับที่ 3) พ.ศ. 2553 หมวด 4 มาตรา 22 ความว่า การจัดการศึกษาต้องยึดหลักผู้เรียนทุกคนมีความสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้ และถือว่าผู้เรียนมีความสำคัญที่สุด กระบวนการจัดการศึกษาต้องส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาตามธรรมชาติและเต็มตามศักยภาพ (OHEC, 2010, pp. 20-58) ทั้งด้านความรู้และทักษะด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี คณิตศาสตร์ ภาษา การประกอบอาชีพ และการดำรงชีวิตอย่างมีความสุข ซึ่งจะเห็นได้ว่า คณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งที่มีบทบาทสำคัญและจำเป็นต่อรากฐานการพัฒนาผู้เรียนและประเทศชาติ เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่พัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์คิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างมีวิจารณ์ญาณ คิดอย่างเป็นระบบ ตลอดจนสามารถพัฒนาทักษะการแก้ปัญหา ตัดสินใจและวางแผนอย่างเป็นระบบได้ (Piasai, 2014, pp. 45-56) อย่างไรก็ตาม มีคนจำนวนไม่น้อยเกิดทัศนคติกับคณิตศาสตร์ว่าเป็นวิชาที่ยากซับซ้อน จึงตั้งคำถามจากรุ่นสู่รุ่น “เรียนคณิตศาสตร์ไปเพื่ออะไร” นั้นแสดงให้เห็นว่าผู้เรียนเหล่านั้นไม่สามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ได้ แท้จริงแล้วคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่สำคัญต่อการศึกษาด้านต่าง ๆ เช่น ด้านฟิสิกส์เกี่ยวกับการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วชั่วขณะ ณ เวลาใด ๆ ในการเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีอัตราเร็วไม่คงที่ หรือด้านโลจิสติกส์เกี่ยวกับการสร้างฟังก์ชันรายรับ ฟังก์ชันรายจ่าย และฟังก์ชันกำไร เพื่อหาจุดคุ้มทุนในการขนส่ง ตลอดจนการนำคณิตศาสตร์ไปใช้กับศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษาพยายามผลักดันให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจมากกว่าความจำ เพื่อสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้กับศาสตร์เฉพาะของตนเองได้ จึงกำหนดให้หลาย ๆ สาขาวิชาจำเป็นต้องเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งมีชื่อตามหลักสูตรที่มหาวิทยาลัยกำหนด คือ วิชาแคลคูลัส เป็นวิชาบังคับในหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต และหลักสูตรบริหารธุรกิจบัณฑิต สาขาการจัดการโลจิสติกส์ โดยคาดหวังว่า ภายหลังจากที่นักศึกษาได้เรียนวิชาแคลคูลัสไปแล้วจะสามารถนำความรู้เกี่ยวกับลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต และฟังก์ชันอดิศัย การประยุกต์ของอนุพันธ์ เช่น สมการของเส้นสัมผัสและเส้นตั้งฉาก อัตราสัมพัทธ์ การหาค่าสูงสุด-ต่ำสุด การสร้างฟังก์ชันรายได้ รายจ่าย และกำไร ตลอดจนการอินทิเกรตแบบไม่จำกัดเขตและจำกัดเขตไปประยุกต์ใช้ได้อย่างสมเหตุสมผลและถูกต้อง (Bachelor of Business Administration Program in Logistics Management, 2020, p. 6) จากการสัมภาษณ์อาจารย์ผู้สอนวิชาแคลคูลัสอย่างไม่เป็นทางการจำนวน 2 ท่าน และจากประสบการณ์สอนวิชาแคลคูลัสของคณะผู้วิจัยเป็นระยะเวลา 3 ปี

พบว่า หัวข้อจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชันเป็นเนื้อหาพื้นฐานสำหรับวิชาแคลคูลัส แต่นักศึกษาจำนวนไม่น้อยขาดความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ เรื่อง LIMIT และความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ซึ่งพบสาเหตุในประเด็นต่าง ๆ ดังนี้ 1) นักศึกษามีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ค่อนข้างอ่อน เช่น การบวก ลบ คูณ และหารจำนวนเต็มไม่คล่อง การแยกตัวประกอบพหุนามกำลังสองในรูป $ax^2 + bx + c$ โดยที่ a, b , และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ a ไม่เป็นศูนย์ การแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างกำลังสองในรูป $A^2 - B^2$ และการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลบวกและผลต่างกำลังสามในรูป $A^3 \pm B^3$ โดยที่ A และ B เป็นพหุนาม ไม่ได้หรือได้ค่อนข้างช้า 2) นักศึกษาไม่สามารถดำเนินการทางคณิตศาสตร์แบบพื้นฐานได้ เนื่องจากมีความคลาดเคลื่อนในเรื่องสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนจริงและเลขยกกำลัง ส่งผลให้เกิดข้อผิดพลาดในการหาผลลัพธ์ของเลขยกกำลัง และการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว เป็นต้น และ 3) นักศึกษาขาดประสบการณ์ฝึกทักษะการแก้ปัญหา และมีทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับน้อย สาเหตุข้างต้นคงปฏิเสธไม่ได้ว่าความรู้เหล่านั้นเป็นพื้นฐานในระดับมัธยมศึกษาที่มีความสำคัญต่อการเรียน เรื่อง LIMIT และความต่อเนื่องของฟังก์ชันสำหรับวิชาแคลคูลัส ดังนั้น การจัดการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับบริบทของผู้เรียนเป็นอีกหนึ่งแนวทางที่จะส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจที่มีศักยภาพได้ Robert (2002, Online) นักจิตวิทยาชาวอเมริกาได้ให้ความสำคัญกับสิ่งที่ผู้เรียนได้เรียนรู้ (What) ไม่ว่าผู้สอนจะสอนผู้เรียนอย่างไร (How) หากผู้เรียนมีความสามารถทำได้ตามวัตถุประสงค์ปลายทางที่กำหนดไว้จะถือว่าการเรียนการสอนนั้นประสบความสำเร็จ หรืออาจกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า ให้ความสำคัญกับผลลัพธ์ (Product or outcome) มากกว่ากระบวนการเรียนรู้ (Process) นั้นหมายความว่า เนื้อหาพื้นฐานมีอิทธิพลต่อการเรียนเรื่องถัดไป เช่น การที่ผู้เรียนจะเรียน เรื่อง LIMIT และความต่อเนื่องของฟังก์ชันให้เกิดความเข้าใจได้นั้นจำเป็นต้องเกิดความเข้าใจในมโนทัศน์ เรื่อง การบวก ลบ คูณ และหารจำนวนเต็ม การแยกตัวประกอบพหุนามกำลังสองในรูป $ax^2 + bx + c$ โดยที่ a, b , และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ a ไม่เป็นศูนย์ การแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างกำลังสองในรูป $A^2 - B^2$ และการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลบวกและผลต่างกำลังสามในรูป $A^3 \pm B^3$ โดยที่ A และ B เป็นพหุนาม รวมทั้งควรเกิดความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนจริงและเลขยกกำลังมาก่อน ซึ่งสอดคล้องกับ Kilpatrick et al. (2001, pp. 116-118) ที่กล่าวว่า เมื่อผู้เรียนเข้าใจถึงแก่นของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์จะเป็นบุคคลที่เรียนรู้ได้เร็วจนสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างความรู้เดิมกับความรู้ใหม่ได้ ส่วนกระทรวงศึกษาธิการและสถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ได้กล่าวในทำนองเดียวกันว่า ควรจัดการเรียนการสอนที่มุ่งเน้นให้ผู้เรียนเป็นสำคัญ เข้าใจเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ไปพร้อม ๆ กับการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งใช้เทคโนโลยีประกอบการเรียนการสอน (Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology [IPST], 2008, pp. 1-4; IPST, 2016, pp. 220-266) เพื่อเสริมสร้างให้ผู้เรียนรู้ เข้าใจ และเกิดมโนภาพแต่ละมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ส่งผลให้สามารถเรียนเนื้อหาในระดับที่สูงขึ้นได้เป็นอย่างดี

ปัจจุบันเครื่องคำนวณเชิงกราฟ (Graphing calculator) เป็นเทคโนโลยีที่มีบทบาทสำหรับการเรียนการสอนในรายวิชาคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก นอกจากจะช่วยด้านการคำนวณ ตลอดจนสามารถหาผลลัพธ์ได้อย่างรวดเร็วแล้ว เครื่องคำนวณเชิงกราฟยังเปรียบเสมือนเป็นสื่อกลางต่อการอธิบายสิ่งที่เป็นามธรรมให้เป็นรูปธรรมได้ ส่งผลให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์มากขึ้น (Tiengyoo, 2018, pp. 29-40) ซึ่งสอดคล้องกับ Devantier (1992, pp. 55-60) ได้ศึกษาอิทธิพลของเครื่องคำนวณเชิงกราฟที่ส่งผลต่อความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ เรื่อง ฟังก์ชันและการเขียนกราฟของฟังก์ชัน พบว่า ผู้เรียนที่เรียนด้วยเครื่องคำนวณเชิงกราฟมีความเข้าใจเชิงมโนทัศน์สูงกว่าผู้เรียนที่ไม่เรียนด้วยเครื่องคำนวณเชิงกราฟ นั้นหมายความว่า เครื่องคำนวณเชิงกราฟส่งผลต่อความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ของผู้เรียน เนื่องจากเครื่องคำนวณเชิงกราฟสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันต่างๆ ได้ เช่น ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear function) ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic function) ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function) ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational function) ฯลฯ เมื่อผู้เรียนกำหนดค่าของตัวแปรต้นในเครื่องคำนวณเชิงกราฟจะประมวลผลค่าของตัวแปรตามแล้วแสดงผลเป็นคู่ลำดับ หากกำหนดค่าของตัวแปรต้นหลายค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ เครื่องคำนวณเชิงกราฟจะแสดงคู่ลำดับเหล่านั้นเรียงติดกันมากขึ้นจนกลายเป็นเส้นตรง หรือเส้นโค้งในที่สุด สำหรับส่วนนี้ผู้สอนสามารถเชื่อมโยงแนวคิดเกี่ยวกับการเขียนกราฟของฟังก์ชันให้ผู้เรียนเห็นที่มาของการเขียนกราฟของฟังก์ชันต่าง ๆ ได้ อีกทั้งยังช่วยเสริมสร้างให้ผู้เรียนเกิดมโนภาพตลอดจนสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันด้วยตนเองได้เมื่อไม่มีเครื่องคำนวณเชิงกราฟ ส่วน Fox (1998, pp. 43-58) ได้ให้เหตุผลสนับสนุนว่า การใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟช่วยให้ผู้เรียนมีความกระตือรือร้นต่อการเรียน สามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน สัญลักษณ์ กราฟ และส่งเสริมทักษะการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสารสื่อความหมาย และนำเสนอทางคณิตศาสตร์ผ่านการเขียนกราฟต่าง ๆ ได้ (Tiengyoo et al., 2018, pp. 143-150) นอกจากนี้ Surarit (2014, pp. 17-29) ได้ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามรูปแบบซิปปา เรื่อง LIMIT และความต่อเนื่องของฟังก์ชัน สำหรับนักศึกษาปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 พบว่า นักศึกษามีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70

อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับ Sotaro et al. (2020, pp. 328-335) ที่ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในรายวิชาแคลคูลัส โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ พบว่า ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนผู้เรียนทั้งหมด และมีความพึงพอใจต่อการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ อยู่ในระดับมาก สำหรับการวัดและประเมินผลเป็นอีกหนึ่งเครื่องมือสำคัญที่ใช้แบ่งระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน เพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพของการเรียนการสอนว่าผู้เรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจอยู่ในระดับใด และตรงตามตัวชี้วัดที่ผู้สอนกำหนดไว้หรือไม่ ปัจจุบันมีทฤษฎีที่ใช้แบ่งระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มีอยู่หลายทฤษฎี เช่น ทฤษฎีอนุกรมวิธานแบบโซโล ทฤษฎีพัฒนาการของความเข้าใจตามแนวคิดของไพร์-คีแรน และคาร์เพนเตอร์-ลีเออร์ แต่สำหรับการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยสนใจทฤษฎี APOS เป็นการแบ่งระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 4 ระดับ ได้แก่ 1) ระดับการกระทำ (Action) 2) ระดับกระบวนการ (Process) 3) ระดับวัตถุ (Object) และ 4) ระดับโครงสร้างทางปัญญา (Schema)

ด้วยเหตุผลข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยสนใจสร้างกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี ให้มีประสิทธิภาพที่ระดับ 80/80 พร้อมทั้งศึกษาระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ตามกรอบทฤษฎี APOS และศึกษาความพึงพอใจที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

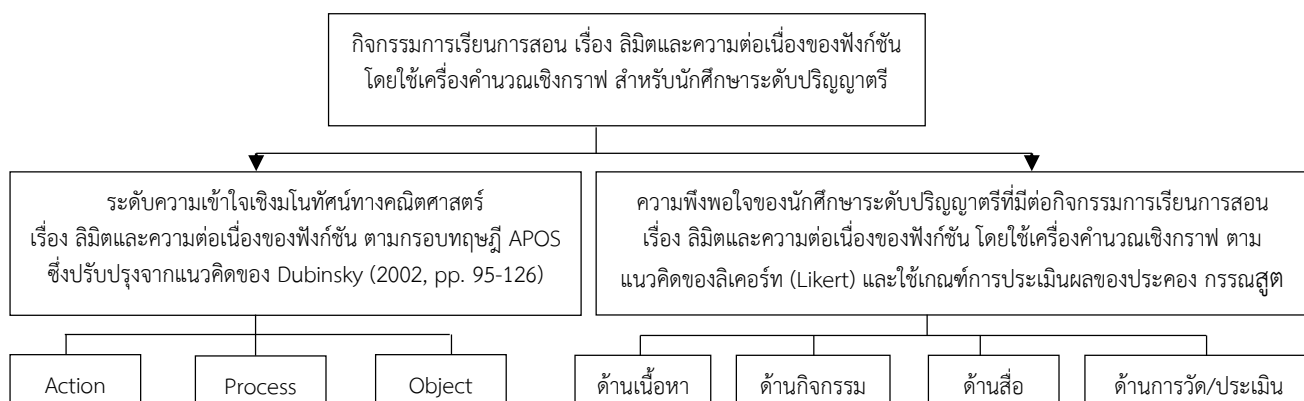
2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบันมีนักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความสนใจศึกษาเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ จนค้นพบทฤษฎีที่ใช้แบ่งระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์อยู่หลายทฤษฎี สำหรับการวิจัยครั้งนี้คณะผู้วิจัยสนใจทฤษฎี APOS ดังที่กล่าวมาข้างต้น โดยทฤษฎี APOS เป็นการแบ่งระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ที่ดูบินสกี (Dubinsky) เป็นผู้พัฒนาทฤษฎีนี้จากแนวคิดสำคัญผ่านการคิดสะท้อน (Reflective abstraction) ของเพียเจต์ พร้อมทั้งอธิบายว่า ทฤษฎี APOS ได้แบ่งระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็น 4 ระดับ ได้แก่ 1) ระดับการกระทำ (Action) เป็นระดับที่เกิดจากการตอบสนองต่อสิ่งเร้าภายนอกของตัวผู้เรียนเอง ผู้เรียนระดับนี้สามารถปฏิบัติตามเงื่อนไขหรือคำสั่งที่กำหนดให้ได้ 2) ระดับกระบวนการ (Process) เป็นการพัฒนาความเข้าใจจากระดับการกระทำผ่านกระบวนการภายในจิตใจ (Interiorization) ของผู้เรียนซึ่งเกิดความเข้าใจภายในใจ ตลอดจนคิดย้อนกลับและกระทำงานใด ๆ ที่ข้ามขั้นได้ 3) ระดับวัตถุ (Object) เป็นความสามารถของผู้เรียนในการเชื่อมโยงความรู้ของ 2 ขั้นก่อนหน้าเข้าด้วยกัน จนสามารถสร้างข้อความคาดการณ์หรือมโนทัศน์ใหม่ ๆ ได้ (Jamwan, 2016, Online) และ 4) ระดับโครงสร้างทางปัญญา (Schema) เป็นความสามารถสำหรับการเลือกเชื่อมโยงระดับต่าง ๆ เพื่อประยุกต์ใช้ความรู้แล้วสร้างเป็นองค์ความรู้ใหม่ในระดับที่สูงขึ้นหรือสร้างนวัตกรรมใหม่ ๆ ได้ (Dubinsky, 2002, pp. 95-123)

จากที่กล่าวมาข้างต้น คณะผู้วิจัยเล็งเห็นความสำคัญของการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน แต่การที่ผู้เรียนจะมีระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่สูงได้ จำเป็นต้องอาศัยกิจกรรมการเรียนการสอนเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนาระดับความเข้าใจเช่นกัน สำหรับการวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนโดยมีสมมติฐานการวิจัยว่า กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี มีประสิทธิภาพเป็นไปตามเกณฑ์ 80/80

3. วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 แนวความคิดในการวิจัย



รูปที่ 1 กรอบแนวคิดในการวิจัย

3.2 ขอบเขตการวิจัย

ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิทยาการจัดการ มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 3 หมู่เรียน 62174730 สาขาการจัดการโลจิสติกส์ มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ลงทะเบียนรายวิชาแคลคูลัสสำหรับโลจิสติกส์ บร3008209 ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2564 จำนวน 60 คน โดยการสุ่มแบบแบ่งกลุ่ม (Cluster random sampling)

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระ คือ กิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี

ตัวแปรตาม ได้แก่ ระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ตามกรอบทฤษฎี APOS และความพึงพอใจของนักศึกษาระดับปริญญาตรีที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นเนื้อหา เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยจะพิจารณาเฉพาะฟังก์ชันพีชคณิต ประกอบด้วย 1) บทนิยามของลิมิต 2) ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต 3) การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ และ 4) ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ที่จุด $x = a$

นิยามศัพท์เฉพาะ

1) เครื่องคำนวณเชิงกราฟ หมายถึง เครื่องคิดเลขที่นำมาใช้เป็นสื่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยเป็นเครื่องคิดเลข รุ่น TI-Nspire CX CAS

2) แบบทดสอบระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน หมายถึง แบบวัดระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ตามกรอบทฤษฎี APOS แบ่งเป็นข้อสอบระดับ A, P, และ O จำนวน 3, 3, และ 2 ข้อ ตามลำดับ ซึ่งข้อสอบมีลักษณะเป็นแบบอัตนัยจำนวน 8 ข้อ

3) ระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน หมายถึง ความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ แบ่งเป็น 3 ระดับ ตามกรอบทฤษฎี APOS ที่ปรับปรุงจากแนวคิดของคูบินสกี ได้แก่

ระดับการกระทำ (Action: A) นักศึกษาสามารถใช้สัญลักษณ์ อธิบายความหมายของลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันอย่างไม่เป็นทางการได้ถูกต้อง

ระดับกระบวนการ (Process: P) นักศึกษาสามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน ขณะที่ x เข้าใกล้ a ในรูปแบบต่าง ๆ ได้ เช่น ลิมิตของฟังก์ชันแบบมีเงื่อนไข ลิมิตของฟังก์ชันในรูป $\frac{k}{0}$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงไม่เป็นศูนย์ และลิมิตในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ (Indeterminate form $\frac{0}{0}$) นอกจากนี้ นักศึกษาสามารถตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ที่จุด $x = a$ ได้ถูกต้อง

ระดับวัตถุ (Object: O) นักศึกษาสามารถอธิบายความหมายของลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันอย่างเป็นทางการ

4) ความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน หมายถึง ความสามารถของนักศึกษา ที่เกี่ยวข้องกับลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ซึ่งประกอบไปด้วย 1) บทนิยามของลิมิต 2) ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต 3) การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ และ 4) ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ที่จุด $x = a$

5) เกณฑ์ หมายถึง ร้อยละ 50 ของคะแนนรวม กล่าวคือ ถ้านักศึกษาได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวม ถือว่านักศึกษาสอบผ่าน

6) ความพึงพอใจของนักศึกษาระดับปริญญาตรีที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ หมายถึง ระดับความรู้สึกรับชอบของนักศึกษาที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ซึ่งวัดจากแบบสอบถามความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นชนิดมาตราส่วนประมาณค่า (Rating scale) ตามแนวคิดของลิเคิร์ท (Likert)

3.3 เครื่องมือในการวิจัย

1) กิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ สำหรับนักศึกษา ระดับปริญญาตรี ประกอบด้วย 4 กิจกรรม ซึ่งจะใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมาอธิบายบทนิยามของลิมิต การหาค่าของฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ ความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด $x = a$ รวมทั้งใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการคำนวณและเขียนกราฟของฟังก์ชัน

2) คอมพิวเตอร์ที่ลงโปรแกรม “เครื่องคำนวณเชิงกราฟ รุ่น TI Nspire CX CAS” สำหรับอาจารย์ผู้สอนจำนวน 1 เครื่อง

3) แบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 8 ข้อ มีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) เท่ากับ 1.00 ค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.36-0.75 ค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.25-0.54 และค่าความเชื่อถือได้ (Reliability) ของแบบทดสอบทั้งฉบับ เท่ากับ 0.84

4) แบบสอบถามความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ แบ่งเป็น 4 ด้าน ได้แก่ 1) ด้านเนื้อหา 2) ด้านกิจกรรมการเรียนการสอน 3) ด้านสื่อการเรียนการสอน และ 4) ด้านวัดผลและประเมินผล เป็นแบบมาตราส่วนประมาณค่า (Rating scale) 5 ระดับ โดยผ่านการตรวจสอบความถูกต้องและความเหมาะสม ซึ่งมีความเชื่อถือได้ (Reliability) ของแบบสอบถามทั้งฉบับ เท่ากับ 0.76

3.4 ขั้นตอนการวิจัย

สำหรับขั้นตอนแรกคณะผู้วิจัยศึกษาสภาพปัญหาที่เกิดขึ้นกับนักศึกษาเกี่ยวกับการเรียน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จากนั้นศึกษาทฤษฎี APOS เพื่อนำมาเป็นกรอบแนวคิดของการวิจัย แล้วดำเนินการจัดทำเครื่องมือ ได้แก่ 1) กิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี 2) แบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ตามกรอบทฤษฎี APOS และ 3) แบบสอบถามความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ โดยใช้วิธีดำเนินการวิจัยเป็นแบบกลุ่มเดียว มีการทดสอบหลังการทดลอง (One-group posttest-only design) ซึ่งเป็นแบบแผนการวิจัยที่เลือกใช้กลุ่มตัวอย่างเพียงกลุ่มเดียว มีการให้ตัวแปรอิสระกับกลุ่มตัวอย่างแล้วทำการทดสอบหลังจากการทดลอง เพื่อนำไปสู่การพิจารณาผลการทดลองในลำดับถัดไป จากนั้นคัดเลือกนักศึกษาที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย จำนวน 60 คน ที่ลงทะเบียนรายวิชาแคลคูลัสสำหรับโลจิสติกส์ ภาคเรียนที่ 1/2564 โดยคณะผู้วิจัยดำเนินการสอนนักศึกษากลุ่มนี้ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ซึ่งมีระยะเวลาในการสอนจำนวน 5 คาบ คาบละ 3 ชั่วโมง แบ่งเป็น 2 ช่วง ได้แก่ ช่วงที่ 1: ทบทวนความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์จำนวน 2 คาบ และช่วงที่ 2: ดำเนินการสอนจริงจำนวน 3 คาบ ด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนที่คณะผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟเป็นสื่อการสอน ทั้งนี้คณะผู้วิจัยได้สร้างตารางวิเคราะห์พฤติกรรมความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์แต่ละระดับตามกรอบทฤษฎี APOS แล้วระบุพฤติกรรมแต่ละระดับของความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ตามกรอบทฤษฎี APOS ซึ่งแบ่งเป็น 3 ระดับ ได้แก่ ระดับการกระทำ กระบวนการ และวัตถุ เนื่องจากระดับโครงสร้างทางปัญญาเป็นสิ่งที่วัดค่อนข้างยาก อีกทั้งระดับความสามารถของนักศึกษากลุ่มตัวอย่างที่เลือกมามีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับอ่อนถึงปานกลาง เมื่อพิจารณาจากเกรดรายวิชาคณิตศาสตร์และสถิติชีวิตประจำวันซึ่งเป็นวิชาพื้นฐาน เมื่อสิ้นสุดกิจกรรมการเรียนการสอน

เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟเรียบร้อยแล้ว คณะผู้วิจัยให้นักศึกษาทำแบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เวลา 2 ชั่วโมง เป็นข้อสอบแบบอัตนัยจำนวน 8 ข้อ แบ่งเป็นข้อ A1-A3, P4-P6, และ O7-O8 จากนั้นทำการวิเคราะห์ผลจากการทำแบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ตามลำดับดังนี้ หาประสิทธิภาพของกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ แล้วนำผลมาเทียบกับเกณฑ์ที่กำหนดไว้คือ 80/80 โดยใช้สูตร E_1/E_2 (Brahmawong, 2013, pp. 7-19) และวิเคราะห์แบบสอบถามความพึงพอใจที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ประกอบด้วย ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ทั้งนี้ได้ประเมินระดับความคิดเห็นของนักศึกษากลุ่มตัวอย่างโดยใช้เกณฑ์การประเมินผลของ Krannasoot (2000, pp. 20-58) ได้แก่ 1) คะแนนเฉลี่ย 4.50-5.00 หมายถึง นักศึกษามีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากที่สุด 2) คะแนนเฉลี่ย 3.50-4.49 หมายถึง นักศึกษามีความพึงพอใจอยู่ในระดับมาก 3) คะแนนเฉลี่ย 2.50-3.49 หมายถึง นักศึกษามีความพึงพอใจอยู่ในระดับปานกลาง 4) คะแนนเฉลี่ย 1.50-2.49 หมายถึง นักศึกษามีความพึงพอใจอยู่ในระดับน้อย และ 5) คะแนนเฉลี่ย 1.00-1.49 หมายถึง นักศึกษามีความพึงพอใจอยู่ในระดับน้อยที่สุด

4. ผลการวิจัย

4.1 ผลการหาประสิทธิภาพของกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ประสิทธิภาพของกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

คะแนน	จำนวนนักเรียน (n)	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้		เกณฑ์ที่กำหนด
			$\bar{x}$	ร้อยละ	
ระหว่างเรียน (ใบกิจกรรม)	60	50	43.64	87.28	80 (E_1)
หลังเรียน (แบบทดสอบ)	60	50	41.33	82.66	80 (E_2)

จากตารางที่ 1 พบว่า กิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ มีประสิทธิภาพของกระบวนการ/ประสิทธิภาพของผลลัพธ์ E_1/E_2 เท่ากับ 87.28/82.66 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้คือ 80/80

4.2 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ตามกรอบทฤษฎี APOS ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากแบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

แบบทดสอบข้อ	คะแนนเต็ม	$\bar{x}$	S.D.	จำนวนคนผ่าน (60 คน)
A1-A3	20	16.45	2.68	60
P4-P6	15	11.02	2.53	56
O7-O8	15	9.11	1.31	48

จากตารางที่ 2 พบว่า คะแนนระดับการกระทำ (A) มีคะแนนเฉลี่ย 16.45 ระดับกระบวนการ (P) มีคะแนนเฉลี่ย 11.02 และระดับวัตถุ (O) มีคะแนนเฉลี่ย 9.11 จากคะแนนเต็ม 20, 15 และ 15 คะแนน ตามลำดับ ซึ่งมีระดับความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ตามกรอบทฤษฎี APOS และผ่านเกณฑ์ร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม ดังนี้ 1) นักศึกษากลุ่ม A จำนวน 60 คน 2) นักศึกษากลุ่ม AP จำนวน 56 คน และ 3) นักศึกษากลุ่ม APO จำนวน 48 คน

4.3 ผลการวิเคราะห์ระดับความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 วิเคราะห์ระดับความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

รายการ	$\bar{x}$	S.D.	แปลผล
ด้านเนื้อหา	4.01	0.80	มาก
ด้านกิจกรรมการเรียนการสอน	4.72	1.52	มากที่สุด
ด้านสื่อการเรียนการสอน	4.89	0.34	มากที่สุด
ด้านวัดผลและประเมินผล	4.11	1.07	มาก
รวม	4.43	0.93	มาก

จากตารางที่ 3 พบว่า นักศึกษามีความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ อยู่ในระดับมาก ($\bar{x} = 4.43$, S.D. = 0.93)

5. สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

ผลการวิจัยด้วยกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี สามารถอภิปรายผลได้ดังนี้

5.1 ผลการสร้างกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี ให้มีประสิทธิภาพที่ระดับ 80/80 พบว่า กิจกรรมการเรียนการสอนที่คณะผู้วิจัยสร้างขึ้น มีประสิทธิภาพเท่ากับ 87.28/82.66 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากประเด็นดังต่อไปนี้ 1) ในการวิจัยครั้งนี้คณะผู้วิจัยได้ใช้กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 3 สาขาการจัดการโลจิสติกส์ ที่ผ่านการเรียนช่วงที่ 1: ทบทวนความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการบวก ลบ คูณ และหารจำนวนเต็ม การแยกตัวประกอบพหุนามกำลังสองในรูป $ax^2 + bx + c$ โดยที่ a, b, และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ a ไม่เป็นศูนย์ การแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างกำลังสองในรูป $A^2 - B^2$ และการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลบวกและผลต่างกำลังสามในรูป $A^3 \pm B^3$ โดยที่ A และ B เป็นพหุนาม รวมทั้งสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนจริงและเลขยกกำลัง เพื่อเตรียมความพร้อมก่อนเข้าสู่บทเรียน โดยจะเห็นได้ว่า มโนทัศน์ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นปัจจัยพื้นฐานที่สำคัญสำหรับการเรียน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ดังทฤษฎีการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของดินส์ ซึ่งกล่าวว่า ปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อการเรียนคณิตศาสตร์ คือ ความพร้อมทางวุฒิภาวะ ประสบการณ์ และองค์ความรู้เดิม ส่งผลต่อการเรียนรู้ในระดับที่สูงขึ้น (Suwapanit, 2018, Online) 2) คณะผู้วิจัยปรับระยะเวลาในการสอนให้เหมาะสมและสอดคล้องกับสภาพจริงของนักศึกษา เน้นให้นักศึกษาเข้าใจมโนทัศน์ที่แท้จริงมากกว่าเน้นปริมาณ รวมทั้งมีกิจกรรมผ่อนคลายความเครียดระหว่างการเรียนการสอนเป็นระยะ ๆ และ 3) ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณะผู้วิจัยได้แทรกเนื้อหาบางหัวข้อเกี่ยวกับการพิสูจน์ให้นักศึกษาเพิ่มเติม เพื่อให้ให้นักศึกษาเห็นถึงความสำคัญของบทนิยามมากขึ้น โดยนำเสนอผ่านตัวอย่าง สร้างข้อความคาดการณ์แล้วเขียนบทพิสูจน์ตามลำดับ

5.2 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ตามกรอบทฤษฎี APOS พบว่า นักศึกษากลุ่มตัวอย่างมีคะแนนระดับการกระทำ (A) 16.45 คะแนน ระดับกระบวนการ (P) 11.02 คะแนน และระดับวัตถุ (O) 9.11 คะแนน จากคะแนนเต็ม 20, 15 และ 15 คะแนน ตามลำดับ โดยนักศึกษาที่มีความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อยู่ในระดับ A จำนวน 60 คน ระดับ P จำนวน 56 คน และระดับ O จำนวน 48 คน สาเหตุเนื่องมาจากแบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน มีลักษณะไม่กำหนดวิธีคิด เพื่อให้ให้นักศึกษาได้แสดงแนวคิดของตนเอง นอกจากนี้คณะผู้วิจัยได้วิเคราะห์ข้อมูลจากงานเขียนและสัมภาษณ์นักศึกษาบางส่วนที่แสดงพฤติกรรมตามกรอบทฤษฎี APOS เพื่อมาอธิบายลักษณะของระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ดังนี้

ระดับการกระทำ: ข้อ A2 รายละเอียดดังรูปที่ 2

2. ลิมิตคืออะไร
ตอน ลิมิตของฟังก์ชัน f มีค่าเท่ากับจำนวนจริง L เมื่อ x มีค่าใกล้กับ จำนวนจริง a ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ก็คือเมื่อ ค่าของ $f(x)$ มีค่าใกล้กับ L เมื่อค่าของ x มีค่าใกล้กับ a (จากหนังสือ จำนวนจริง) $10^6 \times 10^6$

รูปที่ 2 งานเขียนข้อ A2

จากรูปที่ 2 เป็นงานเขียนของ X นักศึกษาที่มีความสามารถอยู่ในระดับอ่อน เกิดความเข้าใจอยู่ในระดับการกระทำ เนื่องจากธรรมชาติของ X เป็นนักศึกษาที่มีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ค่อนข้างอ่อน แต่ขยัน พยายาม หมั่นทบทวนความรู้อยู่เสมอ และสามารถอธิบายคำตอบอย่างไม่เป็นทางการ ได้ ซึ่ง X จะสามารถตอบได้เพียงข้อคำถามที่เน้นความจำ เช่น จงอธิบายความหมายของ..... เนื่องจากเป็นข้อคำถามที่ไม่เกี่ยวข้องกับการคิดคำนวณ หรือการประยุกต์ใช้ จึงสามารถตอบข้อ A2 ได้ แต่ไม่สามารถตอบข้อ P4-O8 ได้ นอกจากนั้น X ยังตอบสนองกับสิ่งเร้าภายนอกอย่างเครื่องคำนวณเชิงกราฟ กล่าวคือ สามารถปฏิบัติตามคำแนะนำอย่างเป็นขั้นตอน ไม่สามารถข้ามขั้นได้ หากข้ามขั้นจะแสดงอาการคิ้วขมวด ไม่เข้าใจว่าผลลัพธ์ที่ปรากฏขึ้นมาได้อย่างไร สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชันอย่างง่ายโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟได้ แต่ในทางตรงกันข้ามเมื่อไม่มีเครื่องคำนวณเชิงกราฟจะไม่สามารถแสดงวิธีคิดหรือหาผลลัพธ์โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟได้ สอดคล้องกับ Naklamthong (2016, pp. 57-82) ที่อธิบายว่า นักศึกษาที่มีความสามารถคำนวณอย่างเป็นขั้นตอนเพื่อหาค่าของฟังก์ชันอย่างง่ายได้ ถือว่านักศึกษามีความเข้าใจอยู่ในระดับการกระทำ

ระดับกระบวนการ: ข้อ P4 รายละเอียดดังรูปที่ 3

Handwritten work for problem P4. It shows the limit of $\frac{9}{x}$ as x approaches 0. The student uses the epsilon-delta definition. For the left-hand limit, they set $\epsilon = 1$ and find $\delta = 1$. For the right-hand limit, they set $\epsilon = 1$ and find $\delta = 1$. The final conclusion is $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9}{x} = \infty$.

รูปที่ 3 งานเขียนข้อ P4

จากรูปที่ 3 เป็นงานเขียนของ Y นักศึกษาที่มีความสามารถอยู่ในระดับปานกลาง เกิดความเข้าใจอยู่ในระดับการกระทำและกระบวนการ เนื่องจากสามารถนำเอาความรู้เดิมกับความรู้ใหม่มาเชื่อมโยงเพื่อหาคำตอบของฟังก์ชันจากลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาได้ หาค่าของลิมิต ขณะที่ x เข้าใกล้ a ในรูปแบบต่าง ๆ ได้ เช่น ลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือลิมิตของฟังก์ชันในรูป $\frac{k}{0}$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ นอกจากนั้นยังสามารถอธิบาย เปรียบเทียบ และสะท้อนสิ่งที่สังเกตจากเครื่องคำนวณเชิงกราฟได้ แต่ไม่มีความเข้าใจอยู่ในระดับวัตถุ เนื่องจาก Y ยังไม่เข้าใจอย่างถ่องแท้ว่า “ค่าของฟังก์ชัน” และ “ลิมิตของฟังก์ชัน” ต่างกันอย่างไร อีกทั้งยังขาดความเข้าใจเกี่ยวกับบทนิยามของลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันอย่างเป็นทางการ

ระดับวัตถุ: ข้อ O8 รายละเอียดดังรูปที่ 4

Handwritten work for problem O8. It shows the limit of $\sqrt{x}$ as x approaches 0. The student uses the epsilon-delta definition. They set $\epsilon = \delta^2$ and find $\delta = \epsilon^2$. The final conclusion is $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$.

รูปที่ 4 งานเขียน O8

จากรูปที่ 4 เป็นงานเขียนของ Z นักศึกษาที่มีความสามารถอยู่ในระดับเก่ง เกิดความเข้าใจอยู่ในระดับการกระทำกระบวนการและวัตถุ โดย Z สามารถเชื่อมโยงความเข้าใจระดับการกระทำและกระบวนการ ซึ่งอธิบายค่าของ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ รวมทั้งเข้าใจบทนิยามของลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่เป็นทางการได้ แม้ว่าจะพบข้อบกพร่องในการเขียนบทพิสูจน์ที่ขาดความชัดเจนในเรื่องลำดับเหตุผลก่อนหลัง เนื่องจากกลุ่มตัวอย่างไม่ได้เป็นสาขาวิชาที่เข้มงวดด้านการเขียนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เท่ากับนักศึกษาที่เรียนสาขาวิชาคณิตศาสตร์โดยตรง ผู้วิจัยจึงอนุมานความเข้มงวดในการเขียนบทพิสูจน์แต่เน้นการนำไปใช้กับสาขาวิชาตนเองได้ ส่งผลให้การเขียนบทพิสูจน์ในข้อ O8 ไม่ครบถ้วนตามหลักการทางคณิตศาสตร์ แต่จากการสัมภาษณ์พบว่า Z มีความเข้าใจเกี่ยวกับบทนิยามของลิมิต ดังนี้ “หนูลอง

แทนค่าเลขตัว และแอปพลิเคชัน หลาย ๆ ค่า หลาย ๆ ครั้ง แล้วดูค่าที่มันลู่เข้า ถ้าข้อไหนลองแทนไปแล้วมันลู่เข้าสู่ค่าเดียวกันแสดงว่าลิมิตมีค่า แต่มีบางข้อลองแทนไปแล้วลิมิตซ้ายกับลิมิตขวามันลู่ออกจากกันไม่ว่าจะแทนที่ค่าผลลัพธ์จะแสดงออกต่างกันเรื่อย ๆ

จึงได้ว่าข้อนี้ไม่น่าจะลู่ออก” จากบทสัมภาษณ์แสดงว่า Z สามารถเชื่อมโยงความเข้าใจจากระดับการกระทำผ่านการทดลองแทนค่าเดลต้า และแอปพลิเคชันด้วยเครื่องคำนวณเชิงกราฟ และเข้าใจถึงข้อจำกัดในการใช้ลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา จนนำมาสู่ผลลัพธ์ที่ถูกต้องโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการหาผลลัพธ์ได้ ซึ่งสอดคล้องกับ Tiengyoo et al. (2018, pp. 143-150) ที่อธิบายว่า เครื่องคำนวณเชิงกราฟสามารถสร้างมโนภาพให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจในเนื้อหาทางคณิตศาสตร์มากขึ้น เนื่องจากผู้เรียนสามารถทดลอง ตลอดจนสร้างข้อความคาดการณ์ต่าง ๆ ผ่านเครื่องคำนวณเชิงกราฟได้

5.3 ผลการศึกษาความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ พบว่า มีความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอนที่อยู่ในระดับมาก ($\bar{x} = 4.43$, S.D. = 0.93) ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากเนื้อหาที่นำมาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนมีรูปแบบการนำเสนอที่น่าสนใจ คณะผู้วิจัยสร้างสื่อการสอนโดยแสดงภาพเคลื่อนไหวด้วยเครื่องคำนวณเชิงกราฟ เป็นสื่อกลางที่ช่วยให้นักศึกษาเข้าใจเนื้อหาเป็นรูปธรรมมากขึ้น มีการใช้ภาษา และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เข้าใจง่าย ไม่ซับซ้อน ลำดับเนื้อหาจากง่ายไปยาก เมื่อนักศึกษาทำโจทย์ได้ถูกต้องคณะผู้วิจัยมีการกล่าวคำชม ส่งผลให้นักศึกษามีความกระตือรือร้น และสนุกกับการปฏิบัติกิจกรรม

ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้จะเป็นแนวทางต่อการประเมินและพัฒนาเครื่องมือเพื่อวัดระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ในเนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ สำหรับผู้เรียนทุกระดับ ตลอดจนเป็นข้อมูลสำหรับอาจารย์ผู้สอนต่อการคิดสรรวิธีการสอนที่เหมาะสมอันจะส่งเสริมต่อระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน นอกจากนี้ยังเป็นแนวทางสำหรับนักวิจัยที่สนใจศึกษาระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ โดยนำไปต่อยอดกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เรื่องอื่น หรือใช้วิธีการสอนอื่น เช่น วิธีการสอนแบบอุปนัย (Induction method) หรือวิธีการสอนแบบสาธิต (Demonstration method) ร่วมกับแนวคิดของทฤษฎี APOS

เอกสารอ้างอิง

- Bachelor of Business Administration Program in Logistics Management. (2020). *Bachelor of business administration (logistics management, 2021)*. Thepsatri Rajabhat University. (in Thai)
- Brahmawong, C. (2013). Developmental testing of media and instructional Package. *Silpakorn Educational Research Journal*, 5(1), 7-19. (in Thai)
- Devantier, A. L. (1992). *The impact of graphing calculators on the understanding of function and their graphs* [Master's thesis]. Central Michigan University.
- Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advance mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advance mathematical thinking* (pp. 95-126). Springer.
- Fox, L. F. (1998). *The effects of a graphing calculator used in an active learning environment on intermediate algebra student's achievement and attitude* [Doctoral dissertation]. University of South Florida.
- Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2008). *The basic education core curriculum B.E. 2551* (3rd ed.). Khurasapha Press. (in Thai)
- Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2016). *PISA 2015 assessment results science, reading and mathematics*. Programmed for International Student Assessment. (in Thai)
- Jamwan, S. (2016). *Level of mathematical understanding on symmetry axis based on APOS theory: A case study of Grad 4 Huanasuksawit school*. <https://drive.google.com/file/d/0B2vZpkob4eWgVzNzVFNCrmtaSm8/view> (in Thai)
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Help children learn mathematics*. National Academy Press.

- Krannasoot, P. (2000). *Statistics for behavioral science research*. Chulalongkorn University Press. (in Thai)
- Naklamthong, S. (2016). *An investigation of levels of mathematical understanding on limit concept based on APOS theory using the Geometer's Sketchpad (GSP) as learning tool* [Master's thesis]. KhonKaen University. (in Thai)
- Office of the Basic Education Commission (OBEC). (2010). *National education act 1999 and its amendments (No. 3) B.E. 2010* (2nd ed.). Prime Minister's Office. (in Thai)
- Office of the Higher Education Commission (OHEC). (2007). *Framework of the 15-year long-term higher education plan, No. 2 (2008– 2022)*. Chulalongkorn Printing House. (in Thai)
- Piasai, K. (2014). Error analysis of doing the derivative test of First-year undergraduates (Health Science Major), Srinakharinwirot University. *Journal of Research Unit on Science, Technology and Environment for Learning*, 5(1), 45-56. (in Thai)
- Robert, G. (2002). *Gagne learning theory*. <http://www.igntu.ac.in/eContent/IGNTU-eContent-692127937295-B.Ed-2-Dr.ShikhaBanerjee-TeachingandLearning-Unit-3.pdf>
- Sotaro, S., Thauthae, S., & Sirininlakul, P. S. (2020). Instructional activity on calculus for high school level by using a TI Nspire CX CAS graphing calculator. In A. G. Abdullah, Ilhamdanish, I. Widiati, Ana, M. S. Barliana, & P. Sawetmethikul (Eds.), *Advances in Social Science, Education and Humanities Research. Proceedings of the 6th UPI International Conference on TVET 2020 (TVET 2020)* (pp. 328-335). Atlantis Press.
- Surarit, K. (2014). Application of graphing calculator pf learning activities through CIPPA model in limits and continuous function for the first year undergraduate in mathematics programme in Surindra Rajabhat University. In D. Rungsawanpho (Ed.), *The 7th Academic Meeting National and International Conference* (pp. 17-29; Vol. 1). TCI Database. (in Thai)
- Suwapanit, S. (2018). *Theory of instruction*. <https://www.gotoknow.org/posts/22883> (in Thai)
- Tiengyoo, K. (2018). *Instructional activity package on relations and functions by using graphing calculator for Mathayomsuksa students* [Master's thesis]. Srinakharinwirot University. (in Thai)
- Tiengyoo, K., Sotaro, S., & Chaladgarn, T. (2018). Instructional activity package on relations and functions by using graphing calculator for Mathayomsuksa students. *Industrial Education and Technology*, 17(2), 143-150. (in Thai)