

Research Article

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมสำหรับตรวจจับ การเปลี่ยนแปลงที่เพิ่มขึ้นของค่าเฉลี่ยในกระบวนการปัวซอง

Efficiency comparison of control charts for monitoring a positive mean shift in Poisson process

อัจฉริยา แสนเกียง¹ และ สวพร หิณชรนันท์^{1*}

Autchariya Saenkaing¹ and Sawaporn Hinsharanan^{1*}

¹ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร พิษณุโลก 65000 ประเทศไทย

¹ Department of Mathematics, Faculty of Science, Naresuan University, Phitsanulok 65000, Thailand

*E-mail: sawaporns@nu.ac.th

Received: 02/08/2020; Revised: 23/01/2021; Accepted: 10/03/2021

บทคัดย่อ

แผนภูมิควบคุมสำหรับคุณลักษณะเป็นเครื่องมือทางสถิติที่นิยมใช้ในการตรวจสอบจำนวนรอยตำหนิในกระบวนการผลิต ซึ่งเป็นข้อมูลจำนวนนับและมีการแจกแจงปัวซอง ในการศึกษาครั้งนี้ผู้วิจัยเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิ PCUSUM แผนภูมิ PEWMA แผนภูมิ ISRT c EWMA และแผนภูมิ PPM ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นของกระบวนการที่มีการแจกแจงปัวซอง ค่าสถิติของแผนภูมิถูกปรับให้เหมาะสมสำหรับตรวจจับการเปลี่ยนแปลงที่เพิ่มขึ้น ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมโดยใช้เกณฑ์ค่าความยาววิ่งเฉลี่ยเมื่อกระบวนการอยู่นอกเหนือการควบคุม (ARL_1) ค่าที่สุด ผลการศึกษาพบว่า ประสิทธิภาพในการตรวจจับขึ้นอยู่กับขนาดการเปลี่ยนแปลงในกระบวนการ แผนภูมิ PCUSUM มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กเมื่อค่าเฉลี่ยกระบวนการมีค่าน้อย แผนภูมิ PPM มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กถึงปานกลางได้ดีกว่าแผนภูมิชนิดอื่น แผนภูมิ PEWMA และ ISRT c EWMA เมื่อ $\lambda = 0.1$ มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ได้ดีกว่าแผนภูมิชนิดอื่น

คำสำคัญ: แผนภูมิควบคุม การแจกแจงปัวซอง การเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้น

Abstract

Attribute control chart is a common statistical tool used to monitor number of defects or nonconformities in a manufacturing process. The nonconformities are count data and are Poisson distributed. In this study we compared the performance of PCUSUM, PEWMA, ISRT c EWMA and PPM charts for detecting a positive mean shift in Poisson process. The plotting statistics were adjusted for monitoring a positive shift. The performances of control charts were comparing by using the minimum the average run length when the process was out of control (ARL_1) criterion. The results revealed that the detection performances depend on the shift size in the process. The PCUSUM chart performed well to detect a small shift when process average was low. The PPM chart outperformed the others for detecting small to moderate shifts. The PEWMA and ISRT c EWMA, when $\lambda = 0.1$, performed better than the others for detecting large shifts.

Keywords : control chart, Poisson distribution, positive mean shift

บทนำ

แผนภูมิควบคุม (control chart) เป็นเครื่องมือทางสถิติที่ใช้ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับด้านต่างๆ เช่น งานด้านอุตสาหกรรมในการควบคุมกระบวนการผลิต งานด้านสาธารณสุขในการเฝ้าระวังการเกิดของโรค หรืองานด้านธุรกิจ/การเงินในการเฝ้าระวังการเปลี่ยนแปลง/ผันผวนของข้อมูลทางธุรกิจ เป็นต้น แผนภูมิควบคุมแบ่งออกเป็น 2 ประเภทตามลักษณะข้อมูลที่ใช้คือ แผนภูมิควบคุมสำหรับตัวแปร (variable control chart) สำหรับควบคุมกระบวนการของข้อมูลเชิงปริมาณ เช่น ค่าเฉลี่ย น้ำหนัก หรือปริมาตรของสินค้า เป็นต้น และแผนภูมิควบคุมสำหรับคุณลักษณะ (attribute control chart) สำหรับควบคุมกระบวนการของข้อมูลเชิงคุณภาพ เช่น จำนวนของเสีย หรือจำนวนรอยตำหนิที่พบบนตัวสินค้า ซึ่งข้อมูลจำนวนของเสียหรือจำนวนรอยตำหนิเป็นข้อมูลที่ผู้ผลิตให้ความสำคัญเนื่องจากส่งผลกระทบต่อคุณภาพของสินค้าบริการ ดังนั้นจึงมีการนำแผนภูมิควบคุมสำหรับคุณลักษณะประเภทต่าง ๆ มาใช้ในการตรวจสอบและควบคุมกระบวนการผลิตให้ได้มาตรฐานตามที่กำหนด แผนภูมิควบคุมคุณลักษณะที่นิยมใช้ได้แก่ แผนภูมิควบคุมสัดส่วนของเสีย (p control chart) แผนภูมิควบคุมจำนวนของเสีย (np control chart) และแผนภูมิควบคุมจำนวนรอยตำหนิ (c control chart)

แผนภูมิควบคุมจำนวนรอยตำหนิ (แผนภูมิ c) เป็นแผนภูมิที่ใช้ในการควบคุมจำนวนรอยตำหนิที่เกิดขึ้นในกระบวนการผลิต ซึ่งลักษณะข้อมูลสามารถอธิบายด้วยการแจกแจงแบบปัวซอง อย่างไรก็ตามแผนภูมิ c เป็นแผนภูมิในกลุ่มของแผนภูมิควบคุมชีวฮาร์ท (Shewhart control charts) มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ได้ดีกว่าการเปลี่ยนแปลงที่มีขนาดเล็ก (Montgomery, 2013) แผนภูมิควบคุมสำหรับกระบวนการที่มีการแจกแจงปัวซองถูกพัฒนาอย่างต่อเนื่อง แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (Cumulative sum control chart : แผนภูมิ

CUSUM) ซึ่งมีความสามารถในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กได้ดี ถูกนำมาใช้ในการพัฒนาแผนภูมิควบคุมสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงปัวซองในหลายงานวิจัยด้วยกัน เช่น Lucas (1985) และ (White et al., 1997) ได้พัฒนาแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมสำหรับสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงปัวซอง (Poisson cumulative sum control chart : แผนภูมิ PCUSUM) ซึ่งผลการศึกษพบว่า แผนภูมิ PCUSUM มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิ c

นอกจากนี้แผนภูมิ CUSUM แล้ว แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอกซ์โพเนนเชียล (exponentially weighted moving average control chart : แผนภูมิ EWMA) ซึ่งเป็นแผนภูมิที่สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กได้ดีเช่นกัน ถูกนำมาใช้ในการพัฒนาแผนภูมิควบคุมเพื่อตรวจจับการเปลี่ยนแปลงในกระบวนการที่มีการแจกแจงปัวซองในหลายงานวิจัย เช่น Gan (1990) ได้พัฒนาแผนภูมิควบคุมจำนวนรอยตำหนิที่ใช้สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงปัวซอง โดยนำค่าสถิติที่ได้จากแผนภูมิ EWMA มาปรับให้เป็นจำนวนเต็ม อย่างไรก็ตามการปัดค่าสถิตินี้ทำให้สูญเสียสารสนเทศของข้อมูลไปด้วย Borror et al. (1998) ได้เสนอแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอกซ์โพเนนเชียลสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงปัวซอง (Poisson exponentially weighted moving average control chart : แผนภูมิ PEWMA) ซึ่งพบว่ามีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิ c และ Zhang et al. (2003) ได้เสนอแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอกซ์โพเนนเชียลสองครั้งสำหรับกระบวนการที่มีการแจกแจงปัวซอง (Poisson double exponentially weighted moving average control chart : แผนภูมิ PDEWMA) นอกจากนี้ Khoo et al. (2008) ได้พัฒนาแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้ง (double moving average control chart : แผนภูมิ DMA) ซึ่งผลการศึกษพบว่ามีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กได้ดี

แผนภูมิควบคุมส่วนใหญ่ถูกพัฒนาขึ้นภายใต้ข้อสมมติเบื้องต้นว่าข้อมูลในกระบวนการต้องมีการแจกแจงปกติ ดังนั้นเพื่อให้สามารถนำแผนภูมิควบคุมไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลที่มีการแจกแจงปัวซองได้ จึงมีการนำเทคนิคการแปลงข้อมูล (data transformation) มาใช้ในการพัฒนาแผนภูมิควบคุมโดยแปลงข้อมูลที่มีการแจกแจงทวินามหรือการแจกแจงปัวซองด้วยรากที่สอง (square root transformation) เพื่อแก้ปัญหของการใช้แผนภูมิควบคุมแบบดั้งเดิม (traditional control chart) ที่สร้างภายใต้ข้อสมมติว่าข้อมูลในกระบวนการต้องมีการแจกแจงปกติ เช่น Tsai et al. (2006) ได้ปรับแผนภูมิควบคุมจำนวนรอยตำหนิ (แผนภูมิ c) โดยแปลงข้อมูลด้วยรากที่สอง และเรียกแผนภูมิที่ปรับใหม่ว่าแผนภูมิ ISRT c (improved square root transformation c chart) Sukparungsee & Mititelu (2016) ได้พัฒนาแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอกซ์โพเนนเชียลโดยใช้การแปลงข้อมูลด้วยรากที่สองสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงปัวซอง (Poisson exponentially weighted moving average based on improved square root transformation chart : แผนภูมิ ISRT c EWMA) ซึ่งผลการศึกษพบว่า แผนภูมิ ISRT c EWMA มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กได้ดีกว่าแผนภูมิ EWMA และแผนภูมิ c นอกจากการแปลงข้อมูลแล้ว Abbasi (2017) ได้เสนอแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักปัวซอง สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงปัวซอง (Poisson progressive mean control chart : แผนภูมิ PPM) โดยใช้ค่าสถิติของแผนภูมิควบคุมจากค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก (progressive

mean) ผลการศึกษาเมื่อเปรียบเทียบกับแผนภูมิ c แผนภูมิ PCUSUM แผนภูมิ PEWMA และแผนภูมิ DPEWMA พบว่า ส่วนใหญ่แผนภูมิ PPM มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงได้ดีกว่าแผนภูมิชนิดอื่น

แผนภูมิควบคุมสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงปึงซงถูกพัฒนาขึ้นมากมาย และมีการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมโดยใช้การจำลองภายใต้สถานการณ์ต่างๆ โดยส่วนใหญ่จะประเมินจากความสามารถหรือความเร็วในการตรวจจับการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของค่าเฉลี่ยของกระบวนการ อย่างไรก็ตามหากพิจารณาถึงข้อมูลจำนวนรอยตำหนิที่พบ จะเห็นได้ว่าการเพิ่มขึ้นของค่าเฉลี่ยกระบวนการจะส่งผลเสียต่อคุณภาพสินค้ามากกว่าการลดลงของค่าเฉลี่ยของกระบวนการ ดังนั้นการใช้แผนภูมิเพื่อควบคุมการเพิ่มขึ้นของค่าเฉลี่ยของกระบวนการผลิตจึงจำเป็นต้องมีการปรับแก้ให้เหมาะสม เพื่อให้สามารถนำแผนภูมิควบคุมไปประยุกต์ใช้ในการตรวจจับการเพิ่มขึ้นของค่าเฉลี่ยในกระบวนการที่จะก่อให้เกิดความเสียหายรุนแรง เช่น ในด้านอุตสาหกรรมการผลิตสินค้าต่างๆ ที่มีความเสี่ยงสูงหากผลิตสินค้าไม่ได้หรือเกินกว่าที่มาตรฐานกำหนด หรือด้านสาธารณสุขในการเฝ้าระวังการระบาดของโรคอุบัติใหม่ในกรณีที่จำนวนผู้ป่วยที่เพิ่มมากขึ้นอย่างผิดปกติ เป็นต้น

จากที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะเปรียบเทียบประสิทธิภาพแผนภูมิควบคุมในการตรวจจับการเพิ่มขึ้นของค่าเฉลี่ยของกระบวนการที่มีการแจกแจงปึงซง โดยแผนภูมิควบคุมที่นำมาศึกษา คือ แผนภูมิ PCUSUM แผนภูมิ PEWMA แผนภูมิ ISRT c EWMA และแผนภูมิ PPM โดยมีการปรับค่าสถิติของแผนภูมิดังกล่าวให้เหมาะสมสำหรับแผนภูมิควบคุมข้างเดียวด้านบน (upper one-sided control chart) เพื่อใช้ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้น ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมโดยใช้การจำลองมอนติคาร์โล และใช้ค่าความยาววิ่งเฉลี่ยเมื่อกระบวนการอยู่นอกเหนือการควบคุม (out of control average run length : ARL_1) เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ

วิธีการทดลอง

1. ลักษณะข้อมูลในกระบวนการ

- กำหนดให้ X_t แทน จำนวนรอยตำหนิที่พบในชุดข้อมูล ณ เวลา t ซึ่งมีการแจกแจงปึงซงด้วยพารามิเตอร์ μ

- เมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม

กำหนดให้ μ_0 แทน ค่าเฉลี่ยของกระบวนการเมื่ออยู่ภายใต้การควบคุม และ

$$\sigma \text{ แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกระบวนการ โดยที่ } \sigma = \sqrt{\mu_0}$$

ในการวิจัยนี้กำหนดให้ μ_0 เท่ากับ 3, 5, 8, 10, 12 และ 15

- เมื่อกระบวนการอยู่นอกเหนือการควบคุม

กำหนดให้ μ_1 แทน ค่าเฉลี่ยของกระบวนการเมื่ออยู่นอกเหนือการควบคุม โดยที่ $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$

δ แทน ขนาดการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยในกระบวนการ เท่ากับ 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9

- กำหนดค่าความยาววิ่งเฉลี่ยเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม (in control average run length: ARL₀) เท่ากับ 200

2. ประเภทของแผนภูมิควบคุม

- แผนภูมิ PCUSUM

Lucus (1985) ได้เสนอแผนภูมิ PCUSUM เพื่อใช้ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นของกระบวนการที่มีการแจกแจงปัวซอง คำนวณค่าสถิติข้างเดียวด้านบนของแผนภูมิ PCUSUM (upper one-sided PCUSUM statistic) ได้จาก

$$C_t^+ = \max(0, X_t - k + X_{t-1}) \quad (1)$$

เมื่อ C_t^+ แทน ค่าสถิติข้างเดียวด้านบนของแผนภูมิ PCUSUM ณ เวลา t และกำหนด $C_0^+ = 0$

X_t แทน จำนวนรอยตำหนิที่พบในกระบวนการ ณ เวลา t

k แทน ค่าอ้างอิง (reference value) คำนวณได้จาก

$$k = (\mu_1 - \mu_0) / (\ln \mu_1 - \ln \mu_0) \quad (2)$$

กำหนดให้ h แทน ขีดจำกัดควบคุมบนของแผนภูมิ PCUSUM โดยจะเลือกค่า h ที่เหมาะสมเพื่อให้ได้ค่า ARL₀ เท่ากับ 200 ถ้าค่า C_t^+ มากกว่าค่า h ที่กำหนด แสดงว่ากระบวนการผลิตอยู่นอกเหนือการควบคุม (Lucus, 1985)

- แผนภูมิ PEWMA

Borror et al. (1998) ได้เสนอแผนภูมิ PEWMA สำหรับตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยในกระบวนการที่มีการแจกแจงปัวซอง โดยมีค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม คือ

$$Z_t = \lambda X_t + (1 - \lambda)Z_{t-1} \quad (3)$$

เมื่อ Z_t แทน ค่าสถิติของแผนภูมิ PEWMA ณ เวลา t และกำหนด $Z_0 = \mu_0$

λ แทน ค่าถ่วงน้ำหนัก ($0 < \lambda \leq 1$) ในที่นี้กำหนด $\lambda = 0.1$ และ 0.2

เนื่องจากการศึกษานี้สนใจการตรวจจับการเพิ่มขึ้นของค่าเฉลี่ยกระบวนการ จึงทำการปรับค่าสถิติที่ใช้ในแผนภูมิ โดยกำหนดให้ Z_t^+ แทน ค่าสถิติข้างเดียวด้านบนของแผนภูมิ PEWMA (upper one-sided PEWMA statistic) ณ เวลา t ทำการเปรียบเทียบค่าสถิติ Z_t กับค่าเฉลี่ยของกระบวนการเมื่ออยู่ภายใต้การควบคุม (μ_0) ถ้า $Z_t > \mu_0$ แล้ว $Z_t^+ = Z_t$ ในทางกลับกัน ถ้า $Z_t < \mu_0$ จะปรับให้ค่าสถิติ Z_t^+ มีค่าเท่ากับ μ_0 ดังสมการ

$$Z_t^+ = \max(\mu_0, Z_t) \quad (4)$$

(Morais & Pacheco, 2001) และคำนวณขีดจำกัดควบคุมบนของแผนภูมิ PEWMA (UCL_{PEWMA}) ได้จาก

$$UCL_{PEWMA} = \mu_0 + L\sqrt{\frac{\lambda\mu_0}{2-\lambda}} \quad (5)$$

เมื่อ L แทน ค่าความกว้างของขีดกำหนดควบคุม ซึ่งให้ค่า $ARL_0 = 200$

ถ้าค่าสถิติ Z_t^+ มีค่ามากกว่าค่าขีดจำกัดควบคุมบน แสดงว่ากระบวนการอยู่นอกเหนือการควบคุม

(Borror et al., 1998)

- แผนภูมิ ISRT c EWMA

Sukparungsee & Mititelu (2016) ได้เสนอแผนภูมิ ISRT c EWMA ซึ่งเป็นแผนภูมิที่พัฒนาจากแผนภูมิ EWMA และแผนภูมิ ISRT c ทำการแปลงข้อมูลที่มีการแจกแจงปัวซองโดยใช้รากที่สอง ได้ค่าสถิติสำหรับแผนภูมิ ISRT c EWMA ดังนี้

$$S_t = \lambda\sqrt{X_t} + (1-\lambda)S_{t-1} \quad (6)$$

เมื่อ S_t แทน ค่าสถิติของแผนภูมิ ISRT c EWMA ณ เวลา t และกำหนด $S_0 = \sqrt{\mu_0}$

λ แทน ค่าถ่วงน้ำหนัก ($0 < \lambda \leq 1$) ในที่นี้กำหนด $\lambda = 0.1$ และ 0.2

จากนั้นปรับค่าสถิติของแผนภูมิให้เหมาะสมสำหรับตรวจจับการเปลี่ยนแปลงที่เพิ่มขึ้น โดยกำหนดให้ S_t^+ แทน ค่าสถิติข้างเดียวด้านบนของแผนภูมิ ISRT c EWMA (upper one-sided ISRT c EWMA statistic) ณ เวลา t ทำการเปรียบเทียบค่าสถิติ S_t กับรากที่สองของค่าเฉลี่ยของกระบวนการเมื่ออยู่ภายใต้การควบคุม ($\sqrt{\mu_0}$) ถ้า $S_t > \sqrt{\mu_0}$ แล้ว $S_t^+ = S_t$ ในทางกลับกัน ถ้า $S_t < \sqrt{\mu_0}$ จะปรับให้ค่าสถิติ S_t^+ มีค่าเท่ากับ $\sqrt{\mu_0}$ ดังสมการ

$$S_t^+ = \max(\sqrt{\mu_0}, S_t) \quad (7)$$

และคำนวณค่าขีดจำกัดควบคุมบนของแผนภูมิ ISRT c EWMA ($UCL_{ISRT\ c\ EWMA}$) ได้จาก

$$UCL_{ISRT\ c\ EWMA} = \sqrt{\mu_0} + H\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{c}}\right)\sqrt{\frac{\lambda\mu_0}{2-\lambda}} \quad (8)$$

เมื่อ H แทน ค่าความกว้างของขีดกำหนดควบคุม ซึ่งให้ค่า $ARL_0 = 200$

ถ้าค่าสถิติ S_t^+ มากกว่าค่า $UCL_{ISRT\ c\ EWMA}$ แสดงว่ากระบวนการอยู่นอกเหนือการควบคุม

(Sukparungsee & Mititelu, 2016)

- แผนภูมิ PPM

Abbasi (2017) ได้เสนอแผนภูมิ PPM สำหรับตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่มีการแจกแจงปัวซอง โดยใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในอดีตจนถึงเวลาปัจจุบัน (progressive mean) เป็นค่าสถิติของแผนภูมิ ดังนี้

$$PM_t = \frac{\sum_{t=1}^t X_t}{t} \quad (9)$$

เมื่อ PM_t แทน ค่าสถิติของแผนภูมิ PPM ณ เวลา t และกำหนด $PM_1 = X_1$
โดยมีค่าเฉลี่ย $E(PM_t) = \mu_0$ และความแปรปรวน $V(PM_t) = \frac{\mu_0}{t}$ (Abbasi, 2017)

จากนั้นปรับค่าสถิติของแผนภูมิ โดยกำหนดให้ PM_t^+ แทน ค่าสถิติข้างเดียวด้านบนของแผนภูมิ PPM (upper one-sided PPM statistic) ณ เวลา t เปรียบเทียบค่าสถิติ PM_t กับค่าเฉลี่ยของกระบวนการเมื่ออยู่ภายใต้การควบคุม (μ_0) ถ้า $PM_t > \mu_0$ แล้ว $PM_t^+ = PM_t$ ในทางกลับกัน ถ้า $PM_t < \mu_0$ จะปรับให้ค่าสถิติ PM_t^+ มีค่าเท่ากับ μ_0 ดังสมการ

$$PM_t^+ = \max(\mu_0, PM_t) \quad (10)$$

และคำนวณค่าขีดจำกัดควบคุมบนของแผนภูมิ PPM (UCL_{PPM}) ได้จาก

$$UCL_{PPM} = \mu_0 + L_P \frac{1}{f(t)} \sqrt{\frac{\mu_0}{t}} \quad (11)$$

เมื่อ L_P แทน ค่าความกว้างของขีดจำกัดควบคุม ซึ่งให้ค่า $ARL_0 = 200$

$f(t)$ แทน ฟังก์ชันของ t (arbitrary function) ใช้เพื่อปรับขีดจำกัดควบคุมไม่ให้กว้างเกินไปในกรณีที่มีค่ามาก ในการวิจัยนี้กำหนด $f(t) = t^{0.1}$ (Abbasi et al., 2013; Abbasi, 2017)

ถ้าค่าสถิติ PM_t^+ มากกว่าค่า UCL_{PPM} แสดงว่ากระบวนการอยู่นอกเหนือการควบคุม

เกณฑ์ในการเปรียบเทียบ

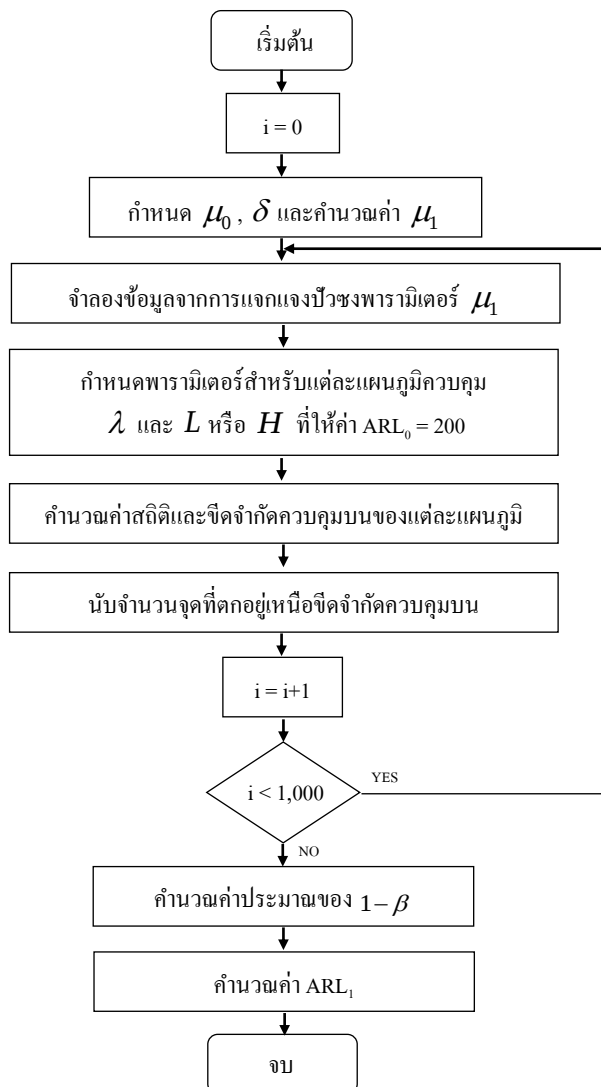
การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมในการตรวจจับค่าเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้น พิจารณาจากค่าความยาววิ่งเฉลี่ยเมื่อกระบวนการอยู่นอกเหนือการควบคุม (out of control average run length: ARL_1) คำนวณได้จาก

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} \quad (12)$$

เมื่อ β คือ ความผิดพลาดแบบที่ 2 (type II error) ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นที่จะยอมรับว่ากระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม เมื่อค่าเฉลี่ยของกระบวนการได้เปลี่ยนแปลงไป และ $1 - \beta$ คือ ความน่าจะเป็นที่พบว่ากระบวนการอยู่นอกเหนือการควบคุม เมื่อค่าเฉลี่ยของกระบวนการได้เปลี่ยนแปลงไป โดยแผนภูมิที่มีประสิทธิภาพที่ดี สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงได้รวดเร็ว จะให้ค่า ARL_1 ที่ต่ำ

ขั้นตอนวิธีการจำลอง

ในงานวิจัยนี้ใช้การจำลองมอนติคาร์โล (Monte Carlo simulation) เพื่อศึกษาประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม ขั้นตอนวิธีการจำลองมอนติคาร์โลแสดงดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 แผนผังการดำเนินงานแสดงขั้นตอนวิธีการจำลองมอนติคาร์โล

ผลการทดลอง

ผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมในการตรวจจับการเพิ่มขึ้นของค่าเฉลี่ยของกระบวนการที่มีการแจกแจงปัวซองนำเสนอในรูปแบบตาราง โดยกำหนดให้

PCUSUM	แทน แผนภูมิ PCUSUM
PEWMA1	แทน แผนภูมิ PEWMA เมื่อกำหนด $\lambda = 0.1$
PEWMA2	แทน แผนภูมิ PEWMA เมื่อกำหนด $\lambda = 0.2$
ISRT c EWMA1	แทน แผนภูมิ ISRT c EWMA เมื่อกำหนด $\lambda = 0.1$
ISRT c EWMA2	แทน แผนภูมิ ISRT c EWMA เมื่อกำหนด $\lambda = 0.2$
PPM	แทน แผนภูมิ PPM

ตารางที่ 1 ค่าความยาววิ่งเฉลี่ยของแต่ละแผนภูมิควบคุมเมื่อค่าเฉลี่ย μ_0 เท่ากับ 3, 5 และ 8

μ_0	δ	PCUSUM	PEWMA1	PEWMA2	ISRT c EWMA1	ISRT c EWMA2	PPM
3	0	200.20	199.96	200.44	200.36	200.00	200.36
	0.01	162.13	173.85	169.46	172.24	179.18	162.84
	0.05	111.16	106.27	119.33	99.23	122.94	72.36
	0.1	29.18	58.47	77.65	52.60	77.82	29.01
	0.3	3.65	8.73	18.85	6.81	16.66	3.16
	0.5	1.69	2.42	6.49	1.73	5.29	1.54
	0.7	1.30	1.00	2.84	1.00	2.32	1.25
	0.9	1.17	1.00	1.71	1.00	1.00	1.15
5	0	200.20	200.28	200.08	200.64	200.04	200.36
	0.01	156.76	176.21	182.08	174.86	181.59	161.21
	0.05	68.70	105.08	127.98	100.95	121.79	70.49
	0.1	28.58	58.31	82.75	53.67	78.93	28.50
	0.3	3.57	8.62	19.74	7.14	17.04	3.09
	0.5	1.67	2.38	6.52	1.83	5.28	1.51
	0.7	1.29	1.00	2.85	1.00	2.36	1.24
	0.9	1.16	1.00	1.62	1.00	1.00	1.14
8	0	200.88	200.04	200.08	200.08	199.521	199.84
	0.01	161.03	175.22	183.39	175.25	182.02	161.60

μ_0	δ	PCUSUM	PEWMA1	PEWMA2	ISRT c EWMA1	ISRT c EWMA2	PPM
	0.05	70.08	106.99	129.20	102.68	125.93	71.84
	0.1	28.83	58.46	84.28	55.24	80.23	28.82
	0.3	3.57	8.59	19.76	7.30	17.67	3.09
	0.5	1.76	2.23	6.33	1.89	5.55	1.51
	0.7	1.28	1.00	2.78	1.00	2.37	1.24
	0.9	1.16	1.00	1.61	1.00	1.00	1.14

ตารางที่ 2 ค่าความยาววิ่งเฉลี่ยของแต่ละแผนภูมิควบคุมเมื่อค่าเฉลี่ย μ_0 เท่ากับ 10, 12 และ 15

μ_0	δ	PCUSUM	PEWMA1	PEWMA2	ISRT c EWMA1	ISRT c EWMA2	PPM
10	0	200.16	200.16	200.36	199.76	200.76	200.12
	0.01	161.66	175.65	183.82	173.31	182.82	154.66
	0.05	73.44	105.33	131.20	101.85	127.19	69.46
	0.1	30.21	57.15	84.14	53.91	80.59	28.39
	0.3	3.52	8.13	19.29	7.06	17.20	3.01
	0.5	1.63	2.27	6.22	1.90	5.47	1.49
	0.7	1.27	1.00	2.76	1.00	2.40	1.23
	0.9	1.15	1.00	1.55	1.00	1.00	1.14
12	0	199.88	200.24	200.28	200.321	200.321	199.84
	0.01	159.24	176.90	182.22	174.16	182.55	158.60
	0.05	72.58	104.72	129.22	100.86	127.78	70.76
	0.1	31.23	58.51	86.53	55.08	83.23	29.43
	0.3	3.47	8.23	19.66	7.20	17.82	3.04
	0.5	1.62	2.24	6.31	1.88	5.62	1.50
	0.7	1.27	1.00	2.71	1.00	2.37	1.23
	0.9	1.15	1.00	1.53	1.00	1.00	1.14
15	0	200.32	200.16	200.24	200.08	200.08	200.12
	0.01	161.84	173.73	184.06	172.59	184.23	158.38
	0.05	73.85	105.26	131.41	102.68	128.21	68.58
	0.1	30.17	57.59	85.79	54.64	82.45	28.17

μ_0	δ	PCUSUM	PEWMA1	PEWMA2	ISRT c EWMA1	ISRT c EWMA2	PPM
	0.3	3.45	8.23	19.63	7.27	17.93	2.97
	0.5	1.63	2.24	6.29	1.92	5.65	1.49
	0.7	1.27	1.00	2.70	1.00	2.41	1.22
	0.9	1.15	1.00	1.55	1.00	1.00	1.13

ตารางที่ 3 ตารางสรุปประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมที่ให้ค่าความยาววิ่งเฉลี่ยต่ำที่สุดในแต่ละกรณี

δ	$\mu_0 = 3$	$\mu_0 = 5$	$\mu_0 = 8$	$\mu_0 = 10$	$\mu_0 = 12$	$\mu_0 = 15$
0.01	PCUSUM	PCUSUM	PCUSUM	PPM	PPM	PPM
0.05	PPM	PCUSUM	PCUSUM	PPM	PPM	PPM
0.1	PPM	PPM	PPM	PPM	PPM	PPM
0.3	PPM	PPM	PPM	PPM	PPM	PPM
0.5	PPM	PPM	PPM	PPM	PPM	PPM
0.7	PEWMA1	PEWMA1	PEWMA1	PEWMA1	PEWMA1	PEWMA1
	ISRT c EWMA1	ISRT c EWMA1	ISRT c EWMA1	ISRT c EWMA1	ISRT c EWMA1	ISRT c EWMA1
	PEWMA1	PEWMA1	PEWMA1	PEWMA1	PEWMA1	PEWMA1
0.9	ISRT c EWMA1	ISRT c EWMA1	ISRT c EWMA1	ISRT c EWMA1	ISRT c EWMA1	ISRT c EWMA1
	ISRT c EWMA2	ISRT c EWMA2	ISRT c EWMA2	ISRT c EWMA2	ISRT c EWMA2	ISRT c EWMA2

ค่าความยาววิ่งเฉลี่ยของแต่ละแผนภูมิควบคุมเมื่อค่าเฉลี่ยของกระบวนการเปลี่ยนแปลง (ARL_1) แสดงในตารางที่ 1 และตารางที่ 2 โดยแผนภูมิควบคุมให้ค่า ARL_1 ต่ำที่สุดในแต่ละกรณี จะถือว่าเป็นแผนภูมิที่มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเพิ่มขึ้นของค่าเฉลี่ยกระบวนการได้ดี ดังแสดงในตารางที่ 3

เมื่อค่าเฉลี่ยกระบวนการมีค่าน้อยถึงปานกลาง (μ_0 เท่ากับ 3, 5 และ 8) ในภาพรวมพบว่า แผนภูมิ PCUSUM และ แผนภูมิ PPM ให้ค่า ARL_1 ไม่แตกต่างกันมากนัก เมื่อพิจารณาขนาดการเปลี่ยนแปลงพบว่า แผนภูมิ PCUSUM มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก ($\delta = 0.01, 0.05$) ได้ดีกว่าแผนภูมิชนิดอื่น ในขณะที่แผนภูมิ PPM ตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดกลางได้ดี ($0.1 \leq \delta \leq 0.5$) แผนภูมิ PEWMA1 แผนภูมิ ISRT c EWMA1 และแผนภูมิ ISRT c EWMA2 มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ได้ดี โดย แผนภูมิ PEWMA1 และ แผนภูมิ ISRT c EWMA1 มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกัน

เมื่อค่าเฉลี่ยกระบวนการมีค่ามาก (μ_0 เท่ากับ 10, 12 และ 15) แผนภูมิ PPM ตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กถึงปานกลางกลางได้ดี ($0.01 \leq \delta \leq 0.5$) โดยให้ค่า ARL_1 ที่ต่ำกว่าทุกแผนภูมิ ในขณะที่แผนภูมิ PEWMA1 แผนภูมิ ISRT c EWMA1 และแผนภูมิ ISRT c EWMA2 มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ได้ดี โดย แผนภูมิ PEWMA1 และ แผนภูมิ ISRT c EWMA1 มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกันเมื่อ $\delta = 0.7$

และ และ แผนภูมิ ISRT c EWMA2 มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับแผนภูมิ PEWMA1 และ แผนภูมิ ISRT c EWMA1 เมื่อ $\delta = 0.9$

วิจารณ์ผลการทดลอง

เป็นที่ทราบกันว่าแผนภูมิ CUSUM และแผนภูมิ EWMA มีความสามารถในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กได้ดี ในงานวิจัยนี้พบว่า เมื่อค่าเฉลี่ยของกระบวนการมีค่าน้อย แผนภูมิ PCUSUM สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กได้ดีกว่าแผนภูมิชนิดอื่น เนื่องจากการบวกสะสมความต่างของค่าสังเกตกับค่าอ้างอิง ประกอบกับการปรับค่าสถิติของแผนภูมิให้เป็นค่าสถิติข้างเดียวด้านบน (upper one-sided statistics) ทำให้แผนภูมิมีความเชื่อถือผล และ สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กได้เร็วขึ้น อย่างไรก็ตาม แผนภูมิ PCUSUM มีประสิทธิภาพลดลงเมื่อค่าเฉลี่ยของกระบวนการมีค่ามากขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากแผนภูมิ PCUSUM ถูกพัฒนาขึ้นมาสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงปัวซองซึ่งปกติแล้วจะมีลักษณะการแจกแจงแบบเบ้ขวาเมื่อพารามิเตอร์มีค่าน้อย อย่างไรก็ตามเมื่อค่าเฉลี่ยของกระบวนการมีค่าเพิ่มมากขึ้น การแจกแจงของข้อมูลปัวซองจะมีลักษณะสมมาตรมากขึ้น ซึ่งส่งผลกระทบต่อประสิทธิภาพของแผนภูมิ PCUSUM (Hawkins & Olwell, 1998; Abujija, 2017)

เมื่อพิจารณาแผนภูมิในกลุ่มของแผนภูมิ EWMA พบว่า แผนภูมิ PEWMA และ แผนภูมิ ISRT c EWMA มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิ PCUSUM ทั้งนี้เนื่องจากในงานวิจัยนี้คำนวณขีดจำกัดควบคุมบนโดยใช้ความแปรปรวนเชิงเส้นจำกัด (asymptotic variance) แทนการใช้ความแปรปรวนแน่นอนตรง (exact variance) ทำให้ขีดจำกัดควบคุมบนมีค่าที่ตลอดการควบคุม ซึ่งอาจทำให้ไม่สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงในช่วงต้นของกระบวนการได้ ส่งผลให้ค่า ARL_1 ของแผนภูมิดังกล่าวสูงกว่าแผนภูมิชนิดอื่น และเมื่อพิจารณาค่าถ่วงน้ำหนัก (λ) พบว่า การกำหนดค่าถ่วงน้ำหนักมีผลต่อประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมโดย λ ที่มีค่าน้อยเหมาะสำหรับตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก (Lucas & Saccucci, 1990) ดังจะเห็นได้จาก แผนภูมิ PEWMA1 และ แผนภูมิ ISRT c EWMA1 ซึ่งกำหนด $\lambda = 0.1$ มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกัน และมีประสิทธิภาพดีกว่า แผนภูมิ PEWMA2 และ แผนภูมิ ISRT c EWMA2 ซึ่งกำหนด $\lambda = 0.2$

แผนภูมิ ISRT c EWMA มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ได้ดีกว่าแผนภูมิชนิดอื่น ทั้งนี้เนื่องจากแผนภูมิ ISRT c EWMA ถูกพัฒนามาจากแผนภูมิ c ซึ่งเป็นแผนภูมิในกลุ่มของแผนภูมิชิวฮาร์ต (Shewhart chart) ซึ่งสามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ได้ดี (Montgomery, 2013)

แผนภูมิ PPM ถูกพัฒนามาจากแผนภูมิ PM (progressive mean control chart) ซึ่งมีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กถึงปานกลางในกระบวนการที่มีการแจกแจงปกติได้ดี (Abbas et al., 2013) เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงปัวซองพบว่า แผนภูมิ PPM มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดปานกลางเมื่อค่าเฉลี่ยของกระบวนการมีค่าน้อยได้ดี และเมื่อค่าเฉลี่ยของกระบวนการมีค่าเพิ่มขึ้น แผนภูมิ PPM มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กถึงปานกลางได้ดี ทั้งนี้เนื่องจากลักษณะขีดจำกัดควบคุมบนของ

แผนภูมิ PPM ที่มีลักษณะแคบลงตามระยะเวลาที่ใช้ในการควบคุม ดังนั้นด้วยขีดจำกัดควบคุมที่แคบทำให้มีโอกาสตรวจจับความผิดปกติได้เร็วกว่าขีดจำกัดควบคุมที่กว้าง อย่างไรก็ตามขีดจำกัดควบคุมที่แคบเกินไปอาจทำให้เกิดปัญหาสัญญาณเตือนที่เป็นเท็จ (false alarm) ได้

สรุปผลการทดลอง

การศึกษาวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการที่มีการแจกแจงปัวซองเมื่อค่าเฉลี่ยของกระบวนการเพิ่มขึ้น (positive mean shift) แผนภูมิควบคุมที่นำมาศึกษา ได้แก่ แผนภูมิ PCUSUM แผนภูมิ PEWMA แผนภูมิ ISRT c EWMA และแผนภูมิ PPM โดยมีการปรับค่าสถิติให้เหมาะสมสำหรับการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้น เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิ คือ ค่าความยาววิ่งเฉลี่ยเมื่อกระบวนการอยู่นอกเหนือการควบคุม (ARL_1) โดยแผนภูมิที่มีประสิทธิภาพที่ดีจะให้ค่า ARL_1 ต่ำ ผลการศึกษาพบว่า แผนภูมิ PCUSUM มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กเมื่อค่าเฉลี่ยกระบวนการมีค่าน้อย แผนภูมิ PPM มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กถึงปานกลางได้ดี ส่วนแผนภูมิ PEWMA และ ISRT c EWMA เมื่อ $\lambda = 0.1$ มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ได้ดี

เอกสารอ้างอิง

- Abujiya, M. A. R. (2017). New cumulative sum control chart for monitoring Poisson processes. *IEEE Access*, 5, 14298-14308.
- Abbas, N., Zafar, R. F., Riaz, M., & Hussain, Z. (2013). Progressive mean control chart for monitoring process location parameter. *Quality and Reliability Engineering International*, 29, 357-367.
- Abbasi, S. A. (2017). Poisson progressive mean control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 33, 1855-1859.
- Borror, C. M., Champ, C. W., & Rigdon, S. E. (1988). Poisson EWMA control chart. *Journal of Quality and Technology*, 30(4), 352-361.
- Gan, F. F. (1990). Monitoring Poisson observations using modified exponentially weighted moving average control charts. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 19, 103-124.
- Hawkins, D. M., & Olwell, D. H. (1998). *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*. New York: Springer.
- Khoo, M. B. C., & Wong, V. H. (2008). A double moving average control chart. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 37, 1696-1708.

Lucas, J. M. (1985). Counted data CUSUM's. *Technometrics*, 27(2), 129-144.

Lucas, J. M., & Saccucci, M. S. (1990). Exponentially weighted moving average control schemes: Properties and enhancements. *Technometrics*, 32(1), 1-12.

Montgomery, D. C. (2013). *Introduction to statistical quality control*. New Jersey: John Wiley & Sons.

Morais, M. C., & Pacheco, A. (2001). Some stochastic properties of upper one-sided and EWMA charts for μ in the presence of shift in σ . *Sequential Analysis: Design Methods and Applications*, 20(1-2), 1-12.

Sukparungsee, S., & Mititelu, G. (2016). A modified Poisson exponentially weighted moving average chart based on improved square root transformation. *Thailand Statistician*, 14(2), 197-202.

Tsai, T. R., Lin, C. C., & Wu, S. J. (2006). Alternative attribute control charts based on improved square root transformation. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, 22(1), 61-72.

White, C. H., Keats, J. B., & Stanley, J. (1997). Poisson CUSUM vs c-chart for defect data. *Quality Engineering*, 9, 673-679.

Zhang, L., Govindaraju, K., Lai, C. D., & Bebbington, M. S. (2003). Poisson DEWMA control chart. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 32, 1265-1283.