

Academic Article

การแจกแจงเบ้ปกติ กรณีสองตัวแปรเดียว

The Univariate Skew-Normal Distribution

พรทิศา ทิวทัศน์^{1*}

Phontita Thiuthad^{1*}

¹หน่วยวิจัยสถิติและการประยุกต์ สาขาวิชาวิทยาศาสตร์การคำนวณ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ อ.หาดใหญ่ จ.
สงขลา 90110 ประเทศไทย

¹Statistics and Applications Research Unit, Division of Computational Science, Faculty of Science, Prince of Songkla University,
Hat Yai, Songkhla 90110, Thailand

*E-mail: phontita.t@psu.ac.th

Received: 19/03/2021; Revised: 06/07/2021; Accepted: 17/08/2021

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการแจกแจงเบ้ปกติ (skew-normal distribution) ซึ่งเป็นการแจกแจงรูปทั่วไปของการแจกแจงปกติ (normal distribution) โดยได้รวบรวมสมบัติเฉพาะที่สำคัญและการประยุกต์ของการแจกแจงไว้ อีกทั้งยังได้เสนอการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงไว้ด้วย

คำสำคัญ: การแจกแจงเบ้ปกติ, การแจกแจงปกติ, ความเบ้, ตัวประมาณวิธีของโมเมนต์

Abstract

In this article, the skew-normal distribution is introduced which includes the normal distribution as a special case. Many characterization properties and applications of this distribution are summarized. The estimation of a skew-normal distribution parameter is also presented.

Keywords: skew-normal distribution, normal distribution, skewness, method of moments estimator

บทนำ

การแจกแจงปกติ (normal distribution) หรือที่มีชื่อเรียกที่เป็นที่รู้จักกันดีอีก 2 ชื่อ คือ การแจกแจงแบบเกาส์เซียน (Gaussian distribution) และกราฟระฆังคว่ำ (bell curve) เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่นิยมใช้กันมากที่สุด และนำมาประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางทางสถิติ (Thavaraputta, 2014) แม้ว่าจะมีการแจกแจงอื่นที่มีลักษณะเป็นรูประฆังคว่ำ เช่น การแจกแจงโคชี (Cauchy distribution) การแจกแจงที (t-distribution) การแจกแจงลอจิสติก (logistic distribution) ก็ตาม แต่เหตุผลสำคัญที่การแจกแจงปกติเป็นที่นิยมใช้กัน เนื่องจากการแจกแจงค่าตัวอย่างอย่างง่ายของการประมาณค่าพารามิเตอร์และการประยุกต์ใช้ของทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง (central limit theorem)

ในหลาย ๆ สถานการณ์ที่การแจกแจงปกติไม่สามารถประยุกต์ใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ตัวอย่างเช่น ปัญหาทางวิศวกรรม โดยเฉพาะความเชื่อถือได้ (reliability) และปัญหาการทดสอบอายุการใช้งาน (life testing problems) ซึ่งโดยทั่วไปค่าของข้อมูลหรือค่าสังเกตจะไม่เป็นลบ และแนวโน้มของการแจกแจงมีลักษณะเบ้ขวา ข้อมูลลักษณะนี้ การแจกแจงปกติไม่สามารถประยุกต์ใช้ได้เหมาะสม การแจกแจงเบ้ขวาที่เป็นที่รู้จักกันดี ได้แก่ การแจกแจงไวบูล (Weibull distribution) แจกแจงแกมมา (gamma distribution) และการแจกแจงลอจิกนอร์มัล (log-normal distribution) มีประสิทธิภาพมากกว่าการแจกแจงปกติในการศึกษาความเชื่อถือได้และปัญหาการทดสอบอายุการใช้งาน อย่างไรก็ตาม การแจกแจงเบ้ขวาที่กล่าวมายังมีข้อจำกัดในตัวเอง เช่น จำกัดแค่เพียงค่าสังเกตที่เป็นค่าบวก และไม่สามารถประยุกต์ใช้ได้หากข้อมูลมีลักษณะเบ้ซ้าย ดังนั้นการแจกแจงที่สามารถนิยามค่าสังเกตบนเส้นจำนวนจริงได้ทั้งค่าที่เป็นบวกและลบ และยังสามารถรองรับข้อมูลที่มีลักษณะเบ้ขวาหรือเบ้ซ้ายได้ด้วย คือ **การแจกแจงเบ้ปกติ (skew-normal distribution; SND)** ซึ่งมีความเหมาะสมและเป็นการแจกแจงที่สามารถครอบคลุมลักษณะของข้อมูลได้ดีกว่า

การแจกแจงเบ้ปกติ เป็นการแจกแจงรูปทั่วไปของการแจกแจงปกติ กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ การแจกแจงปกติเป็นกรณีเฉพาะของการแจกแจงเบ้ปกตินั่นเอง ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีการแจกแจงเบ้ปกติ ที่มีพารามิเตอร์บ่งตำแหน่ง μ (location parameter) พารามิเตอร์บ่งขนาด σ (scale parameter) และพารามิเตอร์บ่งรูปร่าง λ (shape parameter) หรือเขียนแทนด้วย $X \sim SND(\mu, \sigma, \lambda)$ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (probability density function; pdf) ของ X (Azzalini, 1985) คือ

$$f(x) = (2/\sigma)\phi((x-\mu)/\sigma)\Phi(\lambda((x-\mu)/\sigma)), \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

สำหรับ $-\infty < \mu < \infty$, $-\infty < \lambda < \infty$, และ $\sigma > 0$ โดยที่ ϕ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นปกติมาตรฐาน (standard normal pdf) และ Φ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมปกติมาตรฐาน (standard normal cumulatively distribution function; standard normal cdf) โดยที่

$$\phi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (2)$$

และ

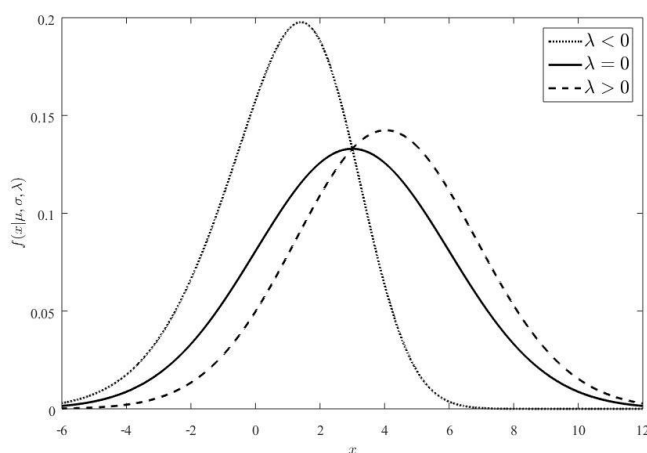
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t)dt \quad (3)$$

สมการ (1) ได้มาจากรูปแบบทั่วไปของฟังก์ชันความหนาแน่น (Azzalini, 2014)

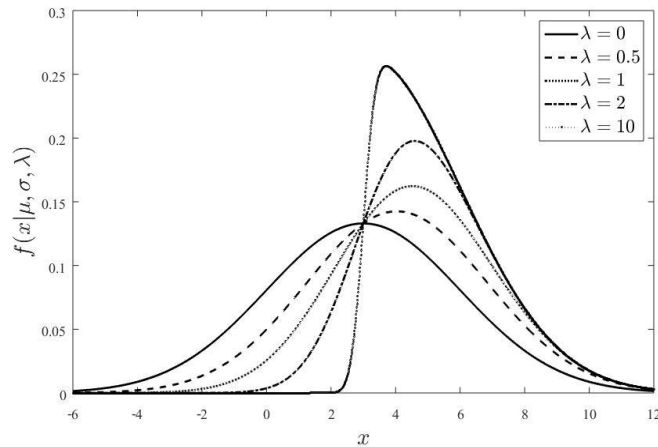
$$f(z) = 2f_0(z)G_0(\lambda z) \quad (4)$$

สำหรับ $z = (x - \mu)/\sigma$ โดยที่ f_0 เป็นฟังก์ชันสมมาตรรอบ 0 และ G_0 เป็นฟังก์ชันการแจกแจงต่อเนื่องที่สอดคล้องกับเงื่อนไขความสมมาตร $G_0(x) + G_0(-x) = 1$ สำหรับทุกค่า x ซึ่งสมการ (1) เป็นกรณีเมื่อ $f_0 = \phi$ และ $G_0 = \Phi$

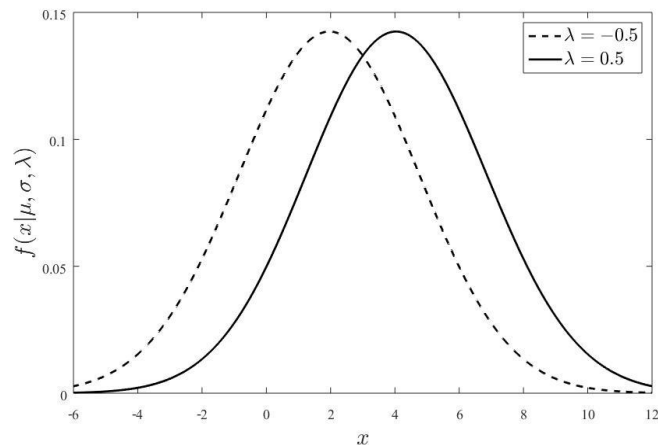
จากสมการ (1) จะเห็นว่า λ เป็นพารามิเตอร์ที่ควบคุมลักษณะรูปร่างของการแจกแจง ซึ่งทำให้การแจกแจงเบ้ปรกติมีความยืดหยุ่นมากกว่าการแจกแจงปรกติ เมื่อ $\lambda = 0$ เป็นกรณีของการแจกแจงปรกติ เมื่อ $\lambda > 0$ เป็นกรณีของการแจกแจงเบ้ขวา (positively skewed distribution) และเมื่อ $\lambda < 0$ เป็นกรณีของการแจกแจงเบ้ซ้าย (negatively skewed distribution) ดังรูปที่ 1 เมื่อค่าของ $|\lambda|$ เพิ่มขึ้น ความเบ้ของการแจกแจงก็จะเพิ่มขึ้น ดังรูปที่ 2 และเมื่อเครื่องหมายของ λ เปลี่ยน กราฟแสดงฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจง จะสมมาตรที่ด้านตรงข้ามตามแนวแกนตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 1 กราฟแสดงลักษณะการกระจายของการแจกแจงเบ้ปรกติ กรณี $\mu = 3$ และ $\sigma = 3$
เมื่อ λ มีค่าเป็นลบ ศูนย์ และบวก



รูปที่ 2 กราฟแสดงลักษณะการกระจายของการแจกแจงเบ้ปกติ กรณี $\mu=3$ และ $\sigma=3$ เมื่อเพิ่มความเบ้หรือขนาดของ λ



รูปที่ 3 กราฟแสดงความสมมาตรของการแจกแจงเบ้ปกติ กรณี $\mu=3$ และ $\sigma=3$ เมื่อเครื่องหมายของ λ เปลี่ยน

การแจกแจงเบ้ปกติ ได้ปรากฏเป็นครั้งแรกในปี ค. ศ. 1966 ในบทความวิจัยของ Roberts (Roberts, 1966) และต่อมาในงานของนักวิจัยอีกหลาย ๆ คน เช่น งานวิจัยของ O'Hagan และ Leonard (O'Hagan & Leonard, 1976) และ Aigner และ Lovell (Aigner & Lovell, 1977) แต่ชื่อการแจกแจงเบ้ปกติและสมการ (1) ได้ถูกทำให้เป็นที่รู้จักโดย Azzalini (Azzalini, 1985) ซึ่ง Azzalini ได้ศึกษาและรวบรวมเกี่ยวกับสมบัติเฉพาะของการแจกแจงเบ้ปกติไว้มากมาย

สมบัติเฉพาะที่สำคัญของการแจกแจงเบ้ปรกติ

1. X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีการแจกแจงเบ้ปรกติที่มีพารามิเตอร์ μ, σ และ λ ($X \sim SND(\mu, \sigma, \lambda)$) ก็ต่อเมื่อ $Z = (X - \mu)/\sigma$ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีการแจกแจงเบ้ปรกติที่มี $\mu = 0$ และ $\sigma = 1$ ($Z \sim SND(0, 1, \lambda)$) ซึ่งเรียกว่า การแจกแจงเบ้ปรกติมาตรฐาน (standard skew-normal distribution; SSND)
2. ถ้า $X \sim SND(\mu, \sigma, \lambda)$ แล้ว $-X \sim SND(-\mu, \sigma, -\lambda)$
3. ถ้า $\lambda \rightarrow \pm\infty$ แล้วการแจกแจงเบ้ปรกติมาตรฐาน ($SND(0, 1, \lambda)$) จะเข้าสู่การแจกแจงฮาล์ฟนอร์มัล (half-normal distribution) นั่นคือ การแจกแจงของ $\pm|U|$ โดยที่ $U \sim N(0, 1)$ (ดูรูปที่ 2 ประกอบ)
4. $Z^2 = (X - \mu)^2/\sigma^2$ มีการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาเสรีเท่ากับ 1 ($Z^2 \sim \chi_1^2$) สำหรับ $X \sim SND(\mu, \sigma, \lambda)$
5. การแทนค่าเพิ่มเติม (additive representation)

ถ้า U และ V มีการแจกแจงปรกติมาตรฐานและเป็นอิสระต่อกัน ($U, V \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1)$) แล้ว

$$\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}|U| + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}V \right) \sim SND(0, 1, \lambda) \quad (5)$$

สมบัตินี้ใช้ในการสร้างข้อมูลที่มีแจกแจงเบ้ปรกติ (SND) ในการศึกษาด้วยการจำลอง (simulation study) หรือใช้ซอฟต์แวร์ช่วยจัดการ สามารถติดตั้งชุดคำสั่ง sn ในโปรแกรม R ได้ที่ <http://cran.r-project.org/package=sn>

6. ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบ้ปรกติ คือ

$$M(t) = 2\psi(t)\Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\sigma t\right) \quad (6)$$

โดยที่ $\psi(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$ ซึ่งคือ ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปรกตินั่นเอง

7. ถ้า U และ V มีการแจกแจงปรกติมาตรฐานและเป็นอิสระต่อกัน ($U, V \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1)$) แล้วการแจกแจงมีเงื่อนไข (conditional distribution) ของตัวแปรสุ่ม U กำหนด $V < \lambda U$ คือ

$$(U|V < \lambda U) \sim SND(0, 1, \lambda) \quad (7)$$

8. ให้ $X \sim SND(\mu, \sigma, \lambda)$ จะได้ว่า โมเมนต์อันดับ 1 ของ X คือ

$$E(X) = \mu + \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \right) \quad (8)$$

โมเมนต์อันดับ 2 ของ X คือ

$$E(X - E(X))^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right) \right) \quad (9)$$

โมเมนต์อันดับ 3 ของ X คือ

$$E(X - E(X))^3 = \sigma^3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \right)^3 \quad (10)$$

9. ถ้า $U \sim N(0,1)$ เป็นอิสระต่อ $Z \sim SND(0,1,\lambda)$ แล้ว

$$\left(\frac{aU + bZ}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \sim SND \left(0, 1, \frac{b\lambda}{\sqrt{a^2(1+\lambda^2) + b^2}} \right) \quad (11)$$

สำหรับทุกจำนวนจริง a และ b

10. เมทริกซ์สารสนเทศของฟิชเชอร์ (Fisher's information matrix) สำหรับพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า μ σ และ λ

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1+\lambda^2 a_0}{\sigma^2} & \frac{b\lambda(1+2\lambda^2)}{\sigma^2(1+\lambda^2)^{3/2}} + \frac{\lambda^2 a_1}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma} \left(\frac{b}{(1+\lambda^2)^{3/2}} - \lambda a_1 \right) \\ \frac{b\lambda(1+2\lambda^2)}{\sigma^2(1+\lambda^2)^{3/2}} + \frac{\lambda^2 a_1}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma^2} (1+\lambda^2 a_2) & -\frac{\lambda a_2}{\sigma} \\ \frac{1}{\sigma} \left(\frac{b}{(1+\lambda^2)^{3/2}} - \lambda a_1 \right) & -\frac{\lambda a_2}{\sigma} & a_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

โดยที่ $b = \sqrt{2/\pi}$, $a_k = E \left(Z^k \left(\frac{\phi(\lambda Z)}{\Phi(\lambda Z)} \right)^2 \right)$ เมื่อ $Z = \left(\frac{(X-\mu)}{\sigma} \right) \sim SND(0,1,\lambda)$ และ

$k = 0, 1, 2$

เมทริกซ์สสารสนเทศของพีชเชอร์สำหรับพารามิเตอร์ทั้งสามของการแจกแจงนี้ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix) ที่ $\lambda = 0$ (Azzalini, 1985; Chiogna, 1998; Pewsey, 2000) และ $\lambda = \pm 3.5191$ (Thiuthad & Pal, 2019)

11. เกล็ดลักษณะสำหรับการแจกแจงเบ้ปกติ (Pal et al., 2008) ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนเซตของจำนวนจริง โดยที่ $g(u)\phi(u) \rightarrow 0$ เมื่อ $u \rightarrow \pm\infty$ แล้ว

$$E((X - \mu)g(X)|X \sim SND(\mu, \sigma, \lambda)) = \sigma^2 E(g'(X)|X \sim SND(\mu, \sigma, \lambda)) + \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \right) E\left(g(X_0) \middle| X_0 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{1 + \lambda^2}\right)\right) \quad (13)$$

สำหรับสมบัติอื่น ๆ สามารถอ่านเพิ่มเติมได้ในงานวิจัยของ Henze (Henze, 1986) Arnold และ Lin (Arnold & Lin, 2004) Gupta, Nguyen และ Sanqui (Gupta et al., 2004) Azzalini (Azzalini, 2005)

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเบ้ปกติ

งานวิจัยเกี่ยวกับการแจกแจงเบ้ปกติที่พบส่วนใหญ่ เป็นงานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติของการแจกแจง มีงานวิจัยไม่มากนักที่ศึกษาเกี่ยวกับการอนุมานทางสถิติ ซึ่งส่วนใหญ่จะกล่าวถึงการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเบ้ปกติ และพิจารณาในกรณีที่ขนาดของตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ซึ่งไม่สามารถประยุกต์ใช้เมื่อตัวอย่างมีขนาดกลางหรือเล็กได้ ทั้งนี้เนื่องจากเมื่อเทียบการแจกแจงเบ้ปกติกับการแจกแจงอื่น ๆ ที่เป็นที่ยอมรับแล้ว การอนุมานบนพารามิเตอร์ของการแจกแจงนี้ กระทำได้ไม่ง่าย สืบเนื่องจากความซับซ้อนของการแจกแจงค่าตัวอย่าง (sampling distribution) และความซับซ้อนในการคำนวณ

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเบ้ปกติในกรณีทั่วไปจึงเป็นปัญหาที่ท้าทาย นักวิจัยส่วนใหญ่เพ่งความสนใจไปที่การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ เนื่องจากถือว่ามีความสำคัญมากที่สุดในบรรดาพารามิเตอร์ทั้งสามตัว อย่างไรก็ตาม ในหัวข้อนี้เราจะนำเสนอการประมาณค่าแบบจุดสำหรับพารามิเตอร์ทั้งสาม ซึ่งสัมพันธ์กันด้วยวิธีของโมเมนต์ (method of moments)

ตัวประมาณวิธีของโมเมนต์ (method of moments estimator; MME)

กำหนดให้ $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} SND(\mu, \sigma, \lambda)$ เราใช้โมเมนต์ของตัวอย่างแทนโมเมนต์ของประชากรเพื่อใช้สร้างตัวประมาณค่าที่ต้องการได้ดังนี้

โมเมนต์อันดับ 1

$$\mu + \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i := m_1 \quad (14)$$

โมเมนต์อันดับ 2

$$\sigma^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \right) \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 := m_2 \quad (15)$$

โมเมนต์อันดับ 3

$$\sigma^3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \right)^3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3 := m_3 \quad (16)$$

หมายเหตุ เนื่องจากค่าต่าง ๆ ของนิพจน์ทางด้านซ้ายของสมการ (16) มีค่าเป็นบวก ยกเว้นค่าของ λ ที่สามารถเป็นค่าบวกหรือค่าลบก็ได้ ดังนั้นตัวประมาณวิธีของโมเมนต์สำหรับพารามิเตอร์ λ จะมีค่าเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับค่าของ m_3 นั่นคือ มีเครื่องหมายเดียวกับค่าของ m_3 นั่นเอง

บทแทรก 1 (Thiuthad & Pal, 2019) ให้ $X \sim SND(\mu, \sigma, \lambda)$ และสัมประสิทธิ์ความเบ้ (coefficient of skewness)

$$\beta = \frac{E(X - E(X))^3}{[E(X - E(X))^2]^{3/2}} \quad \text{จะได้ว่า } |\beta| \leq \frac{\sqrt{2}(4 - \pi)}{(\pi - 2)^{3/2}} = 0.995271746...$$

ส่วนตัวประมาณวิธีของโมเมนต์สำหรับพารามิเตอร์ μ σ และ λ หาได้จากการแก้สมการ (14)–(16) โดยที่ตัวประมาณวิธีของโมเมนต์สำหรับพารามิเตอร์ λ จะสามารถหาค่าได้เมื่อสมการ

$$|\hat{\beta}| = \left| \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \right| < 0.995271746... \quad (17)$$

เป็นจริง ดังนั้นตัวประมาณวิธีของโมเมนต์สำหรับพารามิเตอร์ μ σ และ λ คือ

$$\hat{\mu} = m_1 - \hat{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\hat{\lambda}}{\sqrt{1 + \hat{\lambda}^2}} \right) \quad \text{เมื่อสมการ (17) เป็นจริง} \quad (18)$$

$$\hat{\mu} = m_1 - \hat{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{เมื่อสมการ (17) ไม่เป็นจริง} \quad (19)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{m_2}{\left\{ \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{\hat{\lambda}^2}{1 + \hat{\lambda}^2}\right) \right\}}} \quad \text{เมื่อสมการ (17) เป็นจริง} \quad (20)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{m_2}{\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)}} \quad \text{เมื่อสมการ (17) ไม่เป็นจริง} \quad (21)$$

เมื่อ $\hat{\lambda}$ เป็นคำตอบของสมการ

$$\frac{1 + \hat{\lambda}^2}{\hat{\lambda}^2} = \frac{2}{\pi} + \left\{ \frac{2}{\pi} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right)^2 \frac{m_2^3}{m_3^2} \right\}^{1/3} \quad (22)$$

โดย $\hat{\lambda}$ มีเครื่องหมายเดียวกับเครื่องหมายของ m_3 และจะหาค่าได้เมื่อสมการ (17) เป็นจริง และในกรณีที่สมการ (17) ไม่เป็นจริง ค่าประมาณของ λ จะเท่ากับ $\pm\infty$ ซึ่งการแจกแจงเบ้ปกติจะเข้าสู่การแจกแจงฮาล์ฟนอร์มัล ตามที่ได้กล่าวไว้ในสมบัติเฉพาะข้อ 3. ของการแจกแจงเบ้ปกติ กรณีที่ $\lambda \rightarrow \pm\infty$

ส่วนในการประมาณค่าด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood method) ถ้าทุกค่าสังเกตมีค่ามากกว่า μ และ $\lambda > 0$ แล้วฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (likelihood function)

$$L(\mu, \sigma, \lambda | x) = \prod_{i=1}^n (2/\sigma) \phi((x_i - \mu)/\sigma) \Phi(\lambda((x_i - \mu)/\sigma)) \quad (23)$$

เป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างต่อเนื่อง (monotonically increasing function) บน λ ซึ่งทำให้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด MLE สำหรับพารามิเตอร์ λ มีค่าเป็น ∞ ซึ่งหาค่าไม่ได้ และในทำนองเดียวกัน เมื่อทุกค่าสังเกตมีค่าน้อยกว่า μ แล้วตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด MLE สำหรับพารามิเตอร์ λ จะมีค่าเป็น $-\infty$ ซึ่งหาค่าไม่ได้เช่นกัน หรือแม้ว่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด MLE สำหรับพารามิเตอร์ λ ของการแจกแจงเบ้ปกตินี้จะหาค่าได้ก็ตาม แต่ก็ไม่มีรูปแบบปิด (closed-form expression) ซึ่งทำให้การได้มาของการแจกแจงค่าตัวอย่างเป็นไปได้ยาก อีกทั้งความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (standard error) และช่วงความเชื่อมั่นสำหรับตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ MLE ก็มีความซับซ้อนและเป็นไปได้ยากในการคำนวณ (Liseo & Loperfido, 2006) ด้วยเหตุที่กล่าวมานี้ การใช้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด MLE อาจไม่ใช่ทางเลือกที่ดี มีงานวิจัยที่ใช้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด MLE เป็นตัวประมาณแบบจุดสำหรับพารามิเตอร์ λ เช่น ในงานของ Gupta และ Brown (Gupta & Brown, 2001) ได้ศึกษา

ข้อมูล IQ ด้วยการแจกแจงเบ้ปกติมาตรฐาน และใช้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด MLE ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ λ แต่ไม่ได้อธิบายไว้อย่างชัดเจนว่า ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด MLE ได้มาอย่างไร

อย่างไรก็ตาม แม้ว่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของการแจกแจงนี้ จะไม่มีรูปแบบปิด แต่ก็ยังสามารถหาตัวประมาณได้ด้วยวิธีอื่น เช่น ในงานวิจัยของ Gui และ Guo (Gui & Guo, 2018) ใช้วิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) ในการหาตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดโดยประมาณ (approximated maximum likelihood estimator; AMLE) สำหรับพารามิเตอร์ μ และ σ โดยใช้การกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) ในการประมาณ และการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งสองตัวนี้จะขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ λ ซึ่งหากพารามิเตอร์ λ ไม่ทราบค่า สามารถประมาณได้ด้วยตัวประมาณที่ Gui และ Guo ได้เสนอไว้ นั่นคือ ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นแบบโปรไฟล์สูงสุด (maximum profile likelihood estimator) และต่อมาในปี ค.ศ. 2019 Thiuthad และ Pal (Thiuthad & Pal, 2019) ได้เสนอฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นแบบพินอลไลซ์ (penalized likelihood function) และได้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นแบบพินอลไลซ์สูงสุด (maximum penalized likelihood estimator; MPLE) สำหรับประมาณค่าพารามิเตอร์ μ กรณีไม่ทราบค่า σ และ λ ทั้งยังได้เปรียบเทียบกับตัวประมาณวิธีของโมเมนต์ (method of moments estimator) อีกด้วย

ในบริบทของการอนุมานแบบเบย์ส์ (Bayesian inference) การแจกแจงเบ้ปกติปรากฏขึ้นเมื่อค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ มีการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อน (prior distribution) ด้วยค่าเฉลี่ยที่มีการแจกแจงที่ได้จากการตัดทอนของการแจกแจงปกติ ซึ่งสัมพันธ์กับสมบัติเฉพาะของการแจกแจงเบ้ปกติในข้อ 5. การแทนค่าเพิ่มเติม (additive representation) ที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น

การประยุกต์ของการแจกแจงเบ้ปกติ

ในการประยุกต์กับข้อมูลจริง มีข้อสังเกตว่า การประยุกต์ใช้อย่างไม่จำกัดของการแจกแจงปกติเพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ อาจทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความคลาดเคลื่อนได้ ในงานวิจัยของ Gupta และ Brown (Gupta & Brown, 2001) มีการวิเคราะห์ข้อมูลของ Roberts (Roberts, 1988) ซึ่งเป็นคะแนน IQ ของชายผิวขาว (whites) 87 คน และชายผิวไม่ขาว (non-whites) 52 คน หากประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยการแจกแจงปกติ จะส่งผลให้คะแนน IQ เฉลี่ยสูงเกินไป ดังนั้นการประยุกต์ใช้การแจกแจงเบ้ปกติมาตรฐาน นั่นคือ เมื่อ $\mu = 0$ และ $\sigma = 1$ และพัฒนาตัวประมาณค่าที่มีความเหมาะสมเพื่อศึกษาความเชื่อถือได้ของแบบจำลอง strength-stress ซึ่งตัวแปรที่เกี่ยวข้องมีการแจกแจงเบ้ปกติ จึงมีความเหมาะสมและประมาณค่าได้มีประสิทธิภาพมากกว่า ต่อมา Figueiredo และ Gomes (Figueiredo & Gomes, 2013) ใช้การแจกแจงเบ้ปกติสร้างแบบจำลองและใช้ในการตรวจสอบข้อมูล ซึ่งเป็นข้อมูลจริงในกระบวนการผลิตลูกไม้ก๊อก ในปี ค.ศ. 2014 Ngunkeng และ Ning (Ngunkeng & Ning, 2014) ได้เสนอวิธีการทางข้อมูล (information approach) ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ทั้งสามของการแจกแจงเบ้ปกติ และได้ใช้วิธีการดังกล่าวศึกษาวิเคราะห์ข้อมูลตลาดหุ้นของประเทศบราซิลและจีน

สรุป

การแจกแจงเบ้ปรกติมีความยืดหยุ่นมากกว่าการแจกแจงปรกติและไม่จำกัดแค่บนค่าสังเกตที่เป็นบวก เหมือนกับการแจกแจงเบ้ลักษณะอื่น ๆ ที่เป็นที่ยอมรับโดยทั่วไป ดังนั้นการศึกษาข้อมูลที่มีความหลากหลายหรือมีความเหมาะสมกับการแจกแจงเบ้ปรกตินั้น อาจใช้การแจกแจงเบ้ปรกติช่วยในการสร้างแบบจำลองหรือประมาณค่าพารามิเตอร์ได้แต่อย่างไรก็ตาม ในบทความนี้นำเสนอสมบัติเฉพาะที่สำคัญและการประมาณค่าของการแจกแจงเบ้ปรกติไว้เท่านั้น และการอนุมานทางสถิติเกี่ยวกับพารามิเตอร์ของการแจกแจงนี้ กระทำได้ไม่มากนัก ตามที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น เนื่องจากความซับซ้อนของการแจกแจงค่าตัวอย่างและความซับซ้อนของการคำนวณ อีกทั้งการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ของการแจกแจงเบ้ปรกตินั้น ยังเป็นเรื่องที่นักวิจัยยังต้องทำการศึกษาต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์จิต คุรงค์แสง ที่กรุณาพิสูจน์อักษร และขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านสำหรับข้อคิดเห็นและคำแนะนำในการปรับปรุงต้นฉบับบทความให้มีความสมบูรณ์ครบถ้วน

เอกสารอ้างอิง

- Aigner, D., Lovell, C. K., & Schmidt, P. (1977). Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of econometrics*, 6(1), 21-37.
- Arnold, B. C., & Lin, G. D. (2004). Characterizations of the skew-normal and generalized chi distributions. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, 593-606.
- Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian journal of statistics*, 171-178.
- Azzalini, A. (2005). The skew-normal distribution and related multivariate families. *Scandinavian journal of statistics*, 32(2), 159-188.
- Azzalini, A. (2014). *Skew-Normal Family of Distributions*. Wiley Statistics Reference Online, John Wiley & Sons.
- Chiogna, M. (1998). Some Result on the Scalar Skew-Normal Distribution. *Journal of the Italian Statistical Society*, 7, 1-13.
- Figueiredo, F., & Gomes, M. I. (2013). The Skew-Normal Distribution in SPC. *REVS-TAT – Statistical Journal*, 11, 83-104.
- Gui, W., & Guo, L. (2018). Statistical Inference for the Location and Scale Parameters of the Skew Normal Distribution. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 49(4), 633-650.

- Gupta, A. K., Nguyen, T. T., & Sanqui, J. T. (2004). Characterization of the Skew-Normal Distribution. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 56, 351-360.
- Gupta, R. C., & Brown, N. (2001). Reliability Studies of the Skew Normal Distribution and Its Application to a Strength-Stress Model. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 11, 2427-2445.
- Henze, N. (1986). A Probabilistic Representation of the Skew-Normal Distribution. *Scandinavian Journal of Statistics*, 13, 271-275.
- Liseo, B., & Loperfido, N. (2006). A Note on Reference Priors for the Scalar Skew-Normal Distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 136, 373-389.
- Ngunkeng, G., & Ning, W. (2014). Information Approach for the Change-Point Detection in the Skew Normal Distribution and Its Applications. *Sequential Analysis*, 33, 475-490.
- O'Hagan, A., & Leonard, T. (1976). Bayes Estimation Subject to Uncertainty about Parameter Constraints. *Biometrika*, 63, 201-202.
- Pal, N., Chang, C. H., & Lin, J. J. (2008). An Identity for the Skew-Normal Distribution. *Journal of Applied Probability & Statistics*, 2(3), 305-309.
- Pewsey, A. (2000). Problem of Inference for Azzalini's Skew-Normal Distribution. *Journal of Applied Statistics*, 7(27), 859-870.
- Roberts, C. (1966). A Correlation Model Useful in the Study of Twins. *Journal of the American Statistical Association*, 61, 1184-1190.
- Roberts, H. V. (1988). *Data Analysis for Managers with Minitab*. Scientific Press, Redwood City.
- Thavaraputta, S. (2014). History of the Normal Curve. *Thammasat Journal of History*, 1(1), 59-105.
<https://doi.org/10.14456/thammasat-history.2014.2>
- Thiuthad, P., & Pal, N. (2019). Point Estimation of the Location Parameter of a Skew-Normal Distribution: Some Fixed Sample and Asymptotic Results. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 13(37), 1-27.