

Research Article

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขใหม่ที่มีลำดับการลู่เข้าอันดับที่หก สำหรับสมการไม่เชิงเส้น

A New Numerical Algorithm with Sixth Order of Convergence for Nonlinear Equations

จุฑาภรณ์ สอมประโคน¹, วิมนศิริ อาญาเมือง¹ และ เฉลิมวุฒิ คำเมือง^{1*}

Juthaporn Somprakhon¹, Wimonsiri Aryamueang¹ and Chalermwut Comemuang^{1*}

¹วิชาสาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ ประเทศไทย

¹Department of Mathematics, Faculty of Science, Buriram Rajabhat University, Thailand

*E-mail: comemuang.cm@bru.ac.th

Received: 22/06/2021; Revised: 31/03/2022; Accepted: 17/08/2022

บทคัดย่อ

ในบทความนี้จะกล่าวถึงระเบียบวิธีการทำซ้ำ 2 วิธี ในการแก้สมการไม่เชิงเส้น ที่ได้พัฒนาแนวคิดของ Gobabay-Javidi, วิธีของ Obama-Chebichev และ Taylor series สำหรับการวิเคราะห์ลำดับลู่เข้าของระเบียบวิธีการทำซ้ำใหม่ 3 ขั้นตอน และนำเสนอตัวอย่างเชิงตัวเลข เพื่อแสดงว่าระเบียบวิธีที่เรานำเสนอมีประสิทธิภาพที่ดีกว่า เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีการทำซ้ำอื่น ๆ ในประเภทเดียวกัน

คำสำคัญ: สมการไม่เชิงเส้น นิวตัน ลำดับการลู่เข้า

Abstract

In this article, we will discuss two iterative methods for solving nonlinear equations. that developed the concept of Gobabay-Javidi, Obama-Chebichev Method and Taylor series Sequence analysis for convergence of a methodological Repeat 3 steps and present numerical example. To show that the methodology we offer is the better efficient. Compared to other iteration methods in the same

Keywords: nonlinear equations, Newton's methods, order of convergence

บทนำ

การแก้สมการไม่เชิงเส้นเป็นสิ่งที่สำคัญในคณิตศาสตร์ประยุกต์ และวิทยาศาสตร์วิศวกรรมศาสตร์ และในบทความนี้ เราจะพิจารณาระเบียบวิธีการทำซ้ำเพื่อหารากของสมการไม่เชิงเส้น โดยพิจารณาสมการไม่เชิงเส้นที่กำหนด

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

ถ้า $f'(x_0) \neq 0$ เราสามารถหาค่านิพจน์ข้างต้นได้จาก Taylor series ได้ดังนี้

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0 \quad (2)$$

หารากของสมการไม่เชิงเส้น โดยกำหนด x_{k+1} มีรูปแบบดังนี้

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (3)$$

โดยเรียกสมการที่ (3) ว่า วิธีของ Newton's ในการหารากของสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งมีลำดับการลู่เข้าอันดับที่สอง จาก Taylor series เราสามารถหาค่าได้ดังนี้

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{2(f'(x_k))^2 - f(x_k)f''(x_k)} \quad (4)$$

โดยเรียกสมการที่ (4) ว่า วิธีของ Halley Noor et al. (2007) ในการคำนวณหารากของสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งมีลำดับการลู่เข้าอันดับที่สาม ทำให้สมการที่ (2) ให้ง่ายขึ้น โดยใช้วิธีการทำซ้ำอีกหนึ่งวิธีดังนี้

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{f^2(x_k)f''(x_k)}{2(f'(x_k))^3} \quad (5)$$

โดยเรียกสมการที่ (5) ว่าวิธี Householder He (1999) ในการคำนวณหารากของสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งมีลำดับการลู่เข้าอันดับที่สาม

วิธีการของ Newton's มีลำดับการลู่เข้าอันดับที่ 2 และใช้วิธีการย่อยสลายของ Adomian, Basto คิดโดย Basto et al (2006) จากการใช้วิธีการทำซ้ำ จะได้รูปแบบใหม่ดังนี้

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} - \frac{(f(z_n))^2 f''(z_n)}{2(f'(z_n))^3} \quad (6)$$

โดยเรียกสมการที่ (6) ว่าวิธีของ Obadah-Chebyshev คิดโดย Butsakorn & Kong-ied (2021) ในการคำนวณหารากของสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งมีลำดับการลู่เข้าอันดับที่หก

ในช่วงที่ผ่านมา ได้มีการพัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขขึ้น เช่น การลดรูปอนุพันธ์อันดับที่สอง, การแก้ไขการลู่เข้า และได้มีการพัฒนาระเบียบวิธีขึ้นมาใหม่ 2 ระบบวิธี ดังนั้นระเบียบวิธีมีที่มาและความสำคัญดังนี้

ในศตวรรษที่ 20 Ostrowski คิดโดย Ostrowski (1966) ได้ใช้ระเบียบวิธีของ Newton's เป็นตัวอย่างของวิธีการทำซ้ำ 2 ขั้นตอน ซึ่งมีลำดับการลู่เข้าอันดับที่สี่ จากนั้น Traub คิดโดย Traub (1982) ได้นำเสนอรูปแบบของระเบียบวิธีการทำซ้ำ ซึ่งใช้วิธีของ Newton's เป็นตัวอย่างขั้นตอนการแก้ไขและพิสูจน์ ซึ่งวิธีที่นำเสนอมีลำดับการลู่เข้าอันดับที่สี่ และต่อมาในศตวรรษที่

21 Noor และ Noor คิดโดย Noor et al. (2012) ได้พัฒนาระเบียบวิธีของ Halley คิดโดย Noor et al. (2007) โดยใช้ระเบียบวิธีของ Newton's เป็นตัวอย่าง และได้นำขั้นตอนของ Halley มาแก้ไข แล้วพิสูจน์ว่าระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นมีลำดับการลู่เข้าอันดับที่หก หลังจากนั้นนำระเบียบวิธีที่ได้มาลบอนุพันธ์อันดับที่สอง จากนั้นสร้างระเบียบวิธีใหม่ที่มีลำดับการลู่เข้าอันดับที่ห้า และจากนั้นวิธีการของ Obadah –Chebyshev คิดโดย Imran & Deswita (2016) โดยมีการทำซ้ำซึ่งมีลำดับการลู่เข้าอันดับที่สาม และเป็นระเบียบวิธีที่สร้างใหม่ถูกสร้างขึ้นโดยมีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับวิธีการของ Newton's และขอบเขตการเข้าถึงเดียวกัน

ในบทความนี้ เราได้พัฒนาเกี่ยวกับการวิเคราะห์การลู่เข้าของระเบียบวิธีการทำซ้ำ 3 ขั้นตอนขึ้นมาใหม่ ได้แก่ ระเบียบวิธีที่ 1 และระเบียบวิธีที่ 2 ซึ่งใช้ระเบียบวิธีของ Newton's เป็นตัวอย่าง จากนั้นพิสูจน์ว่าระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นมาใหม่นั้นมีลำดับการลู่เข้าและมีประสิทธิภาพที่ดีกว่า เมื่อเทียบกับระเบียบวิธีอื่น ๆ ในประเภทเดียวกัน ระเบียบวิธีที่นำเสนอขึ้นถูกประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาคำถามเชิงตัวเลขบางตัวอย่างของการทดสอบ เพื่อความถูกต้องและแม่นยำ

ระเบียบวิธีการที่นำเสนอ

ให้ $f : X \rightarrow R, X \subseteq R$ เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ โดยแก้ไขแนวคิดมาจากวิธีการทำซ้ำของ Homotopy โดยที่ Golbabai และ javidi คิดโดย Golbabai & Javidi (2007) จะได้สมการดังนี้

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{hf^2(x_n)f''(x_n)}{2(f'(x_n))^3}, h = -1 \quad (7)$$

จะได้

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f^2(x_0)f''(x_0)}{2[(f'(x_0))^3 - f(x_0)f'(x_0)f''(x_0)]} \quad (8)$$

เขียนให้อยู่ในรูปแบบการทำซ้ำ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f^2(x_n)f''(x_n)}{2[(f'(x_n))^3 - f(x_n)f'(x_n)f''(x_n)]} \quad (9)$$

โดยเรียกสมการที่ (9) ว่าวิธี Golbabai และ Javidi คิดโดย Golbabai & Javidi (2007) ในการคำนวณหารากของสมการไม่เชิงเส้น และมีลำดับการลู่เข้าอันดับที่สาม

จากสมการที่ (2) จะได้

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{(x-x_0)^2 f''(x_0)}{2 f'(x_0)} \quad (10)$$

จากรูปแบบการทำซ้ำของ Golbabai และ Javidi ในสมการที่ (8)

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f^2(x_0)f''(x_0)}{2[(f'(x_0))^3 - f(x_0)f'(x_0)f''(x_0)]} \quad (11)$$

จากสมการที่ (10) และ (11) จะได้

$$x_{n+1} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f^2(x_0)f''(x_0)[2(f'(x_0))^2 - f(x_0)f''(x_0)]^2}{8(f'(x_0))^3[(f'(x_0))^2 - f(x_0)f''(x_0)]^2} \quad (12)$$

เขียนสมการข้างต้นใหม่ด้วยวิธีของ Newton's ได้ระเบียบวิธีใหม่ดังนี้

ระเบียบวิธีที่ 1 สำหรับ x_0 ที่กำหนด โดยคำนวณหาค่าประมาณของผลเฉลย x_{n+1} ตามรูปแบบการทำซ้ำดังนี้

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} - \frac{f^2(y_n)f''(y_n)[2(f'(y_n))^2 - f(y_n)f''(y_n)]^2}{8(f'(y_n))^3[(f'(y_n))^2 - f(y_n)f''(y_n)]^2} \quad (14)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (15)$$

ระเบียบวิธีที่ 1 เป็นระเบียบวิธีการทำซ้ำ 3 ขั้นตอนใหม่ ซึ่งมีลำดับการลู่เข้าอันดับที่หก ที่ได้รับการปรับปรุงแก้ไขจากวิธีของ Golbabai และ Javidi คิดโดย Golbabai & Javidi (2007) โดยใช้วิธีของ Newton's เป็นการคาดการณ์หาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้นที่กำหนด

ในระเบียบวิธีที่ 2 เขียนสมการข้างต้นใหม่ ด้วยวิธีของ Newton's โดยนำวิธีของ Obadah-Chebyshev คิดโดย Naseem et al. (2020) และจะได้ระเบียบวิธีใหม่ดังนี้

ระเบียบวิธีที่ 2 สำหรับ x_0 ที่กำหนด โดยคำนวณหาค่าประมาณของผลเฉลย x_{n+1} ตามรูปแบบการทำซ้ำดังนี้

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} - \frac{f^2(y_n)f''(y_n)[2(f'(y_n))^2 - f(y_n)f''(y_n)]^2}{8(f'(y_n))^3[(f'(y_n))^2 - f(y_n)f''(y_n)]^2} \quad (17)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} - \frac{(f(z_n))^2 f''(z_n)}{2(f'(z_n))^3} \quad (18)$$

ระเบียบวิธีที่ 2 เป็นระเบียบวิธีการทำซ้ำ 3 ขั้นตอนใหม่ ซึ่งมีลำดับการลู่เข้าอันดับที่หก ที่ได้รับการดัดแปลงแก้ไขจากวิธีของ Golbabai และ Javidi คิดโดย Golbabai & Javidi (2007) โดยใช้วิธีของ Obadah-Chebyshev เป็นการคาดการณ์และหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้นที่กำหนด

การวิเคราะห์การลู่เข้า

ในส่วนนี้ เราจะพูดถึงการวิเคราะห์การลู่เข้าของระเบียบวิธีที่ 1 และระเบียบวิธีที่ 2 ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 1 สมมติว่า α เป็นตัวอย่างศูนย์อย่างง่ายของฟังก์ชัน $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ สำหรับช่วงเปิด I ถ้า x_0 อยู่ใกล้กับ α ลำดับของการลู่เข้าของระเบียบวิธีที่ 1 คือ หก

พิสูจน์ ในการวิเคราะห์การลู่เข้าของระเบียบวิธีที่ 1

ให้ α เป็นตัวอย่างศูนย์กลางอย่างง่ายของ f โดยการขยาย $f(x_n)$ และ $f'(x_n)$ โดยใช้การกระจายของ Taylor series จะได้ว่า

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + \frac{1}{4!}f^{(iv)}(\alpha)e_n^4 + \frac{1}{5!}f^{(v)}(\alpha)e_n^5 + \frac{1}{6!}f^{(vi)}(\alpha)e_n^6 + O(e_n^7),$$

$$f(x_n) = f'(\alpha)[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + c_6e_n^6 + O(e_n^7)] \quad (19)$$

$$f'(x_n) = f'(\alpha)[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + 6c_6e_n^5 + 7c_7e_n^6 + O(e_n^7)], \quad (20)$$

$$\text{เมื่อ } c_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!f'(\alpha)}$$

จากสมการที่ (19) และ (20) จะได้

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n + c_2e_n^2 + 2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + (3c_4 - 7c_3c_2 + 4c_2^3)e_n^4$$

$$+ (-6c_3^3 + 20c_3c_2^2 - 10c_2c_4 + 4c_5 - 8c_2^4)e_n^5$$

$$+ (-17c_3c_4 + 28c_4c_2^2 - 13c_2c_5 + 5c_6 + 33c_2c_3^3 - 52c_3c_2^3 + 16c_2^5)e_n^6 + O(e_n^7), \quad (21)$$

$$y_n = \alpha + c_2e_n^2 + 2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + (3c_4 - 7c_3c_2 + 4c_2^3)e_n^4$$

$$+ (-6c_3^3 + 20c_3c_2^2 - 10c_2c_4 + 4c_5 - 8c_2^4)e_n^5$$

$$+ (-17c_3c_4 + 28c_4c_2^2 - 13c_2c_5 + 5c_6 + 33c_2c_3^3 - 52c_3c_2^3 + 16c_2^5)e_n^6 + O(e_n^7), \quad (22)$$

$$f(y_n) = f'(\alpha)[c_2e_n^2 + 2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + (3c_4 - 7c_3c_2 + 5c_2^3)e_n^4$$

$$+ (24c_3c_2^2 - 12c_2^4 - 10c_2c_4 + 4c_5 - 6c_3^2)e_n^5$$

$$+ (-73c_3c_2^3 + 34c_4c_2^2 + 28c_2^5 + 37c_2c_3^2 - 17c_4c_3 - 13c_2c_5 + 56c_6)e_n^6 + O(e_n^7)] \quad (23)$$

$$f'(y_n) = f'(\alpha)[1 + 2c_2^2e_n^2 + 4(c_3c_2 - c_2^3)e_n^3 + (6c_2c_4 - 11c_3c_2^2 + 8c_2^4)e_n^4$$

$$+ (28c_3c_2^3 - 20c_4c_2^2 + 8c_2c_5 - 16c_2^5)e_n^5$$

$$+ (-16c_3c_2c_4 + 12c_3^3 + 60c_2^3c_4 - 26c_5c_2^2 + 10c_2c_6 + 32c_2^6)e_n^6 + O(e_n^7)] \quad (24)$$

$$f''(y_n) = f'(\alpha)[2c_2 + 6c_3c_2e_n^2 + 12(c_3^2 - c_3c_2^2)e_n^3$$

$$+ (18c_3c_4 - 42c_3^2c_2 + 24c_3c_2^3 + 12c_4c_2^2)e_n^4$$

$$+ (-12c_2c_3c_4 + 24c_3c_5 - 36c_3^3 + 120c_3^2c_2^2 - 48c_3c_2^4 - 48c_4c_2^3)e_n^5$$

$$+ (-78c_2c_5c_3 + 30c_3c_6 - 54c_4c_3^2 - 96c_3c_4c_2^2 + 198c_2c_3^3 - 312c_3^2c_2^3$$

$$+ 96c_2^5c_3 + 72c_2c_4^2 + 144c_4c_2^4 + 20c_5c_2^3)e_n^6 + O(e_n^7)] \quad (25)$$

แทนสมการที่ (19), (20), (22), (23), (24) และ (25) ลงในสมการที่ (14) จะได้

$$z_n = \alpha + c_2^3 e_n^4 + (-4c_2^4 + 4c_2^2 c_3) e_n^5 + (12c_2^5 - 22c_2^3 c_3 + 6c_2^2 c_4 + 4c_2 c_3^2) e_n^6 + O(e_n^7) \quad (26)$$

โดยใช้การขยายตัวของ Taylor series สำหรับ $f(z_n)$ และ $f'(z_n)$ ที่ $z_n = \alpha$ จากสมการที่ (26)

$$\begin{aligned} f(z_n) = f'(\alpha) [c_2 e_n^2 + (-2c_2^2 + 2c_3) e_n^3 + (4c_2^3 - 7c_2 c_3 + 3c_4) e_n^4 \\ + (-8c_2^4 + 20c_2^2 c_3 - 10c_2 c_4 - 6c_3^2 + 4c_5) e_n^5 \\ + (16c_2^5 - 52c_2^3 c_3 + 28c_2^2 c_4 + 33c_2 c_3^2 - 13c_2 c_5 - 17c_3 c_4 + 5c_6) e_n^6 + O(e_n^7)] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} f'(z_n) = f'(\alpha) [1 + 2c_2^4 e_n^4 + (-8c_2^5 + 8c_2^3 c_3) e_n^5 \\ + (24c_2^6 - 44c_2^4 c_3 + 12c_2^3 c_4 + 8c_2^2 c_3^2) e_n^6 + O(e_n^7)] \end{aligned} \quad (28)$$

จากสมการที่ (27) และ (28) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = (-2c) e_n^3 + (c_2^3 - c_2 c_3) e_n^4 + (-10c_2^4 + 13c_2^2 c_3 - 10c_2 c_4 + 6c_3^2) e_n^5 \\ + (-4c_2^5 - 15c_2^3 c_3 + 12c_2^2 c_4 - 2c_2 c_3^2 - 3c_2 c_5 + c_3 c_4) e_n^6 + O(e_n^7) \end{aligned} \quad (29)$$

นำสมการที่ (29) แทนในสมการที่ (15) จะได้

$$x_{n+1} = \alpha + (8c_2^5) e_n^6 + O(e_n^7) \quad (30)$$

ซึ่งหมายถึง

$$e_{n+1} = (8c_2^5) e_n^6 + O(e_n^7) \quad (31)$$

จากสมการที่ (31) แสดงให้เห็นว่าลำดับการลู่เข้าของระเบียบวิธีที่ 1 คือหก

ทฤษฎีบท 2 สมมติว่า α เป็นรากของสมการ $f(x) = 0$ ถ้า $f(x)$ อยู่ในช่วงใกล้เคียงของ α ลำดับการลู่เข้าของระเบียบวิธี 2 คือหก

โดยใช้การขยายตัวของ Taylor series สำหรับ $f''(z_n)$ ที่ $z_n = \alpha$ จากสมการที่ (26) จะได้

$$\begin{aligned} f''(z_n) = f''(\alpha) [2c_2 + 6c_2^3 c_3 e_n^4 + (-24c_2^4 c_3 + 24c_2^2 c_3^2) e_n^5 \\ + (72c_2^5 c_3 - 132c_2^3 c_3^2 + 36c_2^2 c_3 c_4 + 24c_2 c_3^3) e_n^6 + O(e_n^7)] \end{aligned} \quad (32)$$

แทนสมการที่ (26), (27), (28), (29) และ (32) ลงในสมการที่ (18) ดังนั้นจะได้

$$x_{n+1} = \alpha + (4c_2^5) e_n^6 + O(e_n^7) \quad (33)$$

ซึ่งหมายถึง

$$e_{n+1} = (4c_2^5) e_n^6 + O(e_n^7) \quad (34)$$

จากสมการที่ (34) แสดงให้เห็นว่าลำดับการลู่เข้าของระเบียบวิธีที่ 2 คือหก

ตัวอย่างเชิงตัวเลข

ในส่วนนี้เราจะเปรียบเทียบจำนวนการทำซ้ำ 3 ขั้นตอน เพื่อหาค่าโดยประมาณของระเบียบวิธีที่เราได้นำเสนอและวิธีของบุคคลอื่น ๆ ที่มีลำดับการลู่เข้าที่เท่าเทียมกัน โดยในระเบียบวิธีที่ 1 และระเบียบวิธีที่ 2 มีลำดับการลู่เข้าที่หก เปรียบเทียบกับวิธีของ Halley (MHM) คิดโดย Noor et al. (2007) Golbabai - Javidi (MGJM) คิดโดย Naseem et al. (2020) และ Changbum Chun - Beny Neta (CHUN) คิดโดย Chun & Neta (2012) โดยพิจารณาตัวอย่างเชิงตัวเลขดังนี้

$$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10,$$

$$f_2(x) = e^x + \cos(\pi x),$$

$$f_3(x) = x^2 + \sin\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{1}{4},$$

$$f_4(x) = xe^x - 1,$$

$$f_5(x) = x^3 - 10,$$

$$f_6(x) = \cos(x) - x,$$

$$f_7(x) = \tan^{-1}(x) + x.$$

ตัวอย่างทั้งหมดคำนวณโดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ Maple 2021 โดยการคำนวณอยู่ภายใต้เงื่อนไขการหยุดคำนวณเมื่อ $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ และ $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$ โดยมี $\varepsilon = 10^{-15}$

ตารางที่ 1-7 แสดงการเปรียบเทียบของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข Halley (MHM) , Golbabai และ Javidi (MGJM1), Golbabai และ Javidi (MGJM2) และ Changbum Chun - Beny Neta (CHUN) โดยแทนจำนวนวิธีทำซ้ำของ N ในแนวตั้ง , ขนาด $|f(x_{n+1})|$, หาค่าประมาณรากของ x_{n+1} , และหาค่าประมาณผลต่างของ $|x_{n+1} - x_n|$

ตารางที่ 1 ตารางการเปรียบเทียบวิธีการทำซ้ำ

Method	N	$ f(x_{n+1}) $	x_{n+1}	$\sigma = x_{n+1} - x_n $
$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10, x_0 = -0.4$				
MHM	23	$7.392887e^{-38}$	1.365230013414096	$4.595974e^{-08}$
MGJM 1	4	$3.518283e^{-46}$	1.365230013414096	$3.794720e^{-08}$
MGJM 2	4	$3.518283e^{-46}$	1.365230013414096	$3.794720e^{-08}$
CHUN	26	$2.708693e^{-44}$	1.365230013414096	$1.520320e^{-09}$
Algorithm 1	3	$6.332380e^{-41}$	1.365230013414096	$8.557424e^{-04}$
Algorithm 2	5	$4.403350e^{-45}$	1.365230013414096	$7.045542e^{-03}$

ตารางที่ 2 ตารางการเปรียบเทียบวิธีการทำซ้ำ

Method	N	$ f(x_{n+1}) $	x_{n+1}	$\sigma = x_{n+1} - x_n $
$f_2(x) = e^x + \cos(\pi x), x_0 = -1.9$				
MHM	9	$1.268356e^{-48}$	-0.522480772874125	$4.262132e^{-11}$
MGJM 1	8	$1.013204e^{-25}$	-0.522480772874215	$1.409549e^{-04}$
MGJM 2	3	$1.837741e^{-82}$	-0.522480772874215	$5.335861e^{-14}$
CHUN	5	$8.119440e^{-23}$	-0.522480772874215	$2.261390e^{-4}$
Algorithm 1	2	$3.731856e^{-66}$	-0.670829984276972	$3.311450e^{-06}$
Algorithm 2	2	$2.000000e^{-100}$	-0.670829984276972	$2.140892e^{-08}$

ตารางที่ 3 ตารางการเปรียบเทียบวิธีการทำซ้ำ

Method	N	$ f(x_{n+1}) $	x_{n+1}	$\sigma = x_{n+1} - x_n $
$f_3(x) = x^2 + \sin\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{1}{4}, x_0 = 2$				
MHM	3	$4.499472e^{-42}$	0.409992017925641	$1.880726e^{-08}$
MGJM 1	3	$2.316711e^{-92}$	0.409992017925641	$1.627080e^{-15}$
MGJM 2	2	$1.670194e^{-15}$	0.409992017925641	$1.059787e^{-02}$
CHUN	4	$1.227119e^{-75}$	0.409992017925641	$7.995769e^{-16}$
Algorithm 1	2	$3.629875e^{-54}$	0.409992017925641	$1.076650e^{-04}$
Algorithm 2	2	$4.410590e^{-111}$	0.409992017925641	$2.178990e^{-06}$

ตารางที่ 4 ตารางการเปรียบเทียบวิธีการทำซ้ำ

Method	N	$ f(x_{n+1}) $	x_{n+1}	$\sigma = x_{n+1} - x_n $
$f_4(x) = xe^x - 1, x_0 = 1$				
MHM	3	$1.116440e^{-68}$	0.567143290433274	$2.540557e^{-14}$
MGJM 1	2	$5.068654e^{-20}$	0.567143290433274	$6.667718e^{-04}$
MGJM 2	2	$2.535508e^{-21}$	0.567143290433274	$4.396326e^{-04}$
CHUN	3	$2.500354e^{-51}$	0.567143290433274	$5.876548e^{-11}$
Algorithm 1	2	$5.375020e^{-79}$	0.567143290433274	$3.643107e^{-07}$
Algorithm 2	2	$3.844494e^{-174}$	0.567143290433274	$2.855810e^{-10}$

ตารางที่ 5 ตารางการเปรียบเทียบวิธีการทำซ้ำ

Method	N	$ f(x_{n+1}) $	x_{n+1}	$\sigma = x_{n+1} - x_n $
$f_5(x) = x^3 - 10, x_0 = 0.5$				
MHM	4	$4.922706e^{-19}$	2.1544346900318837	$2.732126e^{-04}$
MGJM 1	3	$2.129060e^{-18}$	2.1544346900318837	$1.663953e^{-03}$
MGJM 2	3	$2.129060e^{-18}$	2.1544346900318837	$1.663953e^{-03}$
CHUN	7	$8.359120e^{-29}$	2.1544346900318837	$2.078572e^{-06}$
Algorithm 1	3	$1.000000e^{-99}$	2.1544346900318837	$3.321123e^{-12}$
Algorithm 2	2	$5.585450e^{-23}$	2.1544346900318837	$1.254603e^{-01}$

ตารางที่ 6 ตารางการเปรียบเทียบวิธีการทำซ้ำ

Method	N	$ f(x_{n+1}) $	x_{n+1}	$\sigma = x_{n+1} - x_n $
$f_6(x) = \cos(x) - x, x_0 = 2.5$				
MHM	3	$1.154792e^{-54}$	0.739085133215160	$4.595974e^{-11}$
MGJM 1	2	$8.918884e^{-21}$	0.739085133215160	$3.794720e^{-03}$
MGJM 2	2	$1.374491e^{-18}$	0.739085133215160	$3.794720e^{-03}$
CHUN	3	$5.423640e^{-53}$	0.739085133215160	$7.261660e^{-11}$
Algorithm 1	2	$7.676020e^{-84}$	0.739085133215160	$4.298833e^{-07}$
Algorithm 2	2	$1.000000e^{-100}$	0.739085133215160	$4.469656e^{-10}$

ตารางที่ 7 ตารางการเปรียบเทียบวิธีการทำซ้ำ

Method	N	$ f(x_{n+1}) $	x_{n+1}	$\sigma = x_{n+1} - x_n $
$f_7(x) = \tan^{-1}(x) + x, x_0 = 2$				
MHM	3	$1.556811e^{-66}$	0.0000000000000000	$6.000887e^{-10}$
MGJM 1	2	$2.674407e^{-21}$	0.0000000000000000	$8.437184e^{-03}$
MGJM 2	2	$2.674410e^{-21}$	0.0000000000000000	$8.437184e^{-03}$
CHUN	3	$3.349411e^{-79}$	0.0000000000000000	$8.928067e^{-12}$
Algorithm 1	2	$2.160250e^{-188}$	0.0000000000000000	$2.001933e^{-07}$
Algorithm 2	2	$2.412406e^{-196}$	0.0000000000000000	$1.000938e^{-7}$

อภิปรายผล

การวิจัยครั้งนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับลำดับการลู่เข้าอันดับที่หกของสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งผู้วิจัยได้พัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลข 2 วิธี โดยแต่ละวิธีมีขั้นตอนการทำซ้ำ 3 ขั้นตอน ซึ่งได้พัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลข 2 วิธีมาจากวิธีของ Obadah -Chebyshev เพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นมาใหม่ ผู้วิจัยสรุปจากตารางที่ 1-7 ได้ว่า ตาราง 1 มีระเบียบวิธีที่ 1 ที่มีจำนวนรอบการทำซ้ำที่ต่ำกว่าระเบียบวิธีที่ 2 และ ตารางที่ 2,3,4,5,6 และ 7 มีระเบียบวิธีที่ 1 และระเบียบวิธีที่ 2 ที่มีจำนวนรอบมากกว่าหรือเท่ากับระเบียบวิธีที่ 1 แต่ระเบียบวิธีที่ 2 มีขนาดที่เล็กกว่าจึงมีประสิทธิภาพที่ดีกว่าระเบียบวิธีที่ 1 และเมื่อนำระเบียบวิธีที่ 1 และระเบียบวิธีที่ 2 มาเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีต่างๆของ Halley (MHM), Golbabai - Javidi (MGJM1), Golbabai - Javidi (MGJM2) และ Changbum Chun - Beny Neta (CHUN) จะเห็นได้ชัดเจนว่าจำนวนรอบการทำซ้ำของระเบียบวิธีที่เราพัฒนาขึ้นมาใหม่นั้นมีประสิทธิภาพที่ดีกว่า

สรุปผล

บทความนี้ได้นำเสนอระเบียบวิธีเชิงตัวเลข 2 วิธี โดยแต่ละระเบียบวิธี มีขั้นตอนการทำซ้ำ 3 ขั้นตอน ซึ่งได้พัฒนาแนวคิดมาจากวิธีการของ Obadah -Chebyshev สำหรับสมการไม่เชิงเส้น ที่มีลำดับการลู่เข้าอันดับที่หก ซึ่งได้ใช้ตัวอย่างเชิงตัวเลขในการทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีที่เราได้นำเสนอกับบุคคลอื่นๆ ที่มีลำดับการลู่เข้าที่เท่ากัน และพบว่าระเบียบวิธีที่เราได้นำเสนอนั้น มีจำนวนรอบของการทำซ้ำที่น้อยกว่า ซึ่งแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นมาใหม่ทั้ง 2 วิธี ระเบียบวิธีใหม่ที่เราพัฒนานี้ถือได้ว่าเป็นทางเลือกที่มีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีอื่นๆ เมื่อเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีในประเภทเดียวกัน

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ ที่สนับสนุนด้านสิ่งอำนวยความสะดวก นอกจากนี้ขอขอบคุณ อาจารย์เฉลิมวุฒิ คำเมือง ที่คอยให้คำปรึกษา และให้ความรู้เกี่ยวกับงานวิจัย

เอกสารอ้างอิง

- Basto, M., Semiao, V., & Calheiros, F. L. (2006). A new iterative method to compute nonlinear equation. *Applied Mathematics and Computation*, 173(1), 468–483.
- Chun, C., & Neta, B. (2012). A new sixth-order scheme for nonlinear equations. *Applied Mathematics Letters*, 25(2), 185-189.
- Golbabai, A., & Javidi, M. (2007). A third-order Newton type method for nonlinear equations based on modified homotopy perturbation method. *Applied Mathematics and Computation*, 191(1), 199–205.
- He, J. H. (1999). Homotopy perturbation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178(4), 257–262.
- Imran, M., & Deswita, L. (2016). A sixth-order derivative-free iterative method for solving nonlinear equations. *Bulletin of Mathematics*, 8(1), 1–8.

- Kong-ied, B. (2021). Two new eighth and twelfth order iterative methods for solving nonlinear equations. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 16(1), 333-344.
- Naseem, A., Rehman, M. A., & Abdeljawad, T. (2020). Numerical algorithms for finding zeros of nonlinear equations and their dynamical aspects. *Journal of Mathematics*, 2020, 1-11. <https://doi.org/10.1155/2020>
- Noor, M. A., Khan, W. A., & Hussain, A. (2007). A new modified Halley method without second derivatives for nonlinear equation Applied. *Mathematics and Computation*, 189(2), 1268–1273.
- Noor, M. A., Noor, K. I., & Aftab, K. (2012). Some New Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations. *World Applied Sciences Journal*, 20(6), 870-874.
- Ostrowski, A. M. (1966). *Solution of Equations and Systems of Equations* (2nd ed.). Academic Press. Cambridge, MA, USA.
- Traub, J. F. (1982). *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Chelsea Publishing company. New York, NY, USA.