

## $\Gamma$ -TA-กรุปพอยต์ปริกติกุสลับขวาและซ้าย

ไพโรจน์ เที่ยวยะยัง<sup>1</sup> และ กุลนิตา รอดเรือง<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม จังหวัดพิษณุโลก 65000 ประเทศไทย

\* ผู้นิพนธ์ประสานงาน อีเมล: kunnida.r@psru.ac.th DOI: 10.14416/JASET.KMUTNB.2026.02.003

รับเมื่อ 4 ธันวาคม 2568 แก้ไขเมื่อ 23 มีนาคม 2569 ตอบรับเมื่อ 29 เมษายน 2569

### บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอแนวคิดเชิงนวัตกรรมการทางพีชคณิตที่เรียกว่า  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยต์ปริกติกุสลับโดยมุ่งศึกษาสมบัติและโครงสร้างลักษณะเฉพาะของ  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยต์เปลี่ยนหมู่ปริกติกุ ผลการศึกษาชี้ให้เห็นว่า  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยต์ปริกติกุสลับซ้ายเป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปเสมอ อีกทั้งยังพิสูจน์ได้ว่าทุก  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยต์ปริกติกุสลับซ้ายเป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยต์ปริกติกุสลับขวาและในทางกลับกัน  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยต์ปริกติกุสลับขวาเป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยต์ปริกติกุสลับซ้าย เช่นเดียวกัน ผลลัพธ์ดังกล่าวสะท้อนถึงความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติของ  $\Gamma$ -กรุปพอยต์ทั้งสองลักษณะและช่วยขยายขอบเขตความเข้าใจในโครงสร้างของ  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยต์ให้ลึกซึ้งยิ่งขึ้น

**คำสำคัญ:**  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยต์,  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยต์ปริกติกุสลับซ้าย,  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยต์ปริกติกุสลับขวา, กรุปพอยต์,  $\Gamma$ -กรุปพอยต์

## Left and Right Transposition Regular $\Gamma$ -TA-Groupoids

Pairote Yiarayong<sup>1</sup>, and Kunnida Rodruang<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics Faculty of Science and Technology Pibulsongkram Rajabhat University, Phitsanulok 65000, Thailand

\* Corresponding Author, E-mail: kunnida.r@psru.ac.th DOI: 10.14416/JASET.KMUTNB. 2026.02.003

**Received** 4 December 2025; **Revised** 23 March 2026; **Accepted** 29 April 2026

### ABSTRACT

This paper introduces an innovative algebraic concept called the transposition regular  $\Gamma$ -TA-groupoid. The study focuses on investigating the fundamental properties and structural characteristics of the regular associative  $\Gamma$ -TA-groupoid. The results demonstrate that every left transposition regular  $\Gamma$ -TA-groupoid is always a  $\Gamma$ -semigroup. Furthermore, it is proved that every left transposition regular  $\Gamma$ -TA-groupoid is also a right transposition regular  $\Gamma$ -TA-groupoid, and conversely, every right transposition regular  $\Gamma$ -TA-groupoid is a left transposition regular  $\Gamma$ -TA-groupoid. These findings reveal a relationship between the two forms of  $\Gamma$ -TA-groupoids and provide deeper insight into the structural behavior of  $\Gamma$ -TA-groupoids within the framework of algebraic regularity.

**KEYWORDS:**  $\Gamma$ -TA-groupoid, Left transposition regular  $\Gamma$ -TA-groupoid, Right transposition regular  $\Gamma$ -TA-groupoid, Groupoid,  $\Gamma$ -Groupoid

## 1. บทนำ

การศึกษาความสัมพันธ์โครงสร้างพีชคณิตไม่เปลี่ยนหมู่ เช่น กรุปพอยด์ (groupoid) และ  $\Gamma$ -กรุปพอยด์ ( $\Gamma$ -groupoid) เป็นหัวข้อสำคัญในพีชคณิตสมัยใหม่ เนื่องจากขยายแนวคิดพื้นฐานเพื่อนำไปสู่การค้นพบสมบัติโครงสร้างใหม่ ๆ อย่างต่อเนื่อง เช่น ในปี ค.ศ. 2006, ผลงานของ Mushtaq และ Khan (Mushtaq & Khan, 2006) ได้อธิบายของไอดีลเฉพาะ (prime ideal) ใน  $AG^*$ -กรุปพอยด์ ( $AG^*$ -groupoid) โดยอาศัยเงื่อนไขนิพจน์ (idempotent) ต่อมา ในปี ค.ศ. 2013, ผลลัพธ์ของ Ahmad และคณะ (Ahmad et al., 2013) ที่พิสูจน์ว่า  $AG^*$ -กรุปพอยด์เป็น  $Bol^*$ - $AG$ -กรุปพอยด์ ( $Bol^*$ - $AG$ -groupoid) ได้แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์เชิงโครงสร้างที่กว้างมากขึ้น ขณะที่ในปี ค.ศ. 2014, Rashad และคณะ (Rashad et al., 2014) ได้แสดงว่าคลาสของ  $AG$ -กรุปพอยด์ถ่ายทอดซ้าย (left transitive  $AG$ -groupoid) สอดคล้องกับคลาสของ  $T^2$ - $AG$ -กรุปพอยด์ ( $T^2$ - $AG$ -groupoid) ผลงานในช่วงปี ค.ศ. 2020-2023, ได้เพิ่มแนวความคิดใหม่ เช่น กรุปพอยด์เปลี่ยนหมู่วัฏจักรชนิดที่ 2 (type-2 cyclic associative groupoid) หรือ  $T2CA$ -กรุปพอยด์ ( $T2CA$ -groupoid) ที่นำเสนอโดย Zhang และคณะ (Zhang et al., 2020a), การศึกษาการตัดออก (cancellation) ใน  $CA$ -กรุปพอยด์ ( $CA$ -groupoid) โดย Ma และคณะ (Ma et al., 2020) และนอกจากนี้ Zhang และคณะ (Zhang et al., 2020b) ยังได้เสนอกรุปพอยด์เปลี่ยนหมู่ทาร์สกี (Tarski associative groupoid) หรือ  $TA$ -กรุปพอยด์ ( $TA$ -groupoid) พร้อมการวิเคราะห์สมบัติพื้นฐานและความสัมพันธ์เชิงโครงสร้าง, การพัฒนาต่อเนื่องของโครงสร้าง  $TA$ -กรุปพอยด์โดย An และคณะ (An et al., 2022a) พิสูจน์ว่า  $TA$ - $NET$ -กรุปพอยด์ ( $TA$ - $NET$ -groupoid) ทุกตัวเป็นกึ่งกรุป (semigroup) และต่อมา An และคณะ (An et al., 2022b) ได้พิสูจน์ว่าความสัมพันธ์การตัดออก (cancellativity) และ ควอซี-การตัดออก (quasi-cancellativity) ใน  $CA$ -กรุปพอยด์, ผลงานของ Zhang และ Du (Zhang & Du, 2022) ได้ขยายแนวความคิดสู่กึ่งกรุปปกติคู่สลับ (transposition regular semigroups) โดยการแปลงตำแหน่ง (transforming positions) ของสมาชิกในเงื่อนไขปกติ, การนำเสนอ  $AG$ -กรุปพอยด์ปกติคู่สลับ (transposition regular  $AG$ -groupoid) และ  $L1$ -กรุปพอยด์ปกติคู่สลับ (transposition regular  $L1$ -groupoid)

โดย Du และคณะ. (Du et al., 2022) นอกจากนี้ Chen และคณะ (Chen et al., 2023) ยังขยายแนวความคิดของ  $TA$ -กรุปพอยด์สู่โครงสร้าง  $TA$ -กรุป ( $TA$ -group) โดยผ่านกรุปพอยด์สามสิ่งขยายนิวโทรโซฟิกลเปลี่ยนหมู่ทาร์สกี (Tarski associative neutrosophic extended triplet groupoid)

ในการศึกษาโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ได้ขยายแนวความคิดไปสู่  $\Gamma$  ซึ่งมีบทบาทสำคัญในการพัฒนาโครงสร้างดังกล่าวอย่างต่อเนื่อง เช่น ในปี ค.ศ. 2010, Chattopadhyay (Chattopadhyay, 2010) ได้ศึกษาสมบัติของกึ่งไฮเพอร์กรุปที่สัมพันธ์กับ  $\Gamma$ -กึ่งกรุปเปลี่ยนหมู่ (associated  $\Gamma$ -semigroup) ในปีเดียวกันนั้น Singh และ Khan (Singh & Khan, 2010) ได้ศึกษาสมบัติของควอซี- $\Gamma$ -ดูดซับปกติ (regular quasi- $\Gamma$ -absorbent) ใน  $\Gamma$ -กรุปพอยด์-แลตทิซ ( $\Gamma$ -groupoid-lattices) ต่อมา Shah และ Rehman (Shah & Rehman, 2010) ได้นำเสนอการวางนัยทั่วไปของ  $\Gamma$ -ไอดีล ( $\Gamma$ -ideal) และ  $\Gamma$ -ไบ-ไอดีล ( $\Gamma$ -bi-ideal) ใน  $\Gamma$ - $AG$ -กรุปพอยด์ ( $\Gamma$ - $AG$ -groupoid) ซึ่งขยายผลลัพธ์มาจาก  $AG$ -กรุปพอยด์ ในปี ค.ศ. 2012, Faisal และคณะ (Faisal et al., 2012) ได้พิสูจน์ว่า  $\Gamma$ -ไอดีลสองด้านวิชันนัย (fuzzy  $\Gamma$ -two-sided ideal) ของ  $\Gamma$ - $AG^{**}$ -กรุปพอยด์อันดับ (2, 2)-ปกติ ((2, 2)-regular ordered  $\Gamma$ - $AG^{**}$ -groupoid) เป็นกึ่งแลตทิซ (semilattice) ที่มีเอกลักษณ์ ต่อมาในปี ค.ศ. 2013, Sabri (Sabri, 2013) ได้ศึกษาลักษณะเฉพาะของ  $\Gamma$ -กึ่งกรุปนิพจน์ (idempotent  $\Gamma$ -semigroup) และในปีเดียวกันนั้น Shah และ Rehman (Shah & Rehman, 2013) ศึกษาเกี่ยวกับ  $\Gamma$ - $AG$ -กรุปพอยด์เปลี่ยนหมู่เฉพาะที่ (locally associative  $\Gamma$ - $AG$ -groupoid) ที่มีเอกลักษณ์ซ้าย (left identity) ในปี ค.ศ. 2020, Bhargavi และคณะ (Bhargavi et al., 2020) ได้เสนอแนวความคิด  $\Gamma$ -กึ่งกรุปไตรภาควิชันนัย (fuzzy ternary  $\Gamma$ -semigroup) พิสูจน์สมบัติของ  $\Gamma$ -กึ่งกรุปอันดับที่บรรจุฐานสองด้าน ( $\Gamma$ -semigroup containing two-sided base) โดย Jantan และคณะ (Jantan et al., 2021) นอกจากนี้ในปี ค.ศ. 2021, Smisha และ Romeo (Smisha & Romeo, 2021) ได้ขยายแนวความคิดของอะมัลแกมกึ่งกรุป (semigroup amalgam) ไปยังอะมัลแกม  $\Gamma$ -กึ่งกรุป ( $\Gamma$ -semigroup amalgam) และสุดท้าย

ในปี ค.ศ. 2023, Chuphan และ Yiarayong (Chuphan & Yiarayong, 2023) ได้นำเสนอแนวความคิด  $\Gamma$ -RA-กึ่งกรุป ( $\Gamma$ -RA-semigroup)

ในบทความนี้ได้ขยายแนวความคิดของ TA-กรุปพอยด์ปกติคู่สลับซ้าย (left transposition regular TA-groupoid) (An & Zhang, 2022) เพื่อศึกษาโครงสร้างสมบัติพื้นฐานของ  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปกติคู่สลับซ้าย (left transposition regular  $\Gamma$ -TA-groupoid) รวมทั้งพิสูจน์ว่า  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปกติคู่สลับซ้ายสมมูลกันกับ  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปกติคู่สลับขวา (right transposition regular  $\Gamma$ -TA-groupoid)

## 2. ความรู้พื้นฐาน

เพื่อให้การศึกษาสมบัติในบทความนี้มี ความชัดเจนและเป็นระบบ จึงกำหนดความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับกรุปพอยด์ TA-กรุปพอยด์ TA-กรุปพอยด์ปกติคู่สลับซ้าย  $\Gamma$ -กรุปพอยด์  $\Gamma$ -AG-กรุปพอยด์ปกติและ  $\Gamma$ -กึ่งกรุป ดังต่อไปนี้

**บทนิยาม 2.1** (Yiarayong, 2022) กำหนดให้  $S$  เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียก  $S$  ภายใต้การดำเนินการ  $*$  ว่า **กรุปพอยด์ (groupoid)** ก็ต่อเมื่อ  $*$ :  $S \times S \rightarrow S$  โดยที่  $(x, y) \mapsto xy$  สำหรับทุก  $x, y \in S$

**บทนิยาม 2.2** (Zhang et al., 2020b) กำหนดให้  $S$  เป็นกรุปพอยด์ จะเรียก  $S$  ว่า **กรุปพอยด์เปลี่ยนหมู่ทาร์สกี (Tarski associative groupoid)** ถ้า  $(xy)z = x(zy)$  สำหรับทุก  $x, y, z \in S$

**บทนิยาม 2.3** (An & Zhang, 2022) กำหนดให้  $S$  เป็น TA-กรุปพอยด์และ  $x \in S$  จะกล่าวว่า

1.  $x$  เป็น **ปกติคู่สลับซ้าย (left transposition regular)** ถ้ามี  $a \in S$  ซึ่ง  $(ax)x = x$  และจะเรียก  $S$  ว่า **TA-กรุปพอยด์ปกติคู่สลับซ้าย (left transposition regular TA-groupoid)** ถ้าสมาชิกทุกตัวของ  $S$  เป็นปกติคู่สลับซ้าย

**บทนิยาม 2.4** (Kehayopulu, 2009) กำหนดให้  $S$  และ  $\Gamma$  เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียก  $S$  ภายใต้การดำเนินการ

$*$  ว่า  **$\Gamma$ -กรุปพอยด์ ( $\Gamma$ -groupoid)** ถ้า  $x, y \in S$  และ  $\gamma \in \Gamma$  แล้ว  $*$ :  $S \times \Gamma \times S \rightarrow S$  ซึ่ง  $(x, \gamma, y) \mapsto x\gamma y$

**บทนิยาม 2.5** (Shah & Rehman, 2010) กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -กรุปพอยด์และ  $x \in S$

1. จะเรียก  $S$  ว่า  **$\Gamma$ -AG-กรุปพอยด์ ( $\Gamma$ -AG-groupoid)** ถ้า  $x, y, z \in S$  และ  $\alpha, \gamma \in \Gamma$  แล้วสมการ  $(x\gamma y)\alpha z = (z\gamma y)\alpha x$  เป็นจริง

2. จะเรียก  $x$  ว่า **ปกติ (regular)** ถ้ามี  $a \in S$  และ  $\alpha, \gamma \in \Gamma$  โดยที่  $x = x\gamma(a\alpha x)$

3. จะเรียก  $S$  ว่า  **$\Gamma$ -AG-กรุปพอยด์ปกติ (regular  $\Gamma$ -AG-groupoid)** ถ้าสมาชิกทุกตัวเป็นปกติ

**บทนิยาม 2.6** (Sen & Saha, 1986) กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -กรุปพอยด์ เรียก  $S$  ว่า  **$\Gamma$ -กึ่งกรุป ( $\Gamma$ -semigroup)** ถ้า  $x, y, z \in S$  และ  $\alpha, \gamma \in \Gamma$  แล้ว  $(x\gamma y)\alpha z = x\gamma(y\alpha z)$

## 3. $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปกติคู่สลับซ้าย

กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -กรุปพอยด์โดยที่  $x \in S$  และ  $m$  เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 0 จะเรียก  $x^m$  ว่า  $x$  ยกกำลัง  $m$  ถ้า  $x^m = \underbrace{((x\gamma x)\gamma x) \dots}_{m} \gamma x$  สำหรับทุก  $\gamma \in \Gamma$

$\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์พัฒนามาจากการขยายแนวความคิดของโครงสร้างพีชคณิตสองโครงสร้าง ได้แก่ กรุปพอยด์เปลี่ยนหมู่ทาร์สกีกับ  $\Gamma$ -กรุปพอยด์ ดังบทนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม 3.1** กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -กรุปพอยด์ จะเรียก  $S$  ว่า  **$\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ ( $\Gamma$ -TA-groupoid)** ถ้า  $x, y, z \in S$  และ  $\alpha, \gamma \in \Gamma$  แล้ว  $(x\gamma y)\alpha z = x\gamma(z\alpha y)$

ชัดเจนว่าใน  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์มีสมบัติ  $(x_1\gamma_1 x_2)\gamma_2 (x_3\gamma_3 x_4) = (x_1\gamma_1 x_4)\gamma_2 (x_3\gamma_3 x_2)$  สำหรับทุก  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in S$  และ  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$  โดยปกติแล้ว  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์จะไม่มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ทั่วไปบทตั้งต่อไปนี้จะนำเสนอเงื่อนไขที่ทำให้  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์มีสมบัติเปลี่ยนหมู่

**บทตั้ง 3.2** กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ ถ้า  $x \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  แล้ว

1.  $(x\gamma x)\gamma x = x\gamma(x\gamma x) = x\gamma x\gamma x$
2.  $(x\gamma x)\alpha x = x\gamma(x\alpha x) = x\gamma x\alpha x$

**การพิสูจน์** 2. กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์และ  $x \in S, \gamma, \alpha \in \Gamma$  โดยบทนิยาม 3.1 จะได้ว่า

$$(x\gamma x)\alpha x = x\gamma(x\alpha x)$$

สำหรับทุก  $x \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  ดังนั้น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์มีสมบัติเปลี่ยนหมู่เมื่อใช้เงื่อนไขของบทนิยาม 3.1 โดยข้อ 2 จะได้ว่า  $(x\gamma x)\gamma x = x\gamma(x\gamma x) = x\gamma x\gamma x$  ทำให้ได้ว่า  $x\gamma(x\gamma x) = x\gamma x\gamma x$  เป็นจริง

**ข้อสังเกต** จากบทตั้ง 3.2 จะได้ว่า

1.  $x^m = (((x\gamma x)\gamma x)...) \gamma x = x\gamma x\gamma x... \gamma x$  สำหรับทุก  $x \in S$  และ  $\gamma \in \Gamma$
2. จากข้อ 1 จะได้  $x^m \gamma x = x\gamma x^m$  สำหรับทุก  $x \in S$  และ  $\gamma \in \Gamma$

บทนิยามต่อไปได้นำเสนอแนวคิดของสมาชิกปกติใน  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ เพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาสมบัติที่เกี่ยวข้องในทฤษฎีบทต่อไป ดังนี้

**บทนิยาม 3.3** กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์และ  $x \in S$  จะเรียก  $x$  ว่า **ปกติ (regular)** ถ้ามี  $a \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  ซึ่ง  $x = x\gamma(a\alpha x)$  และจะเรียก  $S$  ว่า  **$\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปกติ (regular  $\Gamma$ -TA-groupoid)** ถ้าสมาชิกทุกตัวเป็นปกติ

จากบทนิยามของ  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปกติ สามารถขยายผลไปสู่การอธิบายสมบัติยกกำลัง เพื่อให้เห็นถึงโครงสร้าง ดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.4** กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปกติ และ  $m$  เป็นจำนวนนับ ถ้า  $x \in S$  จะมี  $a \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  ซึ่ง  $x^m \alpha a^m = x\gamma a$

**การพิสูจน์** จะพิสูจน์โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ กำหนดให้  $x \in S$  เนื่องจาก  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์

ปกติจะได้  $x = x\gamma(a\alpha x)$  สำหรับบาง  $a \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  พิจารณา

$$x^2 \alpha a^2 = (x\gamma x)\alpha(a\gamma a) \quad [\text{เลขยกกำลัง}]$$

$$= ((x\gamma x)\alpha)\gamma a \quad [\text{บทนิยาม 3.1}]$$

$$= (x\gamma(a\alpha x))\gamma a \quad [\text{บทนิยาม 3.1}]$$

$$= x\gamma a \quad [\text{สมมติฐาน.....(1)}]$$

ดังนั้น  $x^2 \alpha a^2 = x\gamma a$  ต่อไปกำหนดให้  $x^k \alpha a^k = x\gamma a$  สำหรับ  $k$  เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 0 เพราะว่า

$$x^{k+1} \alpha a^{k+1} = (x^k \gamma x)\alpha(a^k \gamma a) \quad [\text{เลขยกกำลัง}]$$

$$= (x^k \gamma x)\alpha(a\gamma a^k) \quad [\text{บทตั้ง 3.2}]$$

$$= (x^k \alpha a^k)\alpha(a\gamma x) \quad [\text{ทฤษฎีบท 3.6}]$$

$$= (x\gamma a)\alpha(a\gamma x) \quad [\text{สมมติฐาน}]$$

$$= (x\gamma x)\alpha(a\gamma a) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}]$$

$$= x^2 \alpha a^2 \quad [\text{เลขยกกำลัง}]$$

$$= x\gamma a \quad [\text{จาก (1)}]$$

ดังนั้น  $x^{k+1} \alpha a^{k+1} = x\gamma a$  จากที่กล่าวมาจึงสรุปได้ว่า

$$x^m \alpha a^m = x\gamma a$$

ในการศึกษาโครงสร้างของ  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ สมบัติของการสลับซ้ายและสลับขวาเป็นปัจจัยสำคัญที่ใช้ในการศึกษาความเป็นปกติขององค์ประกอบภายในระบบเพื่อความชัดเจนและได้ให้คำจำกัดความของสมบัติ ดังนี้

**บทนิยาม 3.5** กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์และ  $x \in S$  จะกล่าวว่า

1.  $x$  เป็น **ปกติคู่สลับซ้าย (left transposition regular)** ถ้ามี  $a \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  ซึ่ง  $(a\gamma x)\alpha x = x$  และจะเรียก  $S$  ว่า  **$\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปกติคู่สลับซ้าย (left transposition regular  $\Gamma$ -TA-groupoid)** ถ้าสมาชิกทุกตัวของ  $S$  เป็นปกติคู่สลับซ้าย

2.  $x$  เป็น **ปกติคู่สลับขวา (right transposition regular)** ถ้ามี  $a \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  ซึ่ง  $x\gamma(x\alpha a) = x$  และจะเรียก  $S$  ว่า  **$\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปกติคู่สลับขวา**

(right transposition regular  $\Gamma$ -TA-groupoid) ถ้าสมาชิกทุกตัวของ  $S$  เป็น ปริกติคู่สลับซ้าย

ต่อไปตัวอย่างแสดง  $S$  ภายใต้การดำเนินการ  $\circ$  เป็น TA-กรุปพอยด์แต่ไม่เป็น TA-กรุปพอยด์ปริกติคู่สลับซ้าย  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปริกติคู่สลับซ้าย

**ตัวอย่าง 3.6** กำหนดให้  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\Gamma = \{\gamma, \alpha\}$

และ  $\circ$  เป็นการดำเนินการทวิภาคบน  $S$  ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ตารางแสดงการดำเนินการทวิภาคบน  $S$

| $\circ$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| 1       | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| 2       | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 3       | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 4       | 4 | 5 | 5 | 4 | 5 | 4 |
| 5       | 5 | 4 | 4 | 5 | 4 | 5 |
| 6       | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 6 |

ตารางที่ 2 ตารางแสดง  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์

| $\gamma$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| 1        | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| 2        | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 3        | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 4        | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 5        | 1 | 2 | 3 | 5 | 5 | 5 |
| 6        | 1 | 2 | 3 | 5 | 5 | 6 |

ตารางที่ 3 ตารางแสดง  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์

| $\alpha$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| 1        | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 2        | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 3        | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| 4        | 4 | 6 | 5 | 4 | 5 | 6 |
| 5        | 5 | 4 | 6 | 5 | 6 | 4 |
| 6        | 6 | 5 | 4 | 6 | 4 | 5 |

เห็นได้ชัดเห็นว่า  $S$  ภายใต้การดำเนินการ  $\circ$  เป็น TA-กรุปพอยด์แต่ไม่เป็น TA-กรุปพอยด์ปริกติคู่สลับซ้าย เนื่องจากมี  $3 \in S$  ดังนั้นจึงได้  $(1 \circ 3) \circ 3 = 2 \circ 3 = 1$ ,  $(2 \circ 3) \circ 3 = 1 \circ 3 = 2$ ,  $(3 \circ 3) \circ 3 = 1 \circ 3 = 2$ ,  $(4 \circ 3) \circ 3 = 5 \circ 3 = 4$ ,  $(5 \circ 3) \circ 3 = 4 \circ 3 = 5$ ,  $(6 \circ 3) \circ 3 = 2 \circ 3 = 1$  ชัดเจนว่า  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปริกติคู่สลับซ้ายเพราะว่า

สำหรับ  $1 \in S$  มี  $1 \in S, \gamma \in \Gamma$  ที่ซึ่ง  $(1\gamma 1)\gamma 1 = 1\gamma 1 = 1$

สำหรับ  $2 \in S$  มี  $3 \in S, \gamma \in \Gamma$  ที่ซึ่ง  $(3\gamma 2)\gamma 2 = 1\gamma 2 = 2$

สำหรับ  $3 \in S$  มี  $2 \in S, \gamma \in \Gamma$  ที่ซึ่ง  $(2\gamma 3)\gamma 3 = 1\gamma 3 = 3$

สำหรับ  $4 \in S$  มี  $4 \in S, \gamma \in \Gamma$  ที่ซึ่ง  $(4\gamma 4)\gamma 4 = 4\gamma 4 = 4$

สำหรับ  $5 \in S$  มี  $5 \in S, \gamma \in \Gamma$  ที่ซึ่ง  $(5\gamma 5)\gamma 5 = 5\gamma 5 = 5$

สำหรับ  $6 \in S$  มี  $6 \in S, \gamma \in \Gamma$  ที่ซึ่ง  $(6\gamma 6)\gamma 6 = 6\gamma 6 = 6$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงสมบัติพื้นฐานของ  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปริกติคู่สลับซ้าย ดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.7** ถ้า  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปริกติคู่สลับซ้ายและ  $x \in S$  แล้วสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า  $x = (b\gamma x)\alpha x$  สำหรับบาง  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  แล้ว

$a\gamma x = x\gamma a$  โดยที่  $a = b\gamma x$

2. มี  $a \in S$  ซึ่ง  $a^2 = a$

3. มี  $a \in S$  ในสมบัติข้อ 1 ได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

**การพิสูจน์** 1. กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปริกติคู่สลับซ้ายและ  $x = (b\gamma x)\alpha x$  สำหรับบาง  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  ซึ่งโดยที่  $a = b\gamma x$  พิจารณา

$$a\alpha x = (b\gamma x)\alpha x \quad [\text{สมมติฐาน}]$$

$$= x \quad [\text{บทนิยาม 3.5} \dots (1)]$$

และ

$$x\alpha a = ((b\gamma x)\alpha x)\alpha a \quad [\text{สมมติฐาน}]$$

$$= (b\gamma x)\alpha (a\alpha x) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}]$$

$$= a\alpha x \quad [\text{สมมติฐาน (1)}]$$

$$= x \quad [(1) \dots (2)]$$

จาก (1) และ (2) จะสรุปได้ว่า  $a\alpha x = x = x\alpha a$  ต่อไปจะแสดงว่า  $b\gamma x = x\gamma b = a$  พิจารณา  $(b\gamma x)\alpha x = x$

$$\begin{aligned}
 xyb &= ((byx)\alpha)x\gamma b \quad [\text{สมมติฐาน}] \\
 &= (byx)\alpha(b\gamma x) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\
 &= b\gamma((byx)\alpha x) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\
 &= b\gamma x \quad [\text{บทนิยาม 3.5}] \\
 &= a \quad [\text{สมมติฐาน ....(3)}]
 \end{aligned}$$

จาก (3) จะสรุปได้ว่า  $xyb = a$  สุดท้ายนี้จะแสดงว่า

$$\begin{aligned}
 (b\gamma x)^2 &= b\gamma x \quad \text{พิจารณา} \\
 (b\gamma x)^2 &= (b\gamma x)\gamma(b\gamma x) \quad [\text{ยกกำลังสอง}] \\
 &= b\gamma((b\gamma x)\gamma x) \quad [\text{บทนิยาม 3.5}] \\
 &= b\gamma(a\gamma x) \quad [\text{สมมติฐาน}] \\
 &= b\gamma x \quad [(1)]
 \end{aligned}$$

ดังนั้นสรุปได้ว่า  $(b\gamma x)^2 = b\gamma x$

2. กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้าย และ  $x \in S$  จะมี  $c \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  ซึ่ง  $(c\gamma x)\alpha x = x$  ให้  $a = c\gamma x$  พิจารณา

$$\begin{aligned}
 a^2 &= a\alpha a \quad [\text{ยกกำลังสอง}] \\
 &= (c\gamma x)\alpha(c\gamma x) \quad [\text{สมมติฐาน}] \\
 &= c\gamma((c\gamma x)\alpha x) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\
 &= c\gamma x \quad [\text{บทนิยาม 3.5}] \\
 &= a \quad [\text{สมมติฐาน}]
 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $a^2 = a$

3. จากข้อ 1 สมมติมี  $a, a_1, b, b_1 \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  ที่  $a\alpha x = x\alpha a = x$ ,  $b\gamma x = x\gamma b = a$ ,  $a_1\alpha x = x\alpha a_1 = x$  และ  $b_1\gamma x = x\gamma b_1 = a_1$  พิจารณา

$$\begin{aligned}
 a\alpha a_1 &= (b\gamma x)\alpha a_1 \quad [\text{สมมติฐาน}] \\
 &= b\gamma(a_1\alpha x) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\
 &= b\gamma x \quad [\text{สมมติฐาน}] \\
 &= a \quad [\text{สมมติฐาน....(1)}]
 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
 a\alpha a_1 &= a\alpha(b_1\gamma x) \quad [\text{สมมติฐาน}] \\
 &= (a\alpha x)\gamma b_1 \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\
 &= x\gamma b_1 \quad [\text{สมมติฐาน}] \\
 &= a_1 \quad [\text{สมมติฐาน....(2)}]
 \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า  $a = a_1$  จึงทำให้สรุปได้ว่ามี  $a$  ที่มีสมบัติตามข้อ 1 ได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

จากทฤษฎีบท 3.4 ขยายผลไปสู่  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้าย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3.8** กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายและ  $m$  ที่เป็นจำนวนนับ ถ้า  $x \in S$  แล้วจะมี

$$a \in S \text{ และ } \gamma, \alpha \in \Gamma \text{ ซึ่ง } x^m \alpha a^m = a^m \alpha x^m = a\gamma x$$

**การพิสูจน์** กำหนดให้  $x \in S$  เมื่อ  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายและ  $\alpha \in \Gamma$  โดยทฤษฎีบท 3.7 ข้อ 1 จะได้ว่ามี  $a, b \in S$  และ  $\gamma \in \Gamma$  โดยที่  $b\gamma x = x\gamma b = x$  และ  $a\gamma x = x\gamma a = b$  เนื่องจาก  $(a\gamma x)\alpha x = b\gamma x = x$  จะได้

$$\begin{aligned}
 a^2 \alpha x^2 &= (a\gamma a)\alpha(x\gamma x) \quad [\text{ยกกำลังสอง}] \\
 &= (a\gamma x)\alpha(x\gamma a) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\
 &= a\gamma((x\gamma a)\alpha x) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\
 &= a\gamma((a\gamma x)\alpha x) \quad [\text{สมมติฐาน}] \\
 &= a\gamma(b\gamma x) \quad [\text{สมมติฐาน}] \\
 &= a\gamma x \quad [\text{สมมติฐาน ....(1)}]
 \end{aligned}$$

กำหนดให้  $a^k \alpha x^k = a\gamma x$  เพราะว่า

$$\begin{aligned}
 a^{k+1} \alpha x^{k+1} &= (a^k \alpha a)\alpha(x^k \gamma x) \quad [\text{ยกกำลังสอง}] \\
 &= (a^k \alpha a)\alpha(x\gamma x^k) \quad [\text{บทตั้ง 3.2}] \\
 &= (a^k \alpha x^k)\alpha(x\gamma a) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\
 &= (a\gamma x)\alpha(x\gamma a) \quad [\text{สมมติฐาน}] \\
 &= (a\gamma a)\alpha(x\gamma x) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\
 &= a^2 \alpha x^2 \quad [\text{ยกกำลังสอง}] \\
 &= a\gamma x \quad [\text{จาก (1)}]
 \end{aligned}$$

จากหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า  $a^m \alpha x^m = a\gamma x$

และในทำนองเดียวกัน  $x^m \alpha a^m = x\gamma a = a\gamma x$  จึงสรุปได้ว่า

$$x^m \alpha a^m = a^m \alpha x^m = a\gamma x$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างโครงสร้างของ  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายกับ  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้าย

**ทฤษฎีบท 3.9** กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับขวาก็ต่อเมื่อ  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้าย

**การพิสูจน์** กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับขวา จะแสดงว่า  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้าย ให้  $x \in S$  จาก  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับขวามี  $a \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  ซึ่ง  $x\gamma(x\alpha a) = x$  ต่อไปจะแสดงว่า  $x$  เป็นปรกติคู่สลับซ้าย ดังนั้นจะมี  $b \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  โดยที่  $b = (x\gamma a)\alpha a$  พิจารณา

$$\begin{aligned}(b\alpha x)\gamma x &= (((x\gamma a)\alpha a)\alpha x)\gamma x \quad [\text{สมมติฐาน}] \\ &= ((x\gamma a)\alpha(x\alpha a))\gamma x \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\ &= (x\gamma a)\alpha(x\gamma(x\alpha a)) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\ &= (x\gamma a)\alpha x \quad [\text{บทนิยาม 3.5}] \\ &= x\gamma(x\alpha a) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\ &= x \quad [\text{บทนิยาม 3.5}]\end{aligned}$$

ดังนั้น  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้าย

สมมติให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้าย จะแสดงว่า  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับขวา ให้  $x \in S$  จาก  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายโดยทฤษฎีบท 3.5 ข้อ 1 จะได้ว่ามี  $a, b \in S$  และ  $\gamma \in \Gamma$  ซึ่ง  $b\gamma x = x\gamma b = x$ ,  $a\gamma x = x\gamma a = b$  จะได้

$$\begin{aligned}x\gamma(x\gamma a) &= (b\gamma x)\gamma(x\gamma a) \quad [\text{สมมติฐาน}] \\ &= b\gamma((x\gamma a)\gamma x) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\ &= b\gamma(b\gamma x) \quad [\text{สมมติฐาน}] \\ &= b\gamma x \quad [\text{สมมติฐาน}] \\ &= x \quad [\text{สมมติฐาน}]\end{aligned}$$

ดังนั้น  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับขวา

บทตั้งต่อไปนี้แสดงสมบัติพื้นฐานที่สำคัญเกี่ยวกับยกกำลังสองใน  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายเพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในทฤษฎีบทต่อไป ดังนี้

**บทตั้ง 3.10** ถ้า  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้าย และ  $x \in S$  แล้วจะมี  $a, b \in S$  และ  $\gamma \in \Gamma$  แล้วสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

$$1. a\gamma x^2 = x^2\gamma a = x^2$$

$$2. b^2\gamma x^2 = x^2\gamma b^2 = a$$

$$3. (b^2\gamma x^2)^2 = b^2\gamma x^2$$

**การพิสูจน์ 1.** กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายและ  $x \in S$  โดยทฤษฎีบท 3.7 ข้อ 1 จะมี  $a \in S$  และ  $\gamma \in \Gamma$  โดยที่  $a\gamma x = x\gamma a = x$  พิจารณา

$$\begin{aligned}a\gamma x^2 &= a\gamma(x\gamma x) \quad [\text{เลขยกกำลัง}] \\ &= (a\gamma x)\gamma x \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\ &= x\gamma x \quad [\text{สมมติฐาน}] \\ &= x^2 \quad [\text{เลขยกกำลัง ....(1)}] \\ x^2\gamma a &= (x\gamma x)\gamma a \quad [\text{เลขยกกำลัง}] \\ &= x\gamma(a\gamma x) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\ &= x\gamma x \quad [\text{สมมติฐาน}] \\ &= x^2 \quad [\text{เลขยกกำลัง ....(2)}]\end{aligned}$$

ดังนั้น (1) และ (2) จะได้  $a\gamma x^2 = x^2 = x^2\gamma a$

2. กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายและ  $x \in S$  โดยทฤษฎีบท 3.7 ข้อ 1 จะมี  $a, b \in S$  และ  $\gamma \in \Gamma$  โดยที่  $b\gamma x = x\gamma b = a$  พิจารณา

$$\begin{aligned}b^2\gamma x^2 &= (b\gamma b)\gamma(x\gamma x) \quad [\text{เลขยกกำลัง}] \\ &= (b\gamma x)\gamma(x\gamma b) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\ &= a\gamma a \quad [\text{สมมติฐาน}] \\ &= a^2 \quad [\text{เลขยกกำลัง}] \\ &= (b\gamma x)^2 \quad [\text{สมมติฐาน}] \\ &= b\gamma x \quad [\text{สมมติฐาน}] \\ &= a \quad [\text{สมมติฐาน ....(3)}]\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}x^2\gamma b^2 &= (x\gamma x)\gamma(b\gamma b) \quad [\text{เลขยกกำลัง}] \\ &= (x\gamma b)\gamma(b\gamma x) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}] \\ &= a\gamma a \quad [\text{สมมติฐาน}] \\ &= a^2 \quad [\text{เลขยกกำลัง}] \\ &= (b\gamma x)^2 \quad [\text{สมมติฐาน}] \\ &= b\gamma x \quad [\text{สมมติฐาน}] \\ &= a \quad [\text{สมมติฐาน ....(4)}]\end{aligned}$$

ดังนั้น (3) และ (4) จะได้  $b^2\gamma x^2 = a = x^2\gamma b^2$

3. กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายและ  $x \in S$  โดยทฤษฎีบท 3.7 ข้อ 1 จะมี  $b \in S$  และ  $\gamma \in \Gamma$  โดยที่  $(b\gamma x)^2 = b\gamma x$  ต่อไปกำหนด

$A = (b^2\gamma x^2)^2$  จะได้

$$\begin{aligned} A &= (b^2\gamma x^2)\gamma(b^2\gamma x^2) && \text{[เลขยกกำลัง]} \\ &= ((b\gamma b)\gamma(x\gamma x))\gamma((b\gamma b)\gamma(x\gamma x)) && \text{[เลขยกกำลัง]} \\ &= ((b\gamma x)\gamma(x\gamma b))\gamma((b\gamma x)\gamma(x\gamma b)) && \text{[บทนิยาม 3.1]} \\ &= ((b\gamma x)\gamma(b\gamma x))\gamma((b\gamma x)\gamma(b\gamma x)) && \text{[สมมติฐาน]} \\ &= (b\gamma x)^2\gamma(b\gamma x)^2 && \text{[เลขยกกำลัง]} \\ &= (b\gamma x)\gamma(b\gamma x) && \text{[สมมติฐาน]} \\ &= (b\gamma x)\gamma(x\gamma b) && \text{[สมมติฐาน]} \\ &= (b\gamma b)\gamma(x\gamma x) && \text{[บทนิยาม 3.1]} \\ &= b^2\gamma x^2 && \text{[เลขยกกำลัง]} \end{aligned}$$

ดังนั้น  $(b^2\gamma x^2)^2 = b^2\gamma x^2$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะหาเงื่อนไขบางประการเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของทฤษฎีบท 3.7 ข้อ 1 ดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.11**  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายและ  $x, y \in S$  ถ้า  $x^2 = y^2$  แล้วจะมี  $a, b, c \in S$  และ  $\gamma \in \Gamma$  โดยที่  $a\gamma y = y\gamma a = y$  และ  $b\gamma x = x\gamma b = c\gamma y = y\gamma c = a$

**การพิสูจน์** กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายและ  $x, y \in S$  โดยทฤษฎีบท 3.7 ข้อ 1 จะมี  $a, b, c, d \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  โดยที่  $a\gamma x = x\gamma a = x$ ,  $b\gamma x = x\gamma b = a$ ,  $(b\gamma x)^2 = b\gamma x$  และ  $d\alpha y = y\alpha d = y$ ,  $c\alpha y = y\alpha c = d$ ,  $(c\alpha y)^2 = c\alpha y$  จะแสดงว่า  $d = a$  โดยบทตั้ง 3.9 ได้ว่า  $a\gamma x^2 = x^2\gamma a = x^2$ ,  $b^2\gamma x^2 = x^2\gamma b^2 = a$  และ  $(b^2\gamma x^2)^2 = b^2\gamma x^2$  พิจารณา

$$\begin{aligned} d\alpha y^2 &= d\alpha(y\alpha y) && \text{[เลขยกกำลัง]} \\ &= (d\alpha y)\alpha y && \text{[บทนิยาม 3.1]} \\ &= y\alpha y && \text{[สมมติฐาน]} \end{aligned}$$

$$= y^2 \quad \text{[เลขยกกำลัง ....(1)]}$$

$$y^2\alpha d = (y\alpha y)\alpha d \quad \text{[เลขยกกำลัง]}$$

$$= y\alpha(d\alpha y) \quad \text{[บทนิยาม 3.1]}$$

$$= y\alpha y \quad \text{[สมมติฐาน]}$$

$$= y^2 \quad \text{[เลขยกกำลัง ....(2)]}$$

$$c^2\alpha y^2 = (c\alpha c)\alpha(y\alpha y) \quad \text{[เลขยกกำลัง]}$$

$$= (c\alpha y)\alpha(y\alpha c) \quad \text{[บทนิยาม 3.1]}$$

$$= d\alpha d \quad \text{[สมมติฐาน]}$$

$$= d^2 \quad \text{[เลขยกกำลัง]}$$

$$= (c\alpha y)^2 \quad \text{[สมมติฐาน]}$$

$$= c\alpha y \quad \text{[สมมติฐาน]}$$

$$= d \quad \text{[สมมติฐาน ....(3)]}$$

และ

$$y^2\alpha c^2 = (y\alpha y)\alpha(c\alpha c) \quad \text{[เลขยกกำลัง]}$$

$$= (y\alpha c)\alpha(c\alpha y) \quad \text{[บทนิยาม 3.1]}$$

$$= d\alpha d \quad \text{[สมมติฐาน]}$$

$$= d^2 \quad \text{[เลขยกกำลัง]}$$

$$= (c\alpha y)^2 \quad \text{[สมมติฐาน]}$$

$$= c\alpha y \quad \text{[สมมติฐาน]}$$

$$= d \quad \text{[สมมติฐาน ..(4)]}$$

สุดท้ายนี้จะแสดงว่า  $(c^2\alpha y^2)^2 = c^2\alpha y^2$  ต่อไปกำหนด

$$B = (c^2\alpha y^2)^2 \quad \text{ได้ว่า}$$

$$B = (c^2\alpha y^2)\alpha(c^2\alpha y^2) \quad \text{[เลขยกกำลัง]}$$

$$= ((c\alpha c)\alpha(y\alpha y))\alpha((c\alpha c)\alpha(y\alpha y)) \quad \text{[เลขยกกำลัง]}$$

$$= ((c\alpha y)\alpha(y\alpha c))\alpha((c\alpha y)\alpha(y\alpha c)) \quad \text{[บทนิยาม 3.1]}$$

$$= ((c\alpha y)\alpha(c\alpha y))\alpha((c\alpha y)\alpha(c\alpha y)) \quad \text{[สมมติฐาน]}$$

$$= (c\alpha y)^2\alpha(c\alpha y)^2 \quad \text{[เลขยกกำลัง]}$$

$$= (c\alpha y)\alpha(c\alpha y) \quad \text{[สมมติฐาน]}$$

$$= (c\alpha y)\alpha(y\alpha c) \quad \text{[สมมติฐาน]}$$

$$= (c\alpha c)\alpha(y\alpha y) \quad \text{[บทนิยาม 3.1]}$$

$$= c^2\alpha y^2 \quad \text{[เลขยกกำลัง ....(5)]}$$

ดังนั้น (1), (2), (3), (4) และ (5) จะได้  $d\alpha y^2 = y^2\alpha d = y^2$   
 $, c^2\alpha y^2 = y^2\alpha c^2 = d$  และ  $(c^2\alpha y^2)^2 = c^2\alpha y^2$  โดย  
 อาศัยเงื่อนไข  $x^2 = y^2$  ทำให้ได้  $d\gamma x^2 = x^2\gamma d = x^2$ ,  
 $c^2\gamma x^2 = x^2\gamma c^2 = d, (c^2\gamma x^2)^2 = c^2\gamma x^2$  โดยทฤษฎีบท  
 3.7 จะได้ว่า  $d = a$

$\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายมีที่เงื่อนไขพิเศษ  
 เกี่ยวกับสมการกำลังสองของสมาชิกใด ๆ ใน  $\Gamma$ -TA-กรุป  
 พอยด์จะมีสมบัติ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3.12**  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้าย  
 ถ้า  $x, y \in S$  และ  $\gamma \in \Gamma$  โดยที่  $x^2 = x\gamma y = y^2$  แล้ว  
 $x = y$

**การพิสูจน์** กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่  
 สลับซ้ายและ  $x, y \in S$  ซึ่ง  $x^2 = x\gamma y = y^2$  โดยบทตั้ง  
 3.10 และทฤษฎีบท 3.11 จะมี  $a, b, c \in S$  และ  $\gamma \in \Gamma$   
 โดยที่  $a\gamma x = x\gamma a = x, a\gamma y = y\gamma a = y$  และ  
 $b\gamma x = x\gamma b = c\gamma y = y\gamma c = a$  พิจารณา

$$\begin{aligned} x &= a\gamma x && \text{[เลขยกกำลัง]} \\ &= (c\gamma y)\gamma x && \text{[สมมติฐาน]} \\ &= (c\gamma y)\gamma(a\gamma x) && \text{[สมมติฐาน]} \\ &= (c\gamma x)\gamma(a\gamma y) && \text{[บทนิยาม 3.1]} \\ &= (c\gamma y)\gamma y && \text{[สมมติฐาน]} \\ &= a\gamma y && \text{[สมมติฐาน]} \\ &= y && \text{[สมมติฐาน]} \end{aligned}$$

ดังนั้น  $x = y$

บทตั้งต่อไปนี้แสดงถึงสมบัติพื้นฐานที่สำคัญใน  $\Gamma$ -TA-  
 กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายซึ่งเกี่ยวกับการยกกำลังสองของ  
 สมาชิก ดังนี้

**บทตั้ง 3.13** กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่  
 สลับซ้าย ถ้า  $x, y, z \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  แล้ว  $((x\gamma y)\alpha z)^2$   
 $= (x\gamma y^2)\alpha(xyz^2)$

**การพิสูจน์** กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่  
 สลับซ้าย  $x, y, z \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  เนื่องจาก

$$\begin{aligned} ((x\gamma y)\alpha z)^2 &= ((x\gamma y)\alpha z)\gamma((x\gamma y)\alpha z) \text{ [เลขยกกำลัง]} \\ &= (((x\gamma y)\alpha z)\gamma z)\alpha(x\gamma y) \text{ [บทนิยาม 3.1]} \\ &= ((x\gamma y)\alpha(z\gamma z))\alpha(x\gamma y) \text{ [บทนิยาม 3.1]} \\ &= ((x\gamma y)\alpha z^2)\alpha(x\gamma y) \text{ [เลขยกกำลัง]} \\ &= ((x\gamma y)\alpha y)\alpha(xyz^2) \text{ [บทนิยาม 3.1]} \\ &= (x\gamma(y\alpha y))\alpha(xyz^2) \text{ [บทนิยาม 3.1]} \\ &= (x\gamma y^2)\alpha(xyz^2) \text{ [เลขยกกำลัง]} \end{aligned}$$

ดังนั้น  $((x\gamma y)\alpha z)^2 = (x\gamma y^2)\alpha(xyz^2)$

ในทฤษฎีบทต่อไปนี้จะทำให้ได้ว่า  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่  
 สลับซ้ายเป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุป

**ทฤษฎีบท 3.14** ทุก  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายเป็น  
 $\Gamma$ -กึ่งกรุป

**การพิสูจน์** กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่  
 สลับซ้าย  $x, y, z \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  เนื่องจาก

$$\begin{aligned} (x\gamma(y\alpha z))^2 &= (x\gamma(y\alpha z))\gamma(x\gamma(y\alpha z)) \text{ [เลขยกกำลัง]} \\ &= ((x\gamma(y\alpha z))\gamma(y\alpha z))\gamma x \text{ [บทนิยาม 3.1]} \\ &= (x\gamma((y\alpha z)\gamma(y\alpha z)))\gamma x \text{ [บทนิยาม 3.1]} \\ &= (x\gamma(y\alpha((y\alpha z)\gamma z)))\gamma x \text{ [บทนิยาม 3.1]} \\ &= (x\gamma(y\alpha(y\alpha(z\gamma z))))\gamma x \text{ [บทนิยาม 3.1]} \\ &= \left( x\gamma \left( y\alpha(y\alpha z^2) \right) \right) \gamma x \text{ [เลขยกกำลัง]} \\ &= x\gamma \left( x\gamma \left( y\alpha(y\alpha z^2) \right) \right) \text{ [บทนิยาม 3.1]} \\ &= x\gamma \left( \left( x\gamma(y\alpha z^2) \right) \alpha y \right) \text{ [บทนิยาม 3.1]} \\ &= x\gamma \left( \left( (x\gamma y)\alpha z^2 \right) \alpha y \right) \text{ [บทนิยาม 3.1]} \\ &= x\gamma \left( (x\gamma y)\alpha(y\alpha z^2) \right) \text{ [บทนิยาม 3.1]} \\ &= \left( \left( x\gamma(y\alpha z^2) \right) \alpha(x\gamma y) \right) \text{ [บทนิยาม 3.1]} \\ &= \left( \left( (x\gamma z^2) \alpha y \right) \alpha(x\gamma y) \right) \text{ [บทนิยาม 3.1]} \\ &= \left( (xyz^2) \alpha((x\gamma y)\alpha y) \right) \text{ [บทนิยาม 3.1]} \\ &= \left( (xyz^2) \alpha(x\gamma(y\alpha y)) \right) \text{ [บทนิยาม 3.1]} \end{aligned}$$

$$= \left( (xyz^2) \alpha (xy^2) \right) \quad [\text{เลขยกกำลัง}]$$

$$= (xy^2) \alpha (xyz^2) \quad [\text{บทนิยาม 3.1....(1)}]$$

ต่อไปกำหนด  $C = ((xy\alpha) \alpha (xyz))$  ทำให้ได้ว่า

$$C = ((xy\alpha) \alpha (xyz)) \alpha (xyz) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}]$$

$$= ((xyz) \alpha (y\alpha)) \alpha (xyz) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}]$$

$$= ((xyz) \alpha y^2) \alpha (xyz) \quad [\text{เลขยกกำลัง}]$$

$$= ((xyz) \alpha z) \alpha (xy^2) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}]$$

$$= (xy(z\alpha)) \alpha (xy^2) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}]$$

$$= (xyz^2) \alpha (xy^2) \quad [\text{เลขยกกำลัง}]$$

$$= (xy^2) \alpha (xyz^2) \quad [\text{บทนิยาม 3.1 ....(2)}]$$

จากบทตั้ง 3.12 และสมการ (1), และ (2) จึงทำให้ได้ว่า

$((xy\alpha) \alpha z)^2 = ((xy\alpha) \alpha z) \alpha (xy(y\alpha)) = (xy(y\alpha))^2$  โดย  
ทฤษฎีบท 3.11 ได้  $(xy\alpha) \alpha z = xy(y\alpha)$  และ  $S$  เป็น  $\Gamma$ -  
TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายนั้นคือ  $S$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุป

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นโครงสร้างที่ซับซ้อนของ  
 $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้าย

**ทฤษฎีบท 3.15** ถ้า  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับ  
ซ้าย  $x \in S$  แล้วจะมี  $a \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  โดยที่  
 $(a\gamma x) \alpha x = x = (x\gamma a) \alpha x$

**การพิสูจน์** จากบทตั้ง 3.13 และทฤษฎีบท 3.14 จะได้ว่า  $S$   
เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุป จาก  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่  
สลับซ้ายโดยอาศัยทฤษฎีบท 3.7 ข้อ 1 จะได้ว่ามี  $a, b \in S$   
และ  $\gamma \in \Gamma$  ซึ่ง  $b\gamma x = xyb = x$  และ  $a\gamma x = x\gamma a = b$   
จะได้

$$(x\gamma a) \gamma x = xy(x\gamma a) \quad [\text{บทนิยาม 3.1}]$$

$$= xyb \quad [\text{บทนิยาม 3.5}]$$

$$= x \quad [\text{สมมติฐาน}]$$

และ

$$(a\gamma x) \gamma x = b\gamma x \quad [\text{สมมติฐาน}]$$

$$= x \quad [\text{สมมติฐาน}]$$

ดังนั้น  $(a\gamma x) \alpha x = x = (x\gamma a) \alpha x$

ในทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงว่า  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติ  
ที่มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ทั่วไปเป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่  
สลับซ้าย

**ทฤษฎีบท 3.16** ถ้า  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติที่มี  
สมบัติเปลี่ยนหมู่แล้ว  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่  
สลับซ้าย

**การพิสูจน์** กำหนดให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติจะมี  
 $a \in S$  และ  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  ซึ่ง  $xy(a\alpha x) = x$  เนื่องจาก

$$xy(x\alpha a) = (x\gamma a) \alpha x \quad [\text{บทนิยาม 3.1}]$$

$$= xy(a\alpha x) \quad [\text{เปลี่ยนหมู่}]$$

$$= x \quad [\text{สมมติฐาน}]$$

ดังนั้น  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับขวาโดยอาศัย  
ทฤษฎีบท 3.8 จึงทำให้สรุปได้ว่า  $S$  เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์  
ปรกติคู่สลับซ้าย

#### 4. บทสรุป

งานวิจัยนี้ได้เสนอแนวความคิดของ  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์  
ปรกติคู่สลับซ้าย โดยเริ่มจากการศึกษาโครงสร้างสมบัติของ  
 $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์และสมบัติยกกำลังของสมาชิก รวมทั้ง  
ยกตัวอย่างประกอบ จากนั้นได้ทำการพิสูจน์สมบัติพื้นฐาน  
ของ  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้าย นอกจากนี้ยังได้หา  
ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\Gamma$ -กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายและ  
 $\Gamma$ -กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับขวา พร้อมทั้งได้พิสูจน์ว่าทุก  $\Gamma$ -  
TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้ายเป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปเสมอ ใน  
ทำนองเดียวกันยังได้พิสูจน์ว่า  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติที่มี  
สมบัติเปลี่ยนหมู่เป็น  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้าย  
นอกจากนี้แนวทางการศึกษาต่อไปในอนาคตเกี่ยวกับ  
ความสัมพันธ์การตัดออกอ่อน การตัดออกและควอซี-การตัด  
ออกใน  $\Gamma$ -TA-กรุปพอยด์ปรกติคู่สลับซ้าย

#### เอกสารอ้างอิง

- Ahmad, I., Rashad, M., & Shah, M. (2013). Some properties of AG\*-groupoid. *Research Journal of Recent Sciences*, 2(4), 91-93.
- An, X.G., Chen, M.M., & Zhang, X.H. (2022a). An open problem on Tarski associative NET-groupoids and GTA-NET-groupoids. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 47, 1091-1112.
- An, X., & Zhang, X. (2022). Transposition regular TA-groupoids and their structures. *Axioms*, 11(8), 378. <https://doi.org/10.3390/axioms11080378>

- An, X., Zhang, X., & Ma, Z. (2022). Two open problems on CA-groupoids and cancellativities of T2 CA-groupoids. *Axioms*, 11(4), 169. <https://doi.org/10.3390/axioms11040169>
- Bhargavi, Y., Eswarlal, T., & Ragamayi, S. (2020). Cartesian product on fuzzy ideals of a ternary  $\cap$ -semigroup. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, 9(3), 1197-1203. <https://doi.org/10.37418/amj.9.3.44>
- Chattopadhyay, S. (2010). A semihypergroup associated with a  $\cap$ -semigroup. *Analele Stiintifice Ale Universitatii "Ali Cuza" Din Iasi (SN) Mathematica*, f1, 209-225.
- Chen, M., Du, Y., & An, X. (2023). Research on a class of special quasi TA-neutrosophic extended triplet: TA-groups. *Neutrosophic Sets and Systems*, 57, 408-422.
- Chuphan, S., & Yiarayong, P. (2023). Theory of paramedial  $\cap$ -right almost semigroups. *Rattanakosin Journal of Science and Technology*, 5(1), 20-27.
- Du, Y., Zhang, X., & An, X. (2022). Transposition regular AG-groupoids and their decomposition theorems. *Mathematics*, 10, 1396. <https://doi.org/10.3390/math10091396>
- Faisal, Y., Yaqoob, N., & Hila, K. (2012). On fuzzy (2, 2) -regular ordered  $\cap$ -AG\*-groupoids. *U.P.B. Sci. Bull., Series A*, 74(2), 87-104.
- Jantanana, W., Nuadthaisong, K., & Jaroenram, S. (2021). On ordered  $\cap$ -semigroups containing two-sided bases. *BURAPHA SCIENCE JOURNAL*, 26(3), 1409-1419.
- Kehayopulu, N. (2009). On  $\cap$ -semigroups. *In International Mathematical Forum*, 4(39), 1915-1922.
- Ma, Z., Zhang, X., & Smarandache, F. (2020). Some results on various cancellative CA-groupoids and variant CA-groupoids. *Symmetry*, 12(2), 315. <https://doi.org/10.3390/sym12020315>
- Mushtaq, Q., & Khan, M. (2006). Ideals in AG-band and AG-groupoid. *Quasigroups and Related Systems*, 16(2), 207-215.
- Rashad, M., Ahmad, I., Shah, M., & Khuhro, Z. U. A. (2014). Left transitive AG-groupoids. *Sindh Univ. Res. Jour. (Sci. Ser.)*, 46(4), 547-552.
- Sabri, S. (2013). Idempotent  $\cap$ -semigroups. Scientific researches of the Union of Scientists in Bulgaria-Plovdiv, series B. *Natural Sciences and the Humanities*, 15, 101-106.
- Sen, M.K., & Saha, N.K. (1986). On  $\cap$ -semigroup I, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*. 78, 180-186.
- Shah, T., & Rehman, I. (2010). On  $\cap$ -ideals and  $\cap$ -bi-ideals in  $\cap$ -AG-groupoids. *International Journal of Algebra*, 4(6), 267-276.
- Shah, T., & Rehman, I. (2013). Decomposition of locally associative  $\cap$ -AG-groupoids. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 43(1), 1-8.
- Singh, Y. S., & Khan, M. R. (2010). Regular quasi- $\cap$ -absorbent in  $\cap$ -groupoid-lattices. *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics*, 3(5), 190-200.
- Smisha, M. A., & Romeo, P. G. (2021). On the embedding of  $\cap$ -semigroup Amalgam using partial  $\cap$ -groupoid. *Advances in Algebra (AA)*, 14(1), 3-13.
- Yiarayong, P. (2022). *Non-associative algebras*, 1<sup>st</sup> ed., THAMMASAT UNIVERSITY PRESS.
- Zhang, X., & Du, Y. (2022). Left (right) regular and transposition regular semigroups and their structures. *Mathematics*, 10, 1021. <https://doi.org/10.3390/math10071021>
- Zhang, X., Yuan, W., & Chen, M. (2020a). A kind of non-associative groupoids and quasi neutrosophic extended triplet groupoids (QNET-groupoids). *Neutrosophic Sets Syst*, 36, 144-163.
- Zhang, X., Yuan, W., Chen, M., & Smarandache, F. (2020b). A kind of variation symmetry: Tarski associative groupoids (TA-groupoids) and Tarski associative neutrosophic extended triplet groupoids (TA-NET-groupoids). *Symmetry*, 12, 714. <https://doi.org/10.3390/sym12050714>