

การศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์
เรื่อง วงกลม ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดการเรียนการสอน
ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra
A STUDY OF MATHAYOMSUKSA III STUDENTS' CONCEPTUAL KNOWLEDGE
AND PROOF ABILITIES ON CIRCLE VIA CONJECTURING
AND PROVING METHOD WITH GEOGEBRA PROGRAM

วีริศ กิตติวารากุล*, ขวัญ เพี้ยชัย, สุกัญญา หะยีสาและ และเอนก จันทจรูญ
Veeris Kittivarakul, Khawn Piasai, Sukanya Hajisalah and Anek Janjaron
veeris.kitt@gmail.com, khawn@g.swu.ac.th, sukanyah@g.swu.ac.th and anek@g.swu.ac.th

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร 10110
Department of Mathematics, Faculty of Science, Srinakharinwirot University,
Bangkok 10110 Thailand

*Corresponding Author E-mail: veeris.kitt@gmail.com

(Received: March 26, 2019; Revised: May 8, 2019; Accepted: May 16, 2019)

ABSTRACT

The purposes of this study were: 1) to study Mathayomsuksa III students' conceptual knowledge on circle after being taught through the conjecturing and proving method with GeoGebra program; and 2) to study Mathayomsuksa III students' proof abilities on circle after being taught through conjecturing and proving method with GeoGebra program. The sample group was 40 Mathayomsuksa III students of Prasarnmit Demonstration School (Secondary), in the second semester of 2018 academic year. The research instruments of this study were: 1) 6 lesson plans that allowed students to learn the topic via conjecturing and proving method with GeoGebra program; and 2) The conceptual knowledge and proof abilities test on the topic of circle.

The research findings revealed that: 1) after being taught by conjecturing and proving method with GeoGebra program, over 60% of the sample group had conceptual knowledge on circle score that satisfied the criteria at a significant level of .05; and 2) after being taught by conjecturing and proving method with GeoGebra program, over 60% of the sample group had proof abilities on circle score that satisfied the criteria at a significant level of .05.

Keywords: conceptual knowledge; proof abilities; conjecturing and proving

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อ 1) ศึกษาความรู้เชิงโมทัศน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra 2) ศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 จำนวน 40 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย 1) แผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ประกอบด้วยเนื้อหาเรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม คอร์ด และเส้นสัมผัสวงกลม 2) แบบทดสอบวัดความรู้เชิงโมทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงโมทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .05 2) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05

คำสำคัญ: ความรู้เชิงโมทัศน์ ความสามารถในการพิสูจน์ การสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์

1. บทนำ

เรขาคณิต เป็นสาขาหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญ เนื่องจากเนื้อหาเรขาคณิตสามารถนำไปช่วยในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ เช่น ตรีโกณมิติ และพีชคณิต ด้วยวิธีการที่ง่ายและหาค่าตอบได้เร็วขึ้น และยังฝึกให้นักเรียนเป็นคนมีเหตุผล ทำงานอย่างมีระบบ ขั้นตอน รวมทั้งพัฒนาความสามารถด้านการค้นพบ [1] นอกจากนี้เรขาคณิตยังเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการเรียนสาขาวิชาอื่น ๆ เช่น ฟิสิกส์ ดาราศาสตร์ ศิลปะ พื้นฐานทางวิศวกรรมและสถาปัตยกรรม อีกทั้งยังมีความสำคัญในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน เช่น การออกแบบ การอ่านแผนที่ [2]

ในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตในประเทศไทย หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้กำหนดให้เรขาคณิตเป็นสาระหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งระบุไว้ในสาระที่ 3 เมื่อพิจารณาถึงตัวชี้วัดช่วงชั้นของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้ระบุหนึ่งในคุณภาพของนักเรียนหลังจบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ไว้ว่า นักเรียนต้องมีความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติทางเรขาคณิต และสามารถนำสมบัติเหล่านั้นไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้ [3] จากตัวชี้วัดช่วงชั้นข้างต้น จะเห็นได้ว่า การเรียนการสอนเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นของประเทศไทย ได้ให้ความสำคัญกับการนำสมบัติหรือทฤษฎีบททางเรขาคณิตไปใช้ในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหา

วงกลมเป็นเนื้อหาหนึ่งในเรขาคณิต เนื่องจากในชีวิตประจำวันมีสถานการณ์ที่ต้องอาศัยสมบัติของวงกลมมาใช้ในการแก้ปัญหา และยังเป็นเนื้อหาที่ให้นักเรียนได้ฝึกฝนการนำสมบัติทางเรขาคณิตที่ได้เรียนมาแล้วในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 มาใช้ประกอบการให้เหตุผลเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทหรือข้อความเกี่ยวกับวงกลมที่กำหนดให้ได้อย่างสมเหตุสมผล [4] ในประเทศไทย ปัญหาหนึ่งเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิต คือนักเรียนส่วนหนึ่งประสบปัญหาในการนำทฤษฎีบทหรือสมบัติทางเรขาคณิตไปใช้ในการอ้างอิงในการพิสูจน์ และไม่สามารถเริ่มต้นเขียนการพิสูจน์ได้ [5] เมื่อพิจารณาถึงสภาพการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตในปัจจุบัน พบว่า นักเรียนมักใช้วิธีการท่องจำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลม [6] ซึ่งอาจเกิดจากการจัดการเรียนการสอนของครูที่เน้นให้นักเรียนจดจำสูตร บทนิยาม หรือทฤษฎีบท เพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ด้วยวิธีการที่แน่นอนวิธีเดียว สำหรับการให้เหตุผลและการพิสูจน์ ครูส่วนหนึ่งมักใช้การสอนโดยแสดงตัวอย่างบนกระดานพร้อมอธิบายให้นักเรียนฟังแล้วให้นักเรียนเลียนแบบหรือทำตามที่ครูสอน ซึ่งการสอนด้วยวิธีการดังกล่าวไม่ได้ส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลและการพิสูจน์ของนักเรียน สิ่งที่นักเรียนได้เรียนรู้เป็นเพียงความรู้และความจำเท่านั้น [7]

ผู้วิจัยได้ศึกษาวิธีการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตแบบต่าง ๆ ที่ส่งเสริมกระบวนการคิดและให้เหตุผล พบว่า การจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ (conjecturing and proving) เป็นวิธีการหนึ่งซึ่งมีกระบวนการจัดการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้ใช้กระบวนการคิดและให้เหตุผล นอกจากนี้ยังส่งเสริมให้นักเรียนได้ค้นหาความสัมพันธ์บางอย่าง และพิสูจน์ยืนยันว่าความสัมพันธ์เหล่านั้นเป็นจริงในกรณีทั่วไป จนนำไปสู่ข้อสรุปทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง [8] กระบวนการนี้สำคัญอย่างยิ่งในการเรียนคณิตศาสตร์ เนื่องจากนักเรียนได้เรียนรู้ทฤษฎีบททางเรขาคณิตผ่าน

ประสบการณ์ของตนเอง ทำให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมนทัศน์ และยังเป็นภาระกระตุ้นให้นักเรียนไขมนทัศน์ที่ถูกต้องในการให้เหตุผลในการพิสูจน์ สอดคล้องกับ Alibert and Thomas [9] ที่กล่าวว่า การสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์เป็นสิ่งสำคัญที่ทำให้ให้นักเรียนเกิดความชำนาญในการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องต่าง ๆ ดังนั้นสามารถกล่าวได้ว่า วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์เป็นวิธีการที่ทำให้ให้นักเรียนเกิดความเข้าใจอย่างลึกซึ้ง และสามารถนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบททางเรขาคณิตไปใช้ในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหาได้

นอกจากวิธีการจัดการเรียนการสอนแบบต่าง ๆ แล้ว การนำเทคโนโลยีมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนเป็นปัจจัยหนึ่งที่ช่วยส่งเสริมในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิต โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตเป็นหนึ่งในเทคโนโลยีในการจัดการเรียนการสอนซึ่งสามารถสร้างรูปเรขาคณิตได้ทั้ง 2 มิติ และ 3 มิติ วัดขนาด สัดส่วนของส่วนของเส้นตรง ส่วนโค้ง มุมและพื้นที่ได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง [10] ด้วยคุณสมบัติดังกล่าวของโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต จึงกล่าวได้ว่า โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตมีความเหมาะสมในการช่วยให้นักเรียนได้ฝึกการให้เหตุผลแบบอุปนัย จากการสร้างและสำรวจทางเรขาคณิตผ่านการเคลื่อนไหวของรูปที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของปัญหาหลาย ๆ ตัวอย่าง ทำให้นักเรียนสามารถสร้างข้อความคาดการณ์ได้อย่างถูกต้องและรวดเร็ว เกิดความรู้เชิงมนทัศน์ที่ถูกต้องจากการสังเกตลักษณะของรูปที่สอดคล้องกับปัญหา นอกจากนี้ยังช่วยให้ครูสามารถสอนเนื้อหาได้ครบถ้วนโดยไม่ต้องใช้ระยะเวลามาก สอดคล้องกับ Frank and Mariotti [11] ที่กล่าวว่า มีหลายงานวิจัยระบุว่าโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตจะช่วยให้นักเรียนค้นพบข้อความคาดการณ์ได้ง่ายยิ่งขึ้น และยังช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดกระบวนการคิดเพื่อนำไปสู่การอ้างเหตุผลในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

สำหรับในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยสนใจโปรแกรม GeoGebra เนื่องจากโปรแกรมดังกล่าว เป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต ซึ่งมีจุดเด่นของโปรแกรม คือ เป็นโปรแกรม Open Source ที่ครูและนักเรียนทุกคนสามารถเข้าถึงโปรแกรมได้โดยไม่เสียค่าใช้จ่าย มีความสามารถในการส่งออกไฟล์ที่สร้างขึ้นเป็นรูปแบบของภาษา Java ซึ่งเป็นสื่อที่ปฏิสัมพันธ์กับนักเรียนที่สามารถเข้าถึงได้ในทุกระบบปฏิบัติการ โดยที่ไม่ต้องมีโปรแกรมในอุปกรณ์นั้น ๆ และมีวิธีการใช้งานโปรแกรมที่สะดวกและง่าย กล่าวคือ นักเรียนสามารถใช้งานโปรแกรมนี้ได้ โดยไม่จำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตมาก่อน [12] ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าโปรแกรม GeoGebra มีความเหมาะสมในการประกอบการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ในเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิต

จากที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาความรู้เชิงมนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งเป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตโปรแกรมหนึ่ง เพื่อเป็นแนวทางหนึ่งในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตโดยใช้วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับการใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตต่อไป

2. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

2.1 เพื่อศึกษาความรู้เชิงมนทัศน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

2.2 เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

3. สมมติฐานของการวิจัย

3.1 นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงมนทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

3.2 นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

4. ขอบเขตของการวิจัย

4.1 ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) แขวงคลองเตยเหนือ เขตวัฒนา กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) โดยการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling)

4.2 ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระ ได้แก่ การจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง วงกลม

ตัวแปรตาม ได้แก่ 1) ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม และ 2) ความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม

4.3 เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ใช้ในแผนการจัดการเรียนรู้ได้แก่ เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม คอร์ด และเส้นสัมผัสวงกลม

5. วิธีดำเนินการวิจัย

5.1 การสร้างและตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย

5.1.1 แผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม จำนวน 6 แผน ซึ่งการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1) ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเขียนแผนการจัดการเรียนรู้ ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra และวิธีการสร้างสื่อด้วยโปรแกรม GeoGebra

2) ศึกษาหลักสูตร กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อการจัดการเรียนรู้ วิธีการวัดและประเมินผล เพื่อวางโครงสร้างแผนการจัดการเรียนรู้

3) เขียนแผนการจัดการเรียนรู้และสร้างแฟ้มคำสั่งตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

4) นำแผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเสนอให้ผู้เชี่ยวชาญเพื่อพิจารณาความเหมาะสมของเนื้อหา และการใช้ภาษาแล้วปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ

5) นำแผนการจัดการเรียนรู้ไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) จำนวน 40 คน ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง เพื่อพิจารณาความเหมาะสมของการใช้ภาษา และเวลาในการจัดการเรียนการสอน แล้วปรับปรุงอีกครั้ง

6) นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ปรับปรุงแก้ไขแล้ว ไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างต่อไป

5.1.2 แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เป็นแบบทดสอบทั้งหมดจำนวน 21 ข้อ ประกอบด้วยข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 7 ข้อ แบบเติมคำ จำนวน 7 ข้อ และแบบอัตนัยจำนวน 7 ข้อ มีค่าดัชนีความสอดคล้องตั้งแต่ 0.67-1.00 ค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.28-0.80 ค่าอำนาจจำแนกอยู่ตั้งแต่ 0.20-0.60 ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก และแบบเติมคำเท่ากับ 0.66 และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบแบบอัตนัยเท่ากับ 0.89

5.2 การทดลองและการเก็บรวบรวมข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยตนเอง ซึ่งได้ทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลดังนี้

5.2.1 ผู้วิจัยชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ บทบาทของครูและบทบาทของนักเรียนในการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

5.2.2 จัดการเรียนการสอน เรื่อง วงกลม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 40 ด้วยวิธีการสร้างข้อความ คาคการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นทั้งหมด 6 แผน แผนละ 2 คาบเรียน คาบเรียนละ 45 นาที กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างจำนวน 40 คน ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 โดยผู้วิจัยดำเนินการ จัดการเรียนการสอน

5.2.3 เมื่อดำเนินการทดลองตามแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความ คาคการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ครบจำนวน 6 แผน ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบหลังเรียน โดยใช้แบบทดสอบวัดความรู้เชิงนิทัศน์และความสามารถในการ พิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งเป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 7 ข้อ แบบเติมคำ จำนวน 7 ข้อ และแบบอัตนัย จำนวน 7 ข้อ กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างจำนวน 40 คน ใช้เวลา 90 นาที

5.2.4 ผู้วิจัยตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดความรู้เชิงนิทัศน์และความสามารถในการ พิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างจำนวน 40 คน แล้วนำคะแนนมาทำการวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางสถิติ จากนั้นหา จำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์ (ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็มขึ้นไป) เพื่อตรวจสอบสมมติฐานต่อไป

6. ผลการวิจัย

คะแนนความรู้เชิงนิทัศน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างจำนวน 40 คน แสดงดังตารางที่ 1 ผลการทดสอบ สมมติฐานของการวิจัยที่ว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความรู้เชิงนิทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการ สร้างข้อความ คาคการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด แสดงดังตารางที่ 2 คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างจำนวน 40 คน แสดงดังตารางที่ 3 และผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัยที่ว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความสามารถในการ พิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการ จัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความ คาคการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่า ร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด แสดงดังตารางที่ 4

ตารางที่ 1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความรู้เชิงนิทัศน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม	\bar{X}	S.D.
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	40	22	16.03	3.47

จากตารางที่ 1 พบว่า คะแนนความรู้เชิงนิทัศน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 16.03 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 3.47

ตารางที่ 2 ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัยที่ว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความรู้เชิงนิทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วย วิธีการสร้างข้อความ คาคการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่มีความรู้เชิงนิทัศน์ เรื่อง วงกลม ผ่านเกณฑ์ (ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม)	ร้อยละนักเรียนที่มีความรู้เชิงนิทัศน์ เรื่อง วงกลม ผ่านเกณฑ์	ค่าสถิติ ทดสอบ t	ค่า p (p-value)
40	31	77.50	2.259*	0.016

* ที่ระดับนัยสำคัญ .05

จากตารางที่ 2 พบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงนิทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอน ด้วยวิธีการสร้างข้อความ คาคการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียน ทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานของการวิจัย

ตารางที่ 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม	\bar{X}	S.D.
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	40	40	26.28	6.14

จากตารางที่ 3 พบว่า คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 26.28 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6.14

ตารางที่ 4 ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัยที่ว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ผ่านเกณฑ์ (ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม)	ร้อยละนักเรียนที่มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ผ่านเกณฑ์	ค่าสถิติทดสอบ t	ค่า p (p-value)
40	30	75.00	1.936*	0.035

* ที่ระดับนัยสำคัญ .05

จากตารางที่ 4 พบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานของการวิจัย

7. สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

7.1 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05 เมื่อพิจารณาถึงสาเหตุในส่วนของขั้นตอนในการจัดการเรียนการสอนพบว่า การจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่องวงกลม เป็นการจัดการเรียนการสอนที่มุ่งเน้นให้นักเรียนได้ค้นพบความรู้เกี่ยวกับบทนิยาม และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับ วงกลม ด้วยตนเอง ผ่านการสำรวจโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งเป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต ด้วยการสังเกตจากหลาย ๆ ตัวอย่าง โดยมีครูคอยให้ความช่วยเหลือผ่านการใช้คำถามกระตุ้น และมีการอภิปรายถึงการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการเขียนข้อความเชิงบทนิยามและข้อความคาดการณ์ที่ถูกต้อง สอดคล้องกับ Morselli [8] ที่กล่าวว่า ลักษณะของการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนได้ใช้กระบวนการคิดและให้เหตุผลในการค้นหาความสัมพันธ์บางอย่าง และพิสูจน์ยืนยันว่าความสัมพันธ์เหล่านั้นเป็นจริงในกรณีทั่วไป จนนำไปสู่ข้อสรุปทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่าการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่องวงกลม จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์ ผ่านการสำรวจสิ่งที่เหมือนกัน และสิ่งที่แตกต่างกันในหลาย ๆ ตัวอย่างได้อย่างรวดเร็วและได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องจากการใช้เครื่องมือการวัดในโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต จึงส่งผลให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์ ทั้งในส่วนของภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่ได้จากการสังเกตรูปภาพหลาย ๆ ตัวอย่างที่เป็นหลักฐานเชิงประจักษ์ และบทนิยามมโนทัศน์ ที่ได้จากการฝึกฝนการเขียนข้อความเชิงบทนิยามและข้อความคาดการณ์ สอดคล้องกับ Arends [13] ที่ได้กล่าวถึงแนวทางการจัดการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์ในรูปแบบของ Concept Attainment ว่า ครูควรยกตัวอย่างที่สอดคล้องและไม่สอดคล้องก่อนแล้วให้นักเรียนใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยในการสรุปมโนทัศน์นั้น และ Aumporn Makanong [14] ที่ได้กล่าวถึงแนวทางการจัดการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์โดยสรุปได้ว่า ครูควรพยายามให้นักเรียนทำกิจกรรม คิด สังเกต วิเคราะห์ อภิปราย และหาข้อสรุปด้วยตนเอง โดยอาจใช้คำถามที่ส่งเสริมกระบวนการคิด เพื่อช่วยให้นักเรียนสร้างความรู้ด้วยตนเองและขยายไปสู่ความหมายใหม่หรือความรู้เชิงนามธรรมได้ และการเลือกใช้สื่อ เอกสารประกอบการสอน นวัตกรรมและเทคโนโลยีทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับความรู้เชิงมโนทัศน์ที่ต้องการพัฒนามีส่วนส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์ได้ดียิ่งขึ้น จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า การจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์ได้เป็นอย่างดี

7.2 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ซึ่งผลที่ได้สอดคล้องกับงานวิจัยของ Frerking [15] ที่ได้ศึกษาการจัดการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตเพื่อส่งเสริมขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ผลการวิจัยพบว่า การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในลักษณะดังกล่าว ทำให้นักเรียนสามารถสร้างข้อความคาดการณ์และเขียนพิสูจน์ได้ดียิ่งขึ้น ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนดีขึ้น และนักเรียนมีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบของแวน ฮีลี สูงขึ้น และงานวิจัยของ Nguyen [16] ที่ได้ทำการศึกษาการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งผลการวิจัยพบว่า กลุ่มตัวอย่างมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

หลังเรียนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra สูงกว่าก่อนเรียน ทั้งนี้เมื่อพิจารณาถึงการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ในแต่ละชั้น จะพบว่าอาจส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนในแต่ละด้านได้ดังนี้

7.2.1 ด้านความสามารถในการทำความเข้าใจในปัญหา เมื่อพิจารณาถึงการจัดการเรียนการสอนในชั้นสำรวจปัญหา จะพบว่าในชั้นนี้เป็นการฝึกให้นักเรียนเขียนสิ่งที่ปัญหากำหนดให้และสิ่งที่ต้องการทราบ ซึ่งการกระตุ้นให้นักเรียนเขียนสิ่งเหล่านี้ จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนมีความพยายามในการอ่านและวิเคราะห์ปัญหา รวมไปถึงสังเกตองค์ประกอบต่าง ๆ ในรูปที่อยู่ในโปรแกรม GeoGebra ส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการทำความเข้าใจในปัญหาได้ดียิ่งขึ้น

7.2.2 ด้านความสามารถในการเขียนแสดงการพิสูจน์ และความสามารถในการอ้างอิงหรือการนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์ เมื่อพิจารณาถึงการจัดการเรียนการสอนในชั้นสำรวจข้อความคาดการณ์ จะพบว่าการจัดการเรียนการสอนในชั้นนี้ เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ร่วมกันอภิปรายและค้นหาเหตุผลที่ทำให้ข้อความคาดการณ์เป็นจริงในแต่ละประเด็นผ่านการสังเกตองค์ประกอบต่าง ๆ ของรูปที่อยู่ในโปรแกรม GeoGebra ซึ่งกระบวนการนี้เป็นสิ่งสำคัญที่จะช่วยให้นักเรียนได้ฝึกฝนการสังเกตมีความพยายามในการค้นหาข้อความและเหตุผลทางคณิตศาสตร์ รวมไปถึงการค้นหาแนวทางในการสร้างเพื่อพิสูจน์ ซึ่งสิ่งเหล่านี้ จะช่วยทำให้นักเรียนมีความสามารถในการเขียนแสดงการพิสูจน์และมีความสามารถในการอ้างอิงหรือการนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์ได้ดียิ่งขึ้น สอดคล้องกับ Hoyles and Jones [17] และ Goddjin and Reuter [18] ที่ได้กล่าวถึงแนวทางในการจัดการเรียนการสอนที่ส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ว่า การใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตรวมกับการออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนที่เหมาะสม จะสามารถช่วยส่งเสริมและกระตุ้นให้นักเรียนค้นหาแนวทางในการพิสูจน์ และพยายามค้นหาเหตุผลในแต่ละข้อความ ซึ่งจะเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์และอ้างเหตุผลได้ดียิ่งขึ้น

7.2.3 ความสามารถในการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ เมื่อพิจารณาถึงการจัดการเรียนการสอนในชั้นการเขียนข้อความคาดการณ์และชั้นการพิสูจน์ จะพบว่าการจัดการเรียนการสอนในสองชั้นนี้เป็นการให้นักเรียนได้เขียนเรียบเรียงผลที่ได้จากการทำกิจกรรมในชั้นสำรวจปัญหาและชั้นสำรวจข้อความคาดการณ์ตามลำดับ ซึ่งการจัดการเรียนการสอนในสองชั้นนี้จะกระตุ้นให้นักเรียนใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องผ่านกิจกรรมการนำเสนอและการร่วมกันอภิปรายถึงความเหมาะสมของการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์โดยการให้ข้อเสนอแนะของครูและเพื่อนร่วมชั้นเรียน ซึ่งทำให้นักเรียนได้ฝึกฝนและตระหนักถึงความสำคัญของการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง ส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ได้ดียิ่งขึ้น สอดคล้องกับ Hanna [19] ที่ได้กล่าวถึงแนวทางในการสอนเพื่อส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ว่าครูควรจัดการเรียนการสอนให้นักเรียนตระหนักถึงการให้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ให้ถูกต้อง เนื่องจากเมื่อนักเรียนมีความเข้าใจในการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องแล้ว การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนในเรื่องต่าง ๆ ย่อมมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] Komon Paisal. 1997. **The Development of Individualized Instruction Package in Geometry For Lower Secondary Mathematics Teachers**. Doctor of Education (Mathematics Education), Srinakharinwirot University.
- [2] Sherard III, W. H. 1981. Why is Geometry a Basic Skill? **The Mathematics Teacher**, 74(1), p. 19-21.
- [3] The Ministry of Education. 2008. **The Basic Education Core Curriculum**. Bangkok: The Agricultural Co-operative Federation of Thailand.
- [4] The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. 2011. **Additional Mathematics 2nd Semester for Secondary 3**. Bangkok: Business Organization of the Office of the Welfare Promotion Commission for Teachers and Educational Personnel.
- [5] Trairong Klumbut. 2014. **The Development of Activity Packages to Enhance Reasoning Ability on Reasoning about Triangle and Quadrilateral for Grade 9 Students**. Master of Education (Science Education), Naresuan University.

- [6] Saranluck Butrarat. 2010. **Learning Activites Management to Promote Students' Reasoning Skill on "Circle" by Using The Geometer's Sketchpad Program for Matthayomsuksa Three Students at Banglamung School.** Master of Education (Teaching Mathematics), Kasetsart University.
- [7] Supattra Kerdmongkon. 2007. **Learning Activities on Geometric Circle Properties Using Dynamic Geometry Software for Mathayomsuksa III Students.** Master of Education (Mathematics), Srinakharinwirot University.
- [8] Morselli, F. 2006. Use of Examples in Conjecturing and Proving: An Exploratory Study. In Novotna, J., et al. (Eds.). **Proceedings of 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** p. 185-192. Prague: Atelier Guimaec.
- [9] Alibert, D. and M. Thomas. 2002. Research on Mathematical Proof. In David, T. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking.** p. 215-230. New York: Kluwer Academic Publishers.
- [10] Ubol Klongkratoke. 2012. Surveying Geometry Using Technology. In Preecha Naoyenphon, et al. (Eds.). **Provision of Learning Experience in Mathematics.** p. 1-119. Nonthaburi: Sukhothai Thammathirat Open University.
- [11] Frank, A. B. and Mariotti, M. A. 2010. Conjecturing and Proving in Dynamic Geometry: The Elaboration Of Some Research Hypotheses. In Guerrier, V. D., et al. (Eds.). **Proceedings of CERME 6.** p. 231-240. Lyon: INRP.
- [12] Preiner, J. 2008. **Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra.** Salzburg. University of Salzburg. Retrieved March 26, 2018, from <https://archive.geogebra.org/static/publications/jpreiner-dissertation.pdf>
- [13] Arends, R. L. 2012. **Learning to Teach.** 9th ed. New York: McGraw-Hill.
- [14] Aumporn Makanong. 2015. **Mathematics for Secondary School Teachers.** 2nd ed. Bangkok: Faculty of Education Chulalongkorn University.
- [15] Frerking, B. G. 1994. **Conjecturing and Proof Writing in Dynamic Geometry.** Doctor of Philosophy (Mathematics Education), Georgia State University.
- [16] Nguyen, D. N. 2012. The Development of the Proving Process Within a Dynamic Geometry Environment. **European Researcher,** 32(10-2), p. 1731-1744.
- [17] Hoyles, C. and Jones, K. 1998. Proof in dynamic geometry contexts. In Mammana, C. and Villani, V. (Eds.). **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st-Century.** p. 121-128. Dordrecht: Kluwer.
- [18] Goddjin, A., Kindt, M. and Reuter, W. 2014. **Geometry with Applications and Proofs: Advanced Geometry for Senior High School, Student Text and Background Information.** Rotterdam: Sense Publishers.
- [19] Hanna, G. 2002. Mathematical Proof. In Tall, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking.** p. 54-64. New York: Kluwer Academic.