

Research Article

ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมสำหรับตัวแบบ SARX(P, 1)_L โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข

Average Run Length of CUSUM Control Chart for SARX(P,1)_L Model using Numerical Integral Equation Method

พรพิมล บุรณพล¹ และ สุวิมล พันธุ์แย้ม^{1*}

Phornpimon Buranapol¹ and Suvimol Phanyaem^{1*}

¹ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ บางซื่อ กรุงเทพฯ 10800 ประเทศไทย

¹Department of Applied Statistics, Faculty of Applied Science, King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangsue, Bangkok 10800, Thailand

*E-mail: suvimol.p@sci.kmutnb.ac.th

Received: 05/11/2021; Revised: 07/04/2022; Accepted: 26/04/2022

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (Cumulative Sum: CUSUM) สำหรับตัวแบบอัตโนมัติแบบมีฤดูกาลที่มีตัวแปรภายนอก (SARX(P,1)_L) เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration Equation: NIE) 4 วิธี ได้แก่ วิธีกฎซิมป์สัน (Simpson Rule) วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) และวิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule) เปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมวัดจากค่าความยาวรันเฉลี่ย (Average Run Length : ARL) เมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม โดยทำการเปรียบเทียบค่า ARL ที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข ทั้ง 4 วิธี และเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Times) ผลการวิจัยพบว่า ค่า ARL ที่ได้จากวิธีกฎซิมป์สัน วิธีกฎค่ากลาง วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู และวิธีกฎเกาส์ ให้ค่าความยาวรันเฉลี่ยไม่แตกต่างกัน ในขณะที่เวลาที่ใช้ในการประมวลผลโดยวิธีกฎค่ากลางมีค่าน้อยที่สุดในบรรดาทั้ง 4 วิธี

คำสำคัญ: ค่าความยาวรันเฉลี่ย, แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม, วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข, ตัวแบบอัตโนมัติลดทอนแบบมีฤดูกาลที่มีตัวแปรภายนอก

Abstract

The main objective of this paper is to approximate the Average Run Length (ARL) of Cumulative Sum (CUSUM) control chart for a Seasonal Autoregressive with exogenous variable model; SARX(P,1)₄ with Exponential white noise using the Numerical Integral Equation (NIE) method including Simpson rule, Midpoint rule, Trapezoidal rule and Gauss-Legendre Quadrature rule. The control chart's performance are measured by Average Run Length (ARL) when the process is out of control by comparing the ARL values obtained from the four NIE methods and comparing the central processing unit processing time (CPU Times). The results show that the ARL value obtained from the NIE methods by Simpson rule, Midpoint rule, Trapezoidal rule and Gaussian rule methods are not difference. While, the processing time by the Midpoint rule method was the lowest among the four methods.

Keywords : Average Run Length, Cumulative Sum Control Chart, Numerical Integral Equations, Seasonal Autoregressive with Exogenous Variable

บทนำ

โดยปัจจุบัน โรงงานอุตสาหกรรมได้มีการนำเครื่องจักรมาใช้ในกระบวนการผลิต เพื่อผลิตสินค้าให้มีคุณภาพดีตรงตามมาตรฐานและตรงตามความต้องการของผู้บริโภค ซึ่งในกระบวนการผลิตมักจะเกิดความผันแปรเกิดขึ้นอยู่เสมอ การควบคุมคุณภาพกระบวนการผลิตทางสถิติ (Statistical Process Control: SPC) ถือเป็นสิ่งสำคัญสำหรับกระบวนการผลิต โดยเครื่องมือพื้นฐานของการควบคุมคุณภาพ มี 7 ชนิด ได้แก่ ใบตรวจสอบ (Check Sheet) แผนภาพพาเรโต (Pareto Diagram) แผนภาพก้างปลา (Fishbone Diagram) ฮิสโตแกรม (Histogram) แผนภาพการกระจาย (Scatter Diagram) กราฟชนิดต่างๆ (Graph) และแผนภูมิควบคุม (Control Chart) ซึ่งใช้เป็นเครื่องมือตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการผลิตเพื่อแก้ไขปัญหาด้านคุณภาพได้อย่างรวดเร็ว จึงทำให้มีส่วนช่วยลดความผันแปรของกระบวนการผลิตทำให้ผลิตภัณฑ์มีคุณภาพสม่ำเสมอ ซึ่งแผนภูมิควบคุมเป็นหนึ่งในเครื่องมือที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับงานในศาสตร์ต่างๆ มากมาย เช่น ด้านอุตสาหกรรม ด้านการแพทย์ ด้านสาธารณสุข ด้านการเงิน และด้านเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น แผนภูมิควบคุมทำหน้าที่หลัก 3 ประการ คือ ประการแรกเพื่อกำหนดมาตรฐานในการผลิต ประการที่สอง เพื่อช่วยให้การผลิตบรรลุเป้าหมาย และประการสุดท้าย เพื่อปรับปรุงคุณภาพการผลิต โดยแผนภูมิควบคุมแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ แผนภูมิควบคุมเชิงผันแปร (Control Chart for Variables) และแผนภูมิควบคุมเชิงลักษณะ (Control Chart for Attributes) โดยหลักการของแผนภูมิควบคุมจะจำกัดคุณภาพที่เหมาะสมของกระบวนการด้วยขีดจำกัดควบคุมบน (Upper Control Limit: UCL) ขีดจำกัดควบคุมล่าง (Lower Control Limit: LCL) และเส้นกลาง (Center Line: CL) ระยะห่างจากเส้นกลางถึงขีดจำกัดควบคุมบน และขีดจำกัดควบคุมล่างมีค่าเท่ากับ 3σ จึงเรียกแผนภูมิควบคุมนี้ว่า แผนภูมิควบคุม 3σ

ในปี ค.ศ. 1931 Walter A. Shewhart ได้เสนอแผนภูมิควบคุมชีวฮาร์ต (Shewhart Control Chart) ซึ่งเป็นแผนภูมิควบคุมที่มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการผลิต กรณีที่ค่าเฉลี่ยมี

การเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ (Large Shift) จากแนวคิดดังกล่าวนำไปสู่การพัฒนาแผนภูมิควบคุมที่มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการผลิตที่มีขนาดเล็ก (Small Shift) อาทิเช่น แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (Cumulative Sum: CUSUM) และแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponentially Weighted Moving Average: EWMA) เป็นต้น

ในปี ค.ศ. 1954 Page (1954) ได้เสนอแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (Cumulative Sum: CUSUM) เพื่อใช้ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการผลิต และเปรียบเทียบประสิทธิภาพแผนภูมิควบคุมชีวฮาร์ต โดยพิจารณาความยาวรันเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) เป็นเกณฑ์ประเมินประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม พบว่าแผนภูมิควบคุม CUSUM มีประสิทธิภาพตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กที่เกิดขึ้นในกระบวนการผลิตได้ดีกว่าแผนภูมิควบคุมชีวฮาร์ต เนื่องจากแผนภูมิควบคุม CUSUM ใช้ข้อมูลตลอดช่วงเวลาของการเก็บข้อมูลในกระบวนการมาวิเคราะห์แทนการใช้ข้อมูลในแต่ละคาบเวลา จึงส่งผลให้แผนภูมิควบคุม CUSUM สามารถส่งสัญญาณเตือนถึงการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยของกระบวนการได้อย่างทันทั่วถึง

โดยส่วนใหญ่ข้อมูลมักจะมีลักษณะการแจกแจงปกติ แต่ในการใช้งานบางสถานการณ์ที่ข้อมูลมีลักษณะที่เกิดอัตสหสัมพันธ์ (Autocorrelated) ที่มีรูปแบบอนุกรมเวลาที่แตกต่างกัน เช่น ข้อมูลมีลักษณะเกิดอัตสหสัมพันธ์ในรูปแบบของตัวแบบอัตถดถอย (Autoregressive: AR) ตัวแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving Average: MA) ตัวแบบอัตถดถอยเคลื่อนที่ (Autoregressive and Moving Average: ARMA) และตัวแบบอัตถดถอยเคลื่อนที่แบบมีฤดูกาล (Seasonal Autoregressive Moving Average: SARMA) ดังนั้นการมีแผนภูมิควบคุมที่เหมาะสมกับข้อมูลที่เกิดอัตสหสัมพันธ์จะทำให้การใช้ประโยชน์ของแผนภูมิควบคุมมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

ในปี ค.ศ. 2014 Phanyaem S. และคณะ ได้เสนอสูตรสำเร็จค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม CUSUM กรณีที่ข้อมูลเกิดอัตถดถอยเคลื่อนที่ (Autoregressive and Moving Average: ARMA (1,1)) ผลการวิจัยพบว่า ค่าความยาวรันเฉลี่ยที่คำนวณได้จากสูตรสำเร็จมีค่าใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข ต่อมาปี ค.ศ. 2017 Phanyaem S. ได้ทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากสูตรสำเร็จกับผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Integral Equation Approach) สำหรับแผนภูมิควบคุม CUSUM ในกรณีที่ข้อมูลเกิดอัตถดถอยเคลื่อนที่แบบมีฤดูกาล (Seasonal Autoregressive Moving Average: SARMA(1,1)_L) เมื่อค่าสังเกตมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ผลการวิจัยพบว่า ค่าความยาวรันเฉลี่ยที่คำนวณจากสูตรสำเร็จให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับวิธีสมการปริพันธ์ โดยพิจารณาจากค่าสัมบูรณ์ของเปอร์เซ็นต์ความแตกต่าง (Absolute Percentage Difference) มีค่าต่ำกว่า 0.1% ต่อมาในปี ค.ศ. 2020 เพชรรัตน์ และคณะ (2563) ได้ประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยด้วยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equations) 4 วิธี ได้แก่ วิธีกฎซิมป์สัน (Simpson Rule) วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) และวิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule) ของแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงเลขชี้กำลัง

การแจกแจงลาปลัส การแจกแจงโลจิสติกส์ และการแจกแจงพาร์โต โดยเปรียบเทียบผลลัพธ์กับวิธีการจำลองผลการวิจัยพบว่า เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงเลขชี้กำลัง การแจกแจงลาปลัส และการแจกแจงโลจิสติกส์ วิธีกึ่งกลาง

มีค่าสัมบูรณ์ของเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างน้อยที่สุด และเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงพาร์โต วิธีกึ่งกลางมีค่าสัมบูรณ์ของเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างน้อยกว่าวิธีอื่น โดยทั้งสองวิธีให้ค่าการประมาณที่ถูกต้องเทียบเท่ากับผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีจำลองมอนติคาร์โลทุกกรณีศึกษา

ในการศึกษาครั้งนี้ผู้วิจัยสนใจศึกษากรณีที่ข้อมูลเป็นอนุกรมเวลาที่มีตัวแบบ $SARX(P,1)_L$ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยใช้แผนภูมิควบคุม CUSUM ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ย เกณฑ์ที่ใช้ในการประเมินประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมจะพิจารณาจากค่า ARL ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 สถานะ คือ ค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุมใช้สัญลักษณ์ ARL_0 และค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการออกนอกการควบคุมใช้สัญลักษณ์ ARL_1 ซึ่งวิธีการหาค่าความยาวรันเฉลี่ยมีหลายวิธี และวิธีที่นิยมใช้ทั่วไป คือ วิธีจำลองมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulations: MC) วิธีนี้มีข้อดี คือ ผลลัพธ์ของวิธีนี้สามารถนำมาตรวจสอบความถูกต้องและสามารถใช้เปรียบเทียบกับผลลัพธ์ของวิธีที่ต้องการศึกษาได้ แต่ข้อเสียของวิธีนี้ คือ ค่าตอบที่ได้นั้นต้องใช้เวลาเป็นอย่างมากในการประมวลผล ดังนั้นในการศึกษาครั้งนี้ผู้วิจัยจึงนำเสนอการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equations: NIE) 4 วิธี ได้แก่ วิธีกึ่งกลาง (Simpson Rule) วิธีกึ่งกลาง (Midpoint Rule) วิธีกึ่งกลาง (Trapezoidal Rule) และวิธีกึ่งกลาง (Gaussian Rule) โดยเปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ยระหว่างวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข และเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Times) จากทั้ง 4 วิธี ในการศึกษาครั้งนี้ใช้โปรแกรม Mathematica ในการประมวลผล

แผนภูมิควบคุม CUSUM สำหรับตัวแบบ $SARX(P,1)_L$

ส่วนนี้จะนำเสนอแผนภูมิควบคุม CUSUM ของตัวแบบ $SARX(P,1)_L$ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง และสมการปริพันธ์ของแผนภูมิควบคุม CUSUM

กำหนดให้ตัวแบบ $SARX(P,1)_L$ มีรูปสมการ ดังนี้

$$Y_t = \beta X_t + \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_P Y_{t-P} + \varepsilon_t \quad (1)$$

โดยที่ X_t แทน ตัวแปรภายนอก ณ คาบเวลา t

Y_t แทน ค่าสังเกต ณ คาบเวลา t

β แทน ค่าพารามิเตอร์ของตัวแปรภายนอก

μ แทน ค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการผลิต

ϕ_i แทน ค่าสัมประสิทธิ์ของการถดถอยในตัวแบบมีฤดูกาล เมื่อ $|\phi_i| < 1$; $i = 1, 2, \dots, P$

ε_t แทน ค่าความคลาดเคลื่อนที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

กำหนดให้ค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม CUSUM แสดงได้ดังนี้

$$C_t = \max(C_{t-1} + \xi_t - a, 0), \quad t = 1, 2, \dots \quad (2)$$

โดยที่ ξ_t แทน ลำดับของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันและมีการแจกแจงเหมือนกัน

C_0 แทน ค่าเริ่มต้นของค่าสถิติ CUSUM มีค่าเท่ากับ u

a แทน ค่าอ้างอิง (ค่าคงที่)

กำหนดให้ τ_b แทน คาบเวลาที่แผนภูมิควบคุมส่งสัญญาณเตือนว่ากระบวนการออกนอกการควบคุม

$$\tau_b = \inf \{ t > 0; C_t > b \}, \quad b > u, \quad (3)$$

โดยที่ b แทน ขีดจำกัดควบคุมบนของแผนภูมิควบคุม CUSUM

กำหนดให้สมการปริพันธ์ $H(u) = ARL = E_\infty(\tau_b) < \infty$ แทนค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม CUSUM เมื่อกำหนดให้ $u \in [0, b]$ สมการปริพันธ์ของค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม CUSUM ได้ดังนี้

$$H(u) = 1 + E_c \left[I \{ 0 < C_1 < b \} H(C_1) \right] + P_c \{ C_1 = 0 \} H(0) \quad (4)$$

สมการปริพันธ์ $H(u)$ ของแผนภูมิควบคุม CUSUM แสดงได้ดังนี้

$$H(u) = 1 + \alpha e^{\alpha(u-a+\mu+\beta X_t+\phi_1 y_{t-L}+\dots+\phi_P y_{t-PL})} \int_0^b H(y) e^{-\alpha y} dy + \left(1 - e^{-\alpha(a-u-\mu-\beta X_t-\phi_1 y_{t-L}-\dots-\phi_P y_{t-PL})} \right) H(0) \quad (5)$$

ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม CUSUM โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยสนใจที่จะทำการเปรียบเทียบค่าประมาณโดยใช้วิธีการประมาณ 4 วิธี ได้แก่ วิธีกฎซิมป์สัน (Simpson Rule) วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) และวิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule) วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation: NIE) ทั้ง 4 วิธี มีรายละเอียดดังนี้

1. วิธีกฎซิมป์สัน (Simpson Rule)

สำหรับกฎซิมป์สัน กำหนดให้ฟังก์ชัน $w(y) = 1$ และช่วงของการอินทิกรัล $[0, b]$ แบ่งเป็น $2m$ ช่วงย่อย $\{[y_{k-1}, y_k], k = 1, 2, \dots, 2m\}$ โดยมีความกว้างเท่ากับ $h = \frac{b-0}{2m}$ มีระยะห่างเท่ากัน $\{y_k = y_0 + kh, k = 1, 2, \dots, 2m\}$ ในงานวิจัยนี้กำหนดให้ $y_0 = 0$ และ $y_{2m} = b$ จากกฎพื้นฐานของซิมป์สันที่ใช้กับช่วงย่อย 2 ช่วงย่อย และกำหนดตัวถ่วงน้ำหนัก w_k คือ $y_{2k}, y_{2k+1}, y_{2k+2}$ ดังนั้นพหุนามองศาที่ $\{1, y, y^2\}$ ได้ถูกรวมโดยกฎของซิมป์สัน มีค่าน้ำหนักของจุดย่อยทั้ง 3 คือ $\{\frac{1}{3}h, \frac{4}{3}h, \frac{1}{3}h\}$ สำหรับกฎของคอมโพสิตซิมป์สัน เป็นการแบ่งช่วง $[0, b]$ ออกเป็นช่วงย่อยด้วยความกว้างเท่ากับ $2h$ ดังนั้นจากกฎของคอมโพสิตซิมป์สันสามารถเขียนได้ในรูป

$$S(f, h) = \frac{h}{3} (f(0) - f(b)) + \frac{2h}{3} \sum_{k=1}^m f(y_{2k}) + \frac{4h}{3} \sum_{k=1}^m f(y_{2k-1}); k = 0, 1, 2, \dots, m$$

วิธีการประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขโดยวิธีกฎซิมป์สัน (Simpson Rule) อยู่ในรูป $\int_0^b f(y)dy \approx S(f, h)$

2. วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule)

กฎค่ากลางกำหนดให้ฟังก์ชัน $w(y)=1$ และ $f(y)$ บนช่วง $[0, b]$ แบ่งเป็นช่วงย่อย m ช่วง $\{[y_{k-1}, y_k], k=1, 2, \dots, m\}$ มีระยะห่างที่เท่ากัน $\{y_k = y_0 + kh, k=0, 1, 2, \dots, m\}$ ดังนั้น $y_0 = 0$ และ $y_m = b$ โดยช่วงมีความกว้าง $h = \frac{b-0}{m}$ จากกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) สามารถเขียนได้ในรูป

$$M(f, h) = h \sum_{k=1}^m f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h\right); k=0, 1, 2, \dots, m$$

วิธีการประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขโดยวิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) อยู่ในรูป $\int_0^b f(y)dy \approx M(f, h)$

3. วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

กฎสี่เหลี่ยมคางหมู กำหนดให้ฟังก์ชัน $w(y)=1$ และ $f(y)$ บนช่วง $[0, b]$ แบ่งเป็นช่วงย่อย m ช่วง $\{[y_{k-1}, y_k], k=1, 2, \dots, m\}$ โดยช่วงมีความกว้าง $h = \frac{b-0}{m}$ ระยะห่างที่เท่ากัน $\{y_k = y_0 + kh, k=0, 1, 2, \dots, m\}$ ดังนั้น $y_0 = 0$ และ $y_m = b$ ด้วยวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) สามารถเขียนได้ในรูป

$$T(f, h) = \frac{h}{2}(f(0) + f(b)) + h \sum_{k=1}^{m-1} f(y_k); k=0, 1, 2, \dots, m$$

วิธีการประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขโดยวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) อยู่ในรูป

$$\int_0^b f(y)dy \approx T(f, h)$$

4. วิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule)

สำหรับกฎเกาส์ กำหนดให้ฟังก์ชัน $w(y)=1$ และ $f(y)$ บนช่วง $[0, b]$ แบ่งออกเป็นช่วงย่อย m ช่วง $\{y_k, k=1, 2, \dots, m\}$ กฎของเกาส์ควอดราเจอร์จะนิยามเซตของ $a_k = \frac{h}{m}\left(k - \frac{1}{2}\right); k=1, 2, \dots, m$ โดยที่ $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m \leq b$ และเซตของค่าน้ำหนัก $w_k = b/m \geq 0; k=0, 1, 2, \dots, m$

วิธีการประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขโดยวิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule) อยู่ในรูป $\int_0^b w(y)f(y)dy \approx \sum_{k=1}^m w_k f(a_k)$

กำหนดให้ $\tilde{H}(u)$ แทนสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขของฟังก์ชัน $H(u)$ จากสมการปริพันธ์ของแผนภูมิควบคุม CUSUM ในสมการที่ (5) สามารถเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่ง ดังนี้

$$\begin{aligned} \tilde{H}(a_i) &= 1 + H(0)F(a - a_i - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) \\ &\quad + \int_0^b H(y)f(y + a - a_i - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL})dy \end{aligned} \quad (6)$$

เมื่อ $F(u) = 1 - e^{-au}$ และ $f(u) = \frac{dF(u)}{du} = \lambda e^{-\lambda u}$

จากสมการที่ (6) สามารถหาคำตอบได้โดยใช้วิธีการแก้ระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้น ดังนี้

$$\begin{aligned}\tilde{H}(a_i) &= 1 + H(0)F(a - a_i - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m w_j \tilde{H}(a_j) f(a_j + a - a_1 - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL})\end{aligned}\quad (7)$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}\tilde{H}(a_1) &= 1 + \tilde{H}(a_1)[F(a - a_1 - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) \\ &\quad + w_1 f(a - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL})] \\ &\quad + \sum_{j=2}^m w_j \tilde{H}(a_j) f(a_j + a - a_1 - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) \\ \tilde{H}(a_2) &= 1 + \tilde{H}(a_1)[F(a - a_2 - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) \\ &\quad + w_1 f(a_1 + a - a_2 - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL})] \\ &\quad + \sum_{j=2}^m w_j \tilde{H}(a_j) f(a_j + a - a_2 - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) \\ &\quad \vdots \\ \tilde{H}(a_m) &= 1 + \tilde{H}(a_1)[F(a - a_m - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) \\ &\quad + w_1 f(a_1 + a - a_m - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL})] \\ &\quad + \sum_{j=2}^m w_j \tilde{H}(a_j) f(a_j + a - a_m - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL})\end{aligned}$$

สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ R มิติ $m \times m$ ดังนี้

$$H_{m \times 1} = 1_{m \times 1} + R_{m \times m} H_{m \times 1} \quad (8)$$

$$\text{โดยที่ } H_{m \times 1} = \begin{pmatrix} \tilde{H}(a_1) \\ \tilde{H}(a_2) \\ \vdots \\ \tilde{H}(a_m) \end{pmatrix}, 1_{m \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} F(a - a_1 - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) + w_1 f(a - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) & \dots & w_m f(a_m + a - a_1 - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) \\ F(a - a_2 - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) + w_1 f(a_1 + a - a_2 - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) & \dots & w_m f(a_m + a - a_2 - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) \\ \vdots & & \vdots \\ F(a - a_m - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) + w_1 f(a_1 + a - a_m - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) & \dots & w_m f(a_m + a - a_m - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL}) \end{pmatrix}$$

โดยที่ $I_m = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ ถ้า $(I_m - R_{m \times m})^{-1}$ มีอยู่จริง จะได้ว่า

$$H_{m \times 1} = (I_m - R_m)^{-1} 1_{m \times 1} \quad (9)$$

จากสมการที่ (8) สามารถแก้ปัญหาค่าเชิงตัวเลขเพื่อให้ได้คำตอบของเวกเตอร์ $\tilde{H}(a_i) = H_j$ จากนั้นแทนค่า $\tilde{H}(a_i)$ ลงในสมการที่ (7) และแทนค่า a_i ด้วย u จะได้สมการประมาณค่าสำหรับสมการปริพันธ์ $H(u)$ ดังนี้

$$\tilde{H}(u) = 1 + \tilde{H}(a_i)F(a - u - \mu - \beta X_t - \phi_1 y_{t-L} - \dots - \phi_P y_{t-PL})$$

$$+ \sum_{j=1}^m w_j \tilde{H}(a_j) f(a_j + a - u - \mu - \beta X_t - \phi_1 Y_{t-L} - \dots - \phi_P Y_{t-PL}) \quad (10)$$

ผลการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) และความเร็วในการประมวลผล (CPU Times) ที่ได้จากการวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equations: NIE) 4 วิธี ได้แก่ วิธีกฎซิมป์สัน (Simpson Rule) วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) และวิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule) สำหรับตัวแบบฮัตตอดอยแบบมีฤดูกาลที่มีตัวแปรภายนอก (SARX(P,1)_L) เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ในกรณีที่กระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม (in-control state) กำหนดค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (α) มีค่าเท่ากับ 1 และกรณีที่กระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม (out-of-control state) กำหนดค่าระดับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ย (δ) มีค่าเท่ากับ 1.50, 1.60, 1.70, 1.80, 1.90, 2.00, 2.10, 2.20, 2.30, 2.40, 2.50 และ 3.00 ตามลำดับ และกำหนดให้การแบ่งช่วงของวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (m) มีค่าเท่ากับ 500

ตารางที่ 1 และตารางที่ 2 นำเสนอค่า ARL และเวลาในการประมวลผลที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขของตัวแบบ SARX(1,1)₄ โดยกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ของการถดถอยในตัวเองแบบมีฤดูกาล ϕ_1 มีค่าเท่ากับ 0.1 ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรภายนอก β มีค่าเท่ากับ 1.0 ค่าอ้างอิง a มีค่าเท่ากับ 2.5 และขีดจำกัดควบคุมบนของแผนภูมิควบคุม b มีค่าเท่ากับ 3.976 เมื่อกำหนด ค่า $ARL_0 = 370$ แสดงผลลัพธ์ค่า ARL_1 ในแต่ละระดับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยได้ดังตารางที่ 1 และเมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 500$ ค่าขีดจำกัดควบคุมบนของแผนภูมิควบคุม b มีค่าเท่ากับ 4.326 แสดงผลลัพธ์ดังตารางที่ 2 ตามลำดับ

ตารางที่ 3 และตารางที่ 4 นำเสนอค่า ARL และเวลาในการประมวลผลที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขของตัวแบบ SARX(2,1)₄ โดยกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ของการถดถอยในตัวเองแบบมีฤดูกาล ϕ_1 และ ϕ_2 มีค่าเท่ากับ 0.1 ตามลำดับ ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรภายนอก β มีค่าเท่ากับ 1.0 ค่าอ้างอิง a มีค่าเท่ากับ 2.5 และขีดจำกัดควบคุมบนของแผนภูมิควบคุม b มีค่าเท่ากับ 4.151 เมื่อกำหนด ค่า $ARL_0 = 370$ แสดงผลลัพธ์ค่า ARL_1 ในแต่ละระดับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยดังตารางที่ 3 และเมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 500$ ค่าขีดจำกัดควบคุมบนของแผนภูมิควบคุม b มีค่าเท่ากับ 4.515 แสดงผลลัพธ์ดังตารางที่ 4 ตามลำดับ

ตารางที่ 5 และตารางที่ 6 นำเสนอค่า ARL และเวลาในการประมวลผลที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขของตัวแบบ SARX(3,1)₄ โดยกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ของการถดถอยในตัวเองแบบมีฤดูกาล ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 มีค่าเท่ากับ 0.1 ตามลำดับ ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรภายนอก β มีค่าเท่ากับ 1.0 ค่าอ้างอิง a มีค่าเท่ากับ 2.5 และขีดจำกัดควบคุมบนของแผนภูมิควบคุม b มีค่าเท่ากับ 4.349 เมื่อกำหนด ค่า $ARL_0 = 370$ แสดงผลลัพธ์ค่า ARL_1 ในแต่ละระดับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยได้ดังตารางที่ 5 และเมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 500$ ค่าขีดจำกัดควบคุมบนของแผนภูมิควบคุม b มีค่าเท่ากับ 4.731 แสดงผลลัพธ์ดังตารางที่ 6 ตามลำดับ

นอกจากนี้ได้แสดงการเปรียบเทียบค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม CUSUM สำหรับตัวแบบ SARX(1,1)₄ ตัวแบบ SARX(2,1)₄ และตัวแบบ SARX(3,1)₄ ตามลำดับ เมื่อกำหนดให้ค่า $ARL_0 = 370$ ดังภาพที่ 1 และนำเสนอผลการ

เปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) ของแผนภูมิควบคุม CUSUM ของตัวแบบ SARX(1,1)₄ ตัวแบบ SARX(2,1)₄ และตัวแบบ SARX(3,1)₄ ตามลำดับ โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธี เมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 370$ แสดงดังภาพที่ 2

ตารางที่ 1 ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม CUSUM สำหรับตัวแบบ SARX(1,1)₄ เมื่อกำหนดให้ $ARL_0 = 370$, $a = 2.5$ และ $b = 3.976$

δ	Numerical Integration Equation			
	Midpoint Rule	Simpson Rule	Trapezoidal Rule	Gaussian Rule
0.00	370.000 (11.68)*	370.000 (106.03)	370.000 (13.11)	370.000 (13.46)
1.50	7.917 (12.66)	7.891 (89.56)	7.963 (12.49)	8.025 (12.95)
1.60	7.262 (12.05)	7.240 (106.48)	7.300 (12.55)	7.351 (13.35)
1.70	6.709 (11.85)	6.691 (101.86)	6.741 (12.97)	6.784 (13.16)
1.80	6.237 (11.87)	6.222 (102.87)	6.264 (13.05)	6.300 (13.72)
1.90	5.831 (11.96)	5.818 (96.43)	5.855 (14.45)	5.885 (13.72)
2.00	5.479 (11.66)	5.468 (89.07)	5.499 (13.19)	5.526 (13.24)
2.10	5.171 (11.65)	5.161 (86.16)	5.189 (12.86)	5.211 (13.62)
2.20	4.899 (12.30)	4.891 (85.19)	4.915 (13.39)	4.935 (13.47)
2.30	4.659 (11.91)	4.652 (93.52)	4.673 (13.37)	4.691 (13.83)
2.40	4.448 (12.89)	4.438 (107.16)	4.457 (13.20)	4.473 (13.09)
2.50	4.253	4.247	4.264	4.278

	(12.57)	(106.71)	(13.44)	(13.91)
3.00	3.533	3.530	3.540	3.548
	(12.38)	(102.98)	(12.96)	(13.07)

* ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บ หมายถึง CPU Times (หน่วย: นาที)

ตารางที่ 2 ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม CUSUM สำหรับตัวแบบ SARX(1,1)₄ เมื่อกำหนดให้ $ARL_0 = 500$,

$a = 2.5$ และ $b = 4.326$

δ	Numerical Integration Equation			
	Midpoint Rule	Simpson Rule	Trapezoidal Rule	Gaussian Rule
0.00	500.000 (11.77)*	500.000 (102.50)	500.000 (12.79)	500.000 (13.01)
1.50	8.541 (10.34)	8.508 (86.93)	8.607 (13.09)	8.698 (13.19)
1.60	7.809 (12.73)	7.782 (91.72)	7.864 (13.05)	7.938 (13.49)
1.70	7.194 (11.85)	7.172 (112.65)	7.239 (12.63)	7.301 (13.55)
1.80	6.672 (11.78)	6.653 (92.56)	6.710 (12.48)	6.762 (13.63)
1.90	6.224 (11.66)	6.208 (96.31)	6.256 (12.72)	6.300 (13.44)
2.00	5.836 (9.89)	5.823 (110.71)	5.864 (12.74)	5.902 (13.46)
2.10	5.498 (9.97)	5.486 (90.44)	5.522 (10.68)	5.555 (13.05)
2.20	5.201 (10.58)	5.191 (106.60)	5.222 (11.42)	5.250 (13.67)
2.30	4.939 (10.06)	4.929 (88.81)	4.957 (13.39)	4.981 (13.14)
2.40	4.705 (10.44)	4.698 (92.63)	4.721 (13.05)	4.728 (13.08)
2.50	4.496 (10.26)	4.486 (93.37)	4.510 (13.11)	4.529 (13.98)

3.00	3.716	3.711	3.724	3.736
	(10.33)	(84.84)	(11.49)	(12.54)

* ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บ หมายถึง CPU Times (หน่วย: นาที)

ตารางที่ 3 ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม CUSUM สำหรับตัวแบบ SARX(2,1)₄ เมื่อกำหนดให้ $ARL_0 = 370$, $a = 2.5$ และ $b = 4.151$

δ	Numerical Integration Equation			
	Midpoint Rule	Simpson Rule	Trapezoidal Rule	Gaussian Rule
0.00	370.000 (12.51)*	370.000 (91.36)	370.000 (13.69)	370.000 (13.09)
1.50	7.714 (12.72)	7.688 (225.78)	7.768 (13.87)	7.841 (13.52)
1.60	7.087 (13.07)	7.065 (222.78)	7.134 (13.64)	7.192 (14.36)
1.70	6.557 (13.02)	6.539 (223.05)	6.595 (13.93)	6.645 (14.04)
1.80	6.105 (13.11)	6.089 (221.70)	6.137 (13.82)	6.179 (14.31)
1.90	5.716 (13.02)	5.703 (186.91)	5.743 (13.56)	5.779 (14.45)
2.00	5.378 (13.17)	5.366 (187.22)	5.401 (14.11)	5.432 (13.59)
2.10	5.082 (13.37)	5.072 (187.87)	5.102 (13.69)	5.129 (14.58)
2.20	4.821 (13.14)	4.812 (201.85)	4.839 (15.30)	4.862 (14.98)
2.30	4.590 (13.30)	4.582 (224.12)	4.605 (14.30)	4.626 (14.66)
2.40	4.383 (12.97)	4.376 (194.83)	4.397 (14.20)	4.415 (14.56)
2.50	4.198 (12.55)	4.191 (193.65)	4.209 (13.70)	4.226 (14.21)
3.00	3.501	3.498	3.508	3.518

(12.30)	(192.95)	(13.30)	(14.28)
---------	----------	---------	---------

* ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บ หมายถึง CPU Times (หน่วย: นาที)

ตารางที่ 4 ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม CUSUM สำหรับตัวแบบ SARX(2,1)₄ เมื่อกำหนดให้ $ARL_0 = 500$, $a = 2.5$ และ $b = 4.515$

δ	Numerical Integration Equation			
	Midpoint Rule	Simpson Rule	Trapezoidal Rule	Gaussian Rule
0.00	500.000 (12.82)*	500.000 (116.93)	500.000 (14.67)	500.000 (14.37)
1.50	8.271 (10.90)	8.238 (101.13)	8.348 (14.01)	8.456 (14.47)
1.60	7.579 (12.33)	7.551 (98.48)	7.641 (14.13)	7.729 (14.57)
1.70	6.996 (11.93)	6.973 (115.16)	7.047 (14.10)	7.121 (15.49)
1.80	6.500 (12.23)	6.481 (116.28)	6.543 (13.84)	6.605 (14.91)
1.90	6.074 (11.36)	6.058 (95.36)	6.112 (14.46)	6.163 (14.22)
2.00	5.706 (10.97)	5.691 (109.17)	5.737 (14.10)	5.781 (13.66)
2.10	5.386 (12.32)	5.371 (101.07)	5.411 (14.22)	5.449 (13.67)
2.20	5.100 (13.18)	5.089 (96.67)	5.124 (13.94)	5.157 (14.24)
2.30	4.850 (12.84)	4.840 (92.15)	4.871 (13.72)	4.899 (14.97)
2.40	4.626 (13.29)	4.618 (95.58)	4.644 (13.81)	4.641 (14.41)
2.50	4.426 (13.03)	4.418 (97.10)	4.442 (13.68)	4.464 (14.27)
3.00	3.676	3.671	3.686	3.698

(12.75)	(116.36)	(13.58)	(13.70)
---------	----------	---------	---------

* ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บ หมายถึง CPU Times (หน่วย: นาที)

ตารางที่ 5 ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม CUSUM สำหรับตัวแบบ SARX(3,1)₄ เมื่อกำหนดให้ $ARL_0 = 370$, $a = 2.5$ และ $b = 4.349$

δ	Numerical Integration Equation			
	Midpoint Rule	Simpson Rule	Trapezoidal Rule	Gaussian Rule
0.00	370.000 (12.41)*	370.000 (127.54)	370.000 (14.00)	370.000 (13.36)
1.50	7.485 (13.61)	7.458 (111.12)	7.548 (14.87)	7.636 (15.21)
1.60	6.891 (12.84)	6.869 (108.04)	6.943 (14.94)	7.016 (15.44)
1.70	6.389 (13.90)	6.371 (119.34)	6.432 (15.11)	6.493 (15.54)
1.80	5.960 (12.78)	5.944 (114.71)	5.997 (14.78)	6.048 (15.04)
1.90	5.590 (13.14)	5.577 (119.63)	5.621 (15.02)	5.665 (15.34)
2.00	5.269 (13.14)	5.257 (117.55)	5.295 (14.99)	5.332 (14.73)
2.10	4.986 (12.83)	4.976 (110.66)	5.010 (15.60)	5.042 (14.57)
2.20	4.737 (12.21)	4.728 (100.17)	4.758 (14.75)	4.786 (14.48)
2.30	4.516 (12.39)	4.508 (118.67)	4.534 (14.91)	4.559 (14.91)
2.40	4.318 (12.79)	4.311 (124.63)	4.334 (15.21)	4.355 (14.95)
2.50	4.141 (12.77)	4.134 (120.35)	4.155 (14.55)	4.174 (14.84)
3.00	3.471	3.467	3.459	3.491

(12.43)	(122.52)	(14.95)	(14.29)
---------	----------	---------	---------

* ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บ หมายถึง CPU Times (หน่วย: นาที)

ตารางที่ 6 ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม CUSUM สำหรับตัวแบบ SARX(3,1)₄ เมื่อกำหนดให้ $ARL_0 = 500$, $a = 2.5$ และ $b = 4.731$

δ	Numerical Integration Equation			
	Midpoint Rule	Simpson Rule	Trapezoidal Rule	Gaussian Rule
0.00	500.000 (13.09)	500.000 (121.94)	500.000 (15.04)	500.000 (15.94)*
1.50	7.951 (12.09)	7.921 (116.53)	8.044 (13.55)	8.175 (14.94)
1.60	7.309 (13.08)	7.281 (119.09)	7.382 (13.02)	7.488 (14.30)
1.70	6.765 (13.33)	6.742 (100.20)	6.826 (13.26)	6.914 (14.55)
1.80	6.302 (12.91)	6.283 (111.15)	6.353 (13.87)	6.426 (15.11)
1.90	5.904 (12.23)	5.887 (121.85)	5.947 (13.75)	6.009 (15.12)
2.00	5.558 (12.99)	5.543 (124.02)	5.595 (15.32)	5.647 (15.06)
2.10	5.255 (12.09)	5.242 (122.54)	5.287 (14.44)	5.332 (15.07)
2.20	4.988 (12.46)	4.977 (103.13)	5.016 (14.71)	5.055 (14.60)
2.30	4.751 (12.56)	4.741 (118.11)	4.776 (14.03)	4.810 (15.36)
2.40	4.540 (12.22)	4.531 (114.60)	4.561 (14.08)	4.591 (15.38)
2.50	4.350 (12.18)	4.342 (116.21)	4.369 (14.12)	4.396 (15.64)
3.00	3.636	3.631	3.647	3.662

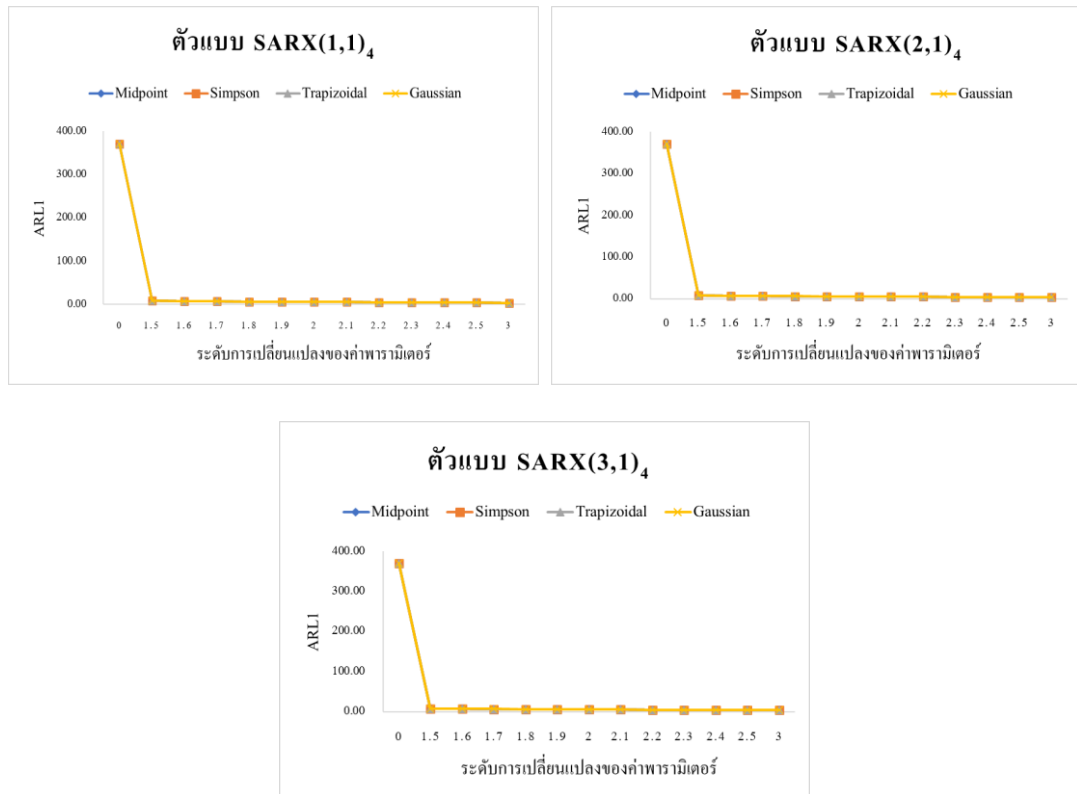
(12.84)

(108.27)

(13.84)

(15.88)

* ตัวเลขที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บ หมายถึง CPU Times (หน่วย: นาที)



ภาพที่ 1 การเปรียบเทียบค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม CUSUM สำหรับตัวแบบ $SARX(P,1)_4$ โดย
วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข เมื่อกำหนดให้ $ARL_0=370$

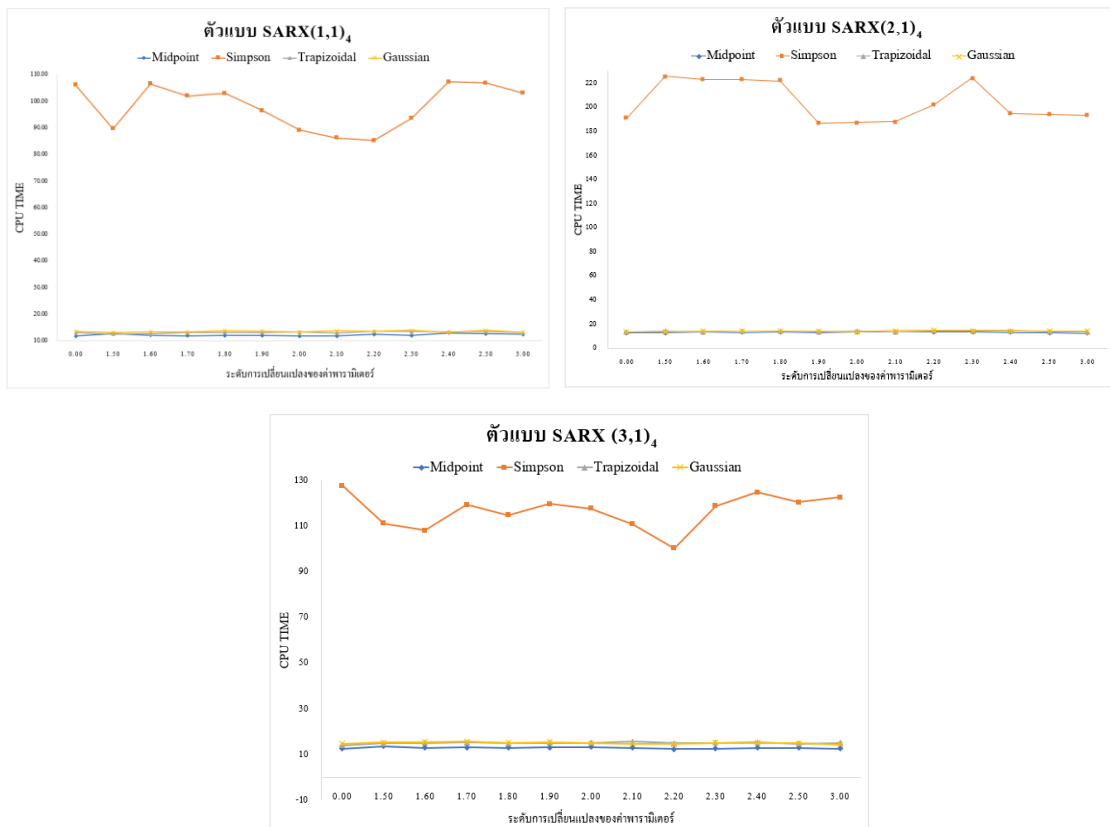
อภิปรายผลการวิจัย

จากตารางที่ 1 และตารางที่ 2 แสดงผลลัพธ์ค่า $ARL_0 = 370$ และ 500 ที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธีของแผนภูมิควบคุม CUSUM สำหรับตัวแบบ $SARX(1,1)_4$ ผลการวิจัยพบว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธี ให้ค่า ARL ไม่แตกต่างกันและเมื่อระดับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ย (δ) เพิ่มมากขึ้น ค่า ARL จะลดลงเรื่อยๆ และเมื่อพิจารณาจากเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Times) พบว่า โดยส่วนใหญ่วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยที่สุด

ตารางที่ 3 และตารางที่ 4 แสดงผลลัพธ์ค่า $ARL_0 = 370$ และ 500 ที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธีของแผนภูมิควบคุม CUSUM สำหรับตัวแบบ $SARX(2,1)_4$ ผลการวิจัยพบว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีปริพันธ์เชิง

ตัวเลขทั้ง 4 วิธี ให้ค่า ARL ไม่แตกต่างกัน และเมื่อระดับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ย (δ) เพิ่มขึ้น ค่า ARL จะลดลงเรื่อยๆ สำหรับการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผลพบว่า โดยส่วนใหญ่วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยที่สุด

ตารางที่ 5 และตารางที่ 6 แสดงผลลัพธ์ค่า $ARL_0 = 370$ และ 500 ที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธีของแผนภูมิควบคุม CUSUM สำหรับตัวแบบ SARX(3,1)₄ ผลการวิจัยพบว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธี ให้ค่า ARL ไม่แตกต่างกัน และเมื่อระดับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ย (δ) เพิ่มขึ้น ค่า ARL จะลดลงเรื่อยๆ สำหรับการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผลพบว่า วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยที่สุด



ภาพที่ 2 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Time) ของแผนภูมิควบคุม CUSUM สำหรับตัวแบบ SARX(P,1)₄ โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข เมื่อกำหนดให้ $ARL_0=370$

จากภาพที่ 1 พบว่า ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม CUSUM สำหรับตัวแบบ $SARX(1,1)_4$, $SARX(2,1)_4$ และ $SARX(3,1)_4$ โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธี มีค่าไม่แตกต่างกัน และผลลัพธ์จากภาพที่ 2 แสดงให้เห็นว่าการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยวิธีกึ่งกลาง (Midpoint Rule) ใช้เวลาในการประมวลผล (CPU Times) น้อยที่สุดในบรรดาวิธีการประมาณค่าทั้ง 4 วิธี

สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (Cumulative Sum: CUSUM) สำหรับตัวแบบอัตโนมัติแบบมีฤดูกาลที่มีตัวแปรภายนอก ($SARX(P,1)_L$) เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration Equation: NIE) 4 วิธี ได้แก่ วิธีกฎซิมป์สัน (Simpson Rule) วิธีกึ่งกลาง (Midpoint Rule) วิธีกึ่งสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) และวิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule) เนื่องจากเป็นวิธีที่ใช้คำนวณหาความยาวรันเฉลี่ย ที่ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยเมื่อเทียบกับวิธีการหาค่าตอบโดยวิธีจำลองมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulations: MC) โดยผลการวิจัยพบว่า ค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขทั้ง 4 วิธี และในแต่ละระดับการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีกฎซิมป์สัน (Simpson Rule), วิธีกึ่งกลาง (Midpoint Rule), วิธีกึ่งสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) และวิธีกฎเกาส์ (Gaussian Rule) ให้ค่า ARL ไม่แตกต่างกัน ในขณะที่เวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Times) ของวิธีกึ่งกลาง (Midpoint Rule) มีค่าน้อยที่สุด

เอกสารอ้างอิง

Page, E. S. (1954). Continuous Inspection Schemes. *Biometrika*. 41, 100-114.

Phanyaem, S. (2012). Analytical Expression and Numerical Solutions of Average Run Length for $SARMA(P,Q)_L$ Process on CUSUM procedure. *International Journal of Scientific & Technology research*, 1.

Phanyaem, S., Areepong, Y. & Sukparungsee, S. (2014). Explicit Formulas of Average Run Length for $ARMA(1,1)$ Process of CUSUM Control Chart. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 90(2), 211-224.

Phanyaem, S. (2017). Average Run Length of Cumulative Sum Control Charts for $SARMA(1,1)_L$ Models. *Thailand Statistician*, 15(2), 184-195.

Shewhart, W. A. (1931). *Economic control of quality of manufactured product* (1st ed.). Macmillan and Co. Ltd., London.

Poonpipat, P., Phanyaem, S., & Areepong, Y. (2020). Average run length values using the numerical integral equation method for exponential moving average control charts when the data is symmetrically distributed and is not symmetrical. *13th National Conference*, Srinakharinwirot University.