The Journal of Applied Science
วารสารวิทยาศาสตร์ประยุกต์
ISSN 1513-7805 (Printed in Thailand)

Vol. 19 No. 2: 175-187 [2020]
doi:10.14416/j.appsci.2020.02.014
ISSN 2586-9663 (Online)

Academic Article

กระบวนการเพาเวอร์ลอว์และการประยุกต์ใช้กับระบบที่ซ่อมแซมได้

Power-law process and its applications on repairable systems

จุฬารัตน์ ชุมนวล [1]*

Jularat Chumnaul [1]*

[1]สาขาวิชาวิทยาศาสตร์การคำนวณ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ หาดใหญ่ สงขลา 90112

[1]Division of Computational Science, Faculty of Science, Prince of Songkla University, Hat Yai, Songkhla 90112

***E-mail**: Jularat.c@psu.ac.th

Received: 24/06/2020; Revised: 24/08/2020; Accepted: 14/09/2020

บทคัดย่อ

ระบบที่มีความซับซ้อนที่ใช้กันในปัจจุบันส่วนใหญ่ เช่น ระบบการสื่อสาร ระบบซอฟท์แวร์ เครื่องยนต์ของรถยนต์ เฮลิคอปเตอร์ เครื่องกำเนิดไฟฟ้าบนเครื่องบิน ฯลฯ ล้วนแล้วแต่เป็นระบบที่ซ่อมแซมได้ กล่าวคือ เมื่อระบบเกิดความขัดข้องหรือล้มเหลว ผู้ใช้สามารถที่จะทำการซ่อมแซมแล้วนำกลับมาใช้ซ้ำได้อีกโดยไม่จำเป็นต้องหาระบบใหม่มาทดแทน โดยทั่วไปแล้ว ก่อนที่ระบบที่ซ่อมแซมได้จะถูกนำไปใช้งานหรือถูกนำไปจำหน่ายให้กับลูกค้า ระบบจะต้องผ่านขั้นตอนการทดสอบในระยะที่เรียกว่า ระยะพัฒนาระบบ (development phase) เพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพและความเชื่อถือได้ ตลอดจนเพื่อแก้ปัญหาหรือข้อบกพร่องที่อาจเกิดจากการออกแบบในขั้นแรกที่ยังไม่สมบูรณ์ โดยการทดสอบระบบดังกล่าวจะส่งผลต่อการออกแบบครั้งสุดท้ายก่อนที่จะถูกนำออกไปจำหน่ายและความเชื่อถือได้ของระบบจะถูกนำมาใช้ในการกำหนดระยะเวลารับประกันสินค้า ในบทความนี้ จะกล่าวถึงแนวคิดพื้นฐานและการอนุมานทางสถิติเบื้องต้นสำหรับกระบวนการนอนฮอเมอจีเนียสปัวซงชนิดพิเศษที่เรียกว่า กระบวนการเพาเวอร์ลอว์ ซึ่งเป็นกระบวนการที่ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายในการศึกษาและวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ของระบบที่ซ่อมแซมได้ นอกจากนี้ ในบทความยังนำเสนอตัวอย่างการนำกระบวนการเพาเวอร์ลอว์หรือแบบจำลองเพาเวอร์ลอว์ไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงที่มาจากระบบที่ซ่อมแซมได้ โดยข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์คือเวลาการเกิดความล้มเหลวของเครื่องกำเนิดไฟฟ้าของเครื่องบิน และเวลาการเกิดความล้มเหลวของเครื่องปรับอากาศในเครื่องบินโบอิ้ง

คำสำคัญ: กระบวนการปัวซง, อัตราความล้มเหลว, กระบวนการไวบูล, ความเชื่อถือได้

Abstract

Most of the complex systems in use nowadays such as communication systems, software systems, automobile engines, helicopters, aircraft generators, etc., are repairable systems that can be repaired by replacing or repairing system components other than replacement of the entire system after failing. Before a repairable system is used or handed over to the customer, system testing is usually conducted in the development phase to explore all aspects of functionality and system reliability. Moreover, early prototypes will often contain design flaws when a system is in the development stage, so that system testing is performed to correct such problems and this will affect the final design. Also, system reliability obtained during the development phase is essential to establish a warranty period or determine a maintenance phase for repairable systems. In this paper, we consider the basic concepts and statistical inferences for the power-law process which is the special type of nonhomogeneous Poison process, and it is widely used in the study and analysis of the system reliability. In addition, this paper also presents applications of the power-law process on repairable systems using two real data sets, failure times of an aircraft generator, and failure times of the Boeing air-conditioning system.

Keywords: Poisson process, failure rate, Weibull process, reliability

บทนำ

ระบบต่างๆ ที่ใช้กันในปัจจุบันส่วนใหญ่ถูกจำแนกออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ คือ ระบบที่ใช้งานเพียงครั้งเดียวหรือระบบที่ไม่สามารถซ่อมแซมได้ (one-time system หรือ nonrepairable system) และระบบที่สามารถนำกลับมาใช้ซ้ำหรือระบบที่สามารถซ่อมแซมได้ (reusable system หรือ repairable system) ในบทความนี้ คำว่า “ระบบ” จะหมายรวมถึงส่วนประกอบ ชิ้นส่วน เครื่องมือ หรืออุปกรณ์ต่างๆ สำหรับระบบที่ไม่สามารถซ่อมแซมได้ในที่นี้ เช่น หลอดไฟ เมื่อใช้งานไปสักระยะเวลาหนึ่งหลอดไฟจะหมดอายุการใช้งานและไม่สามารถให้แสงสว่างได้ ผู้ใช้งานจำเป็นต้องเปลี่ยนหรือหาหลอดไฟใหม่มาทดแทน ไม่สามารถที่จะซ่อมแซมหลอดไฟหลอดเดิมได้ หรือแบตเตอรี่ถ่านไฟฉาย เมื่อแบตเตอรี่หมด ผู้ใช้งานจำเป็นต้องเปลี่ยนแบตเตอรี่ใหม่ ไม่สามารถซ่อมแซมแบตเตอรี่เดิมได้ เป็นต้น ส่วนระบบที่สามารถซ่อมแซมได้ในที่นี้ เช่น รถยนต์ เมื่อชิ้นส่วนหรืออุปกรณ์ส่วนหนึ่งส่วนใดเสีย ผู้ใช้งานเพียงซ่อมแซมหรือเปลี่ยนชิ้นส่วนหรืออุปกรณ์ชิ้นนั้น รถยนต์ก็สามารถกลับมาใช้งานได้ตามปกติโดยที่ไม่จำเป็นต้องซื้อรถยนต์คันใหม่ เป็นต้น จะเห็นได้ว่า ระบบที่ไม่สามารถซ่อมแซมได้จะเกิดความล้มเหลวได้เพียงหนึ่งครั้งเท่านั้น และการแจกแจงที่นิยมนำมาใช้ในการอธิบายอายุการใช้งานของระบบประเภทนี้ตั้งแต่เริ่มติดตั้งจนกระทั่งเกิดความล้มเหลว ได้แก่ การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (exponential distribution) การแจกแจงล็อกนอร์มัล (log-normal distribution) และการแจกแจงไวบูล (Weibull distribution) ในทางตรงกันข้าม ระบบที่สามารถ

 doi:10.14416/j.appsci.2020.02.014

ซ่อมแซมได้นั้น เมื่อระบบเกิดความล้มเหลวจะสามารถซ่อมแซมและถูกนำกลับไปใช้ซ้ำได้อีก ดังนั้น แบบจำลองที่ใช้ในการศึกษาอายุการใช้งานของระบบจึงต้องครอบคลุมลำดับของความล้มเหลวที่จะเกิดขึ้นซ้ำๆ ทั้งหมด และต้องสามารถสะท้อนให้เห็นการเปลี่ยนแปลงความเชื่อถือได้ (reliability) ของระบบ ณ เวลาที่แตกต่างกันอันเนื่องมาจากอายุการใช้งานที่มากขึ้นและการเสื่อมถอยของชิ้นส่วนต่างๆ ภายใน

คุณลักษณะหนึ่งที่ถูกนำมาใช้บ่อยในการศึกษาความเชื่อถือได้ของระบบที่ซ่อมแซมได้คือ จำนวนครั้งการเกิดความล้มเหลว ถ้าให้ $N(t)$ แทนจำนวนครั้งการเกิดความล้มเหลวของระบบที่ซ่อมแซมได้ในช่วงเวลา $[0,t]$ และให้ $t>s$ จะได้ว่า $N(t)-N(s)$ คือจำนวนครั้งการเกิดความล้มเหลวของระบบในช่วงเวลา $(s,t]$ การนับจำนวนความล้มเหลวดังกล่าวนี้อาศัยกระบวนการที่เรียกว่า กระบวนการนับ (counting process) ส่วนคุณลักษณะอีกอย่างหนึ่งที่นิยมนำมาใช้ในการศึกษาความเชื่อถือได้ของระบบที่ซ่อมแซมได้คือ เวลาที่ระบบเกิดความล้มเหลว เขียนแทนด้วย $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ ถ้าสมมติว่าระบบที่ซ่อมแซมได้สามารถกลับคืนสภาพเหมือนยังไม่เคยถูกใช้งานหรือคล้ายระบบใหม่หลังจากความล้มเหลวแต่ละครั้งได้รับการซ่อมแซม เราสามารถที่จะกล่าวได้ว่าเวลาระหว่างความล้มเหลวแต่ละครั้ง (time between failure) เป็นอิสระต่อกันและมีการแจกแจงแบบเดียวกัน ระบบที่มีคุณลักษณะเช่นนี้จะสอดคล้องกับข้อสมมติที่ว่าระบบถูกควบคุมโดยแบบจำลองภายใต้กระบวนการทำใหม่ (renewal process) แต่ถ้าสมมติว่าระบบที่ซ่อมแซมได้มีการเปลี่ยนแปลงความเชื่อถือได้ของระบบตลอดเวลาเมื่อมีอายุการใช้งานที่มากขึ้น ยกตัวอย่างเช่น ระบบที่ซ่อมแซมได้ที่อยู่ในระยะพัฒนาระบบ ในช่วงต้น ระบบมักจะมีข้อบกพร่องในการออกแบบ ดังนั้นในขั้นตอนของการทดสอบระบบในช่วงแรกจึงต้องมีการเปลี่ยนแปลงการออกแบบเพื่อแก้ไขปัญหาที่พบ ถ้าการพัฒนาระบบประสบความสำเร็จ เวลาระหว่างความล้มเหลวแต่ละครั้งควรมีแนวโน้มที่จะมากขึ้น และระบบที่มีลักษณะเช่นนี้จะถูกเรียกว่ามีการเติบโตของความเชื่อถือได้ (reliability growth) ในทางตรงกันข้าม ถ้าระบบที่ซ่อมแซมได้เกิดความชำรุดหรือเสื่อมสภาพ เมื่อระบบเกิดความล้มเหลวและได้รับการซ่อมแซมก็จะใช้งานได้เพียงไม่นานแล้วเกิดการล้มเหลวอีก ดังนั้น เวลาระหว่างความล้มเหลวแต่ละครั้งจะมีแนวโน้มที่สั้นขึ้นเมื่อระบบมีอายุการใช้งานที่มากขึ้น

กระบวนการปัวซง (Poisson process) เป็นวิธีการหนึ่งที่ถูกนำมาใช้บ่อยในการศึกษาความเชื่อถือได้ของระบบ โดยกระบวนการปัวซงจะพิจารณาค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งการเกิดความล้มเหลวของระบบหรือฟังก์ชันค่าเฉลี่ย $M(t)=E[N(t)]$ ดังนั้น สำหรับกระบวนการปัวซงที่มีฟังก์ชันค่าเฉลี่ย $M(t)$ จำนวนครั้งการเกิดความล้มเหลวในช่วงเวลา (s, t] ก็จะมีการแจกแจงปัวซงเช่นเดียวกัน โดยมีค่าเฉลี่ยคือ $M(t)-M(s)$ หรือเขียนแทนด้วย $N(t)-N(s) \sim Poisson(M(t)-M(s))$ ถ้า $M(t)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ $\nu(t)=M'(t)$ จะถูกเรียกว่า ฟังก์ชันความหนาแน่น (intensity function) หรือ อัตราความล้มเหลว (failure rate) กระบวนการปัวซงที่เป็นที่รู้จักกันดี คือ กระบวนการฮอเมอจีเนียสปัวซง (homogeneous Poisson process; HPP) ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นเป็นค่าคงที่ หรือ $\nu(t)=\lambda$ อย่างไรก็ตาม การศึกษาความเชื่อถือได้ของระบบที่ซ่อมแซมได้ส่วนใหญ่ ต้องอาศัยกระบวนการปัวซงที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นที่ไม่คงที่ หรือที่เรียกว่า กระบวนการนอนฮอเมอจีเนียสปัวซง

Vol. 19 No. 2: 175-187 [2020]
doi:10.14416/j.appsci.2020.02.014

(nonhomogeneous Poisson process; NHPP) ซึ่งกระบวนการปัวซงลักษณะนี้สามารถที่จะนำไปสร้างแบบจำลองได้ทั้งระบบที่มีการเติบโตของความเชื่อถือได้และระบบที่มีความชำรุดหรือเสื่อมสภาพ กล่าวคือ ถ้าฟังก์ชันความหนาแน่นลดลง แสดงว่า เวลาระหว่างความล้มเหลวแต่ละครั้งมีแนวโน้มที่จะมากขึ้น และถ้าฟังก์ชันความหนาแน่นเพิ่มขึ้น แสดงว่า เวลาระหว่างความล้มเหลวแต่ละครั้งมีแนวโน้มที่จะสั้นลงนั่นเอง (Engelhardt & Bain, 1992)

ในหัวข้อถัดไปจะกล่าวถึงรายละเอียดของกระบวนการนอนฮอเมอจีเนียสปัวซงชนิดพิเศษที่เรียกว่า กระบวนการไวบูล (Weibull process) หรือกระบวนการเพาเวอร์ลอว์ (power-law process) (Crow, 1975) ซึ่งถูกนำมาใช้กันอย่างแพร่หลายในการสร้างแบบจำลองและวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ของระบบที่ซ่อมแซมได้ ตลอดจนการเก็บข้อมูลจากระบบที่ซ่อมแซมได้และการอนุมานทางสถิติเบื้องต้น อันได้แก่ การประมาณค่าแบบจุด การประมาณค่าแบบช่วง และการทดสอบสมมติฐานสำหรับพารามิเตอร์ที่อยู่ในแบบจำลองเพาเวอร์ลอว์

กระบวนการเพาเวอร์ลอว์ (power-law process)

ตามที่ได้กล่าวมาข้างต้น กระบวนการเพาเวอร์ลอว์ (power-law process) เป็นกระบวนการที่ถูกนำมาใช้กันอย่างแพร่หลายในการสร้างแบบจำลองและวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ของระบบที่ซ่อมแซมได้ (Zhou & Weng, 1992; Rigdon & Basu, 2000; Jin et al., 2010; Chumnaul & Sepehrifar, 2018) สาเหตุที่กระบวนการนี้ถูกเรียกว่า กระบวนการไวบูลหรือกระบวนการเพาเวอร์ลอว์ก็เนื่องมาจากเวลาที่ระบบที่ซ่อมแซมได้เกิดความล้มเหลวครั้งแรกมีการแจกแจงไวบูล ส่วนเวลาที่ระบบ เกิดความล้มเหลวครั้งอื่นๆ ถูกควบคุมโดยฟังก์ชันความหนาแน่นที่อยู่ในรูปฟังก์ชันพิบัติ (hazard function) ของการแจกแจงไวบูล กล่าวคือ ฟังก์ชันความหนาแน่นอยู่ในรูป (Finkelstein, 1976)

$$\nu(t)=\left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1}, \qquad \beta>0,\quad \theta>0 \tag{1}$$

เมื่อ β คือ พารามิเตอร์บ่งรูปร่าง (shape parameter) และ θ คือ พารามิเตอร์บ่งขนาด (scale parameter) ส่วนฟังก์ชันค่าเฉลี่ยของกระบวนการเพาเวอร์ลอว์จะอยู่ในรูป

$$M(t)=\int_0^t \nu(u)du=(t/\theta)^{\beta} \tag{2}$$

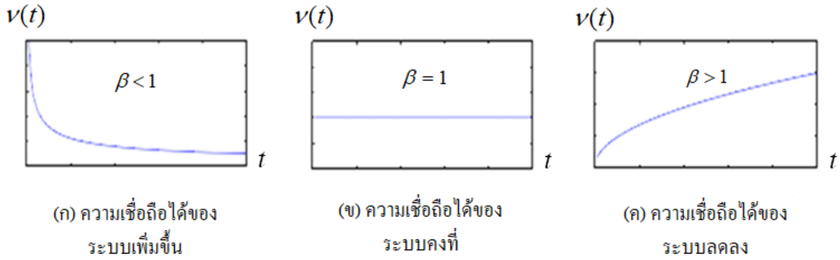
ซึ่งฟังก์ชันค่าเฉลี่ยนี้มักจะถูกนำไปใช้ในรูปของการสร้างพารามิเตอร์ใหม่ (reparameterization) โดยให้ $\lambda=\theta^{-\beta}$ ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันค่าเฉลี่ยสำหรับพารามิเตอร์ใหม่คือ $M(t)=\lambda t^{\beta}$ ซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชันความหนาแน่น

$$\nu(t)=\lambda\beta t^{\beta-1}, \qquad \beta>0,\quad \lambda>0 \tag{3}$$

โดยพารามิเตอร์ β จะเป็นตัวบ่งชี้ว่าระบบที่ซ่อมแซมได้มีการเติบโตของความเชื่อถือได้หรือเสื่อมสภาพ ถ้า $\beta<1$ แสดงว่า มีการลดลงของฟังก์ชันความหนาแน่น บ่งชี้ว่าระบบมีการเติบโตของความเชื่อถือได้หรือมีการพัฒนา ในทางตรงกันข้าม ถ้า $\beta>1$ แสดงว่า มีการเพิ่มขึ้นของฟังก์ชันความหนาแน่น บ่งชี้ว่าระบบมีความเชื่อถือได้ลดลงหรือเสื่อมสภาพและความล้มเหลวของระบบมีแนวโน้มที่จะเกิดบ่อยขึ้น และถ้า $\beta=1$ กระบวนการเพาเวอร์ลอว์ซึ่งเป็นกระบวนการนอนฮอเมอจีเนียสปัวซงจะลดรูปกลายเป็นกระบวนการฮอเมอจีเนียสปัวซงด้วยฟังก์ชันความ

Vol. 19 No. 2: 175-187 [2020]
doi:10.14416/j.appsci.2020.02.014

หนาแน่น $\nu(t)=\lambda$ (ดูรูปภาพ 1 ประกอบ) จะเห็นได้ว่ากระบวนการเพาเวอร์ลอว์หรือแบบจำลองเพาเวอร์ลอว์เป็นแบบจำลองที่ค่อนข้างยืดหยุ่นที่สามารถใช้ศึกษาได้ทั้งระบบที่มีการเติบโตของความเชื่อถือได้หรือระบบที่เสื่อมสภาพ นอกจากนี้ แบบจำลองเพาเวอร์ลอว์ยังมีชื่อเรียกอื่นๆ อีก ได้แก่ แบบจำลองดวน (Duane model) และแบบจำลองกิจกรรมการวิเคราะห์ระบบวัสดุของกองทัพ (army materials system analysis activity model; AMSAA model) (Yu et al., 2008)

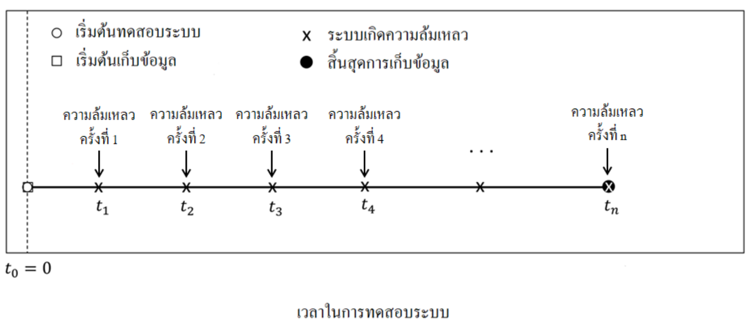


รูปภาพ 1 ประเภทความเชื่อถือได้ของระบบ

การเก็บข้อมูลจากระบบที่ซ่อมแซมได้

ในการศึกษาความเชื่อถือได้ของระบบที่ซ่อมแซมได้นั้น ข้อมูลที่นิยมนำมาศึกษาหรือวิเคราะห์คือ เวลาที่ระบบเกิดความล้มเหลว ($T_1, T_2, \ldots, T_n$) ซึ่งการเก็บข้อมูลดังกล่าวจะมีวิธีการที่แตกต่างกันอยู่ 2 กรณีคือ กรณีตัดทอนความล้มเหลว (failure truncated) และกรณีตัดทอนเวลา (time truncated)

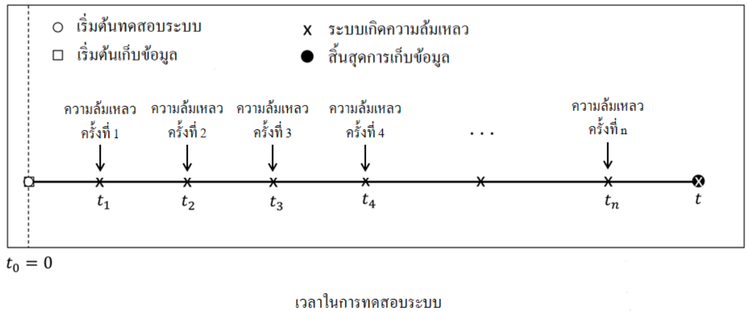
สำหรับกรณีตัดทอนความล้มเหลว ในการทดสอบระบบจะมีการกำหนดจำนวนครั้งการเกิดความล้มเหลว n ไว้ล่วงหน้า จากนั้นระบบจะถูกทำการทดสอบไปเรื่อยๆ จนกระทั่งความล้มเหลวครั้งที่ n เกิดขึ้นจึงจะหยุดทำการทดสอบ ข้อมูลที่ได้จะเป็นค่าสังเกตของเวลาที่ระบบเกิดความล้มเหลวแต่ละครั้ง เขียนแทนด้วย $t_1, t_2, \ldots, t_n$ โดยที่ t_i คือ เวลาการเกิดความล้มเหลวครั้งที่ i และ $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ (ดูรูปภาพ 2 ประกอบ) ในกรณีนี้จะเห็นว่า $T_1, T_2, \ldots, T_n$ เป็นตัวแปรสุ่ม ส่วนจำนวนครั้งการเกิดความล้มเหลว (n) เป็นค่าคงที่



รูปภาพ 2 ข้อมูลกรณีตัดทอนความล้มเหลว (failure truncated)

doi:10.14416/j.appsci.2020.02.014

ส่วนกรณีตัดทอนเวลา ในการทดสอบระบบจะมีการกำหนดเวลา t ไว้ล่วงหน้า จากนั้นระบบจะถูกทำการทดสอบไปเรื่อยๆ จนกระทั่งครบเวลาที่กำหนดจึงจะหยุดทำการทดสอบ ข้อมูลที่ได้จะเป็นค่าสังเกตของเวลาที่ระบบเกิดความล้มเหลวแต่ละครั้ง $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$ เช่นเดียวกับกรณีแรก (ดูรูปภาพ 3 ประกอบ) และในกรณีนี้จะเห็นว่า $T_1, T_2, \ldots, T_n$ เป็นตัวแปรสุ่ม ส่วนเวลาสิ้นสุดการทดสอบระบบ (t) เป็นค่าคงที่ (Chumnaul, 2019)



รูปภาพ 3 ข้อมูลกรณีตัดทอนเวลา (time truncated)

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการเพาเวอร์ลอว์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการประมาณค่าแบบจุดโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood method) และการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ β และ λ

การประมาณค่าแบบจุด (point estimation)

การประมาณค่าแบบจุดโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เป็นวิธีมาตรฐานสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์และการอนุมานทางสถิติและเป็นวิธีที่ให้ตัวประมาณที่มีคุณสมบัติที่ดีหลายประการ เช่น ความพอเพียง (sufficiency) ความคงเส้นคงวา (consistency) ความมีประสิทธิภาพ (effciency) และความไม่แปรเปลี่ยน (invariance)

กำหนดให้ $T_1, T_2, \ldots, T_n$ เป็นเวลาที่ระบบเกิดความล้มเหลว จากคุณสมบัติของกระบวนการนอนฮอเมอจีเนียสปัวซงจะได้ว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม (joint probability density function) หรือฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (likelihood function) ของตัวแปรสุ่ม $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $\nu(t)$ คือ

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} \nu(t_i)\right) \exp\left(-\int_0^w \nu(x)dx\right) \quad [4]$$

เมื่อ $w = t_n$ สำหรับกรณีตัดทอนความล้มเหลว และ $w = t$ สำหรับกรณีตัดทอนเวลา ถ้า $\nu(t)$ อยู่ในรูปแบบดังสมการ [3] จะสามารถหาฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ได้ดังนี้

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda\beta t_i^{\beta-1}\right) \exp\left(-\int_0^w \lambda\beta x^{\beta-1}dx\right)$$

$$= (\lambda\beta)^n \prod_{i=1}^{n} t_i^{\beta-1} \exp\left(-\lambda w^{\beta}\right) \quad [5]$$

doi:10.14416/j.appsci.2020.02.014

(Crow, 1982) และจากฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นในสมการ [5] จะได้ลอการิทึมของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (log-likelihood function) คือ

$$\ln f(t_1, t_2, ..., t_n) = n\ln(\lambda\beta) - \lambda w^{\beta} + (\beta - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln t_i \qquad [6]$$

ส่วนตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood estimator) จะหาได้จากการแก้ระบบสมการ

$$\frac{\partial \ln f(t)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - w^{\beta} = 0$$

$$\frac{\partial \ln f(t)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \lambda w^{\beta}\ln w + \sum_{i=1}^{n}\ln t_i = 0$$

ดังนั้น จะได้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับพารามิเตอร์ λ และ β คือ

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{w^{\hat{\beta}}} \qquad [7]$$

และ

$$\hat{\beta} = \frac{n}{n\ln w - \sum_{i=1}^{n}\ln t_i} \qquad [8]$$

ตามลำดับ เมื่อ $w = t_n$ สำหรับกรณีตัดทอนความล้มเหลว และ $w = t$ สำหรับกรณีตัดทอนเวลา

ทฤษฎีบท 1 ถ้า $T_1, T_2, ..., T_n$ เป็นเวลาที่ระบบเกิดความล้มเหลวจากกระบวนการเพาเวอร์ลอว์ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นคือ $v(t) = \lambda\beta t^{\beta-1}$ และ $\hat{\lambda}$ และ $\hat{\beta}$ คือตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ λ และ β ตามลำดับ จะได้ว่า

1) $U = 2n\beta / \hat{\beta}$ มีการแจกแจงไคกำลังสอง (chi-squared distribution) ที่มีองศาเสรี (degree of freedom) เท่ากับ $2(n-d)$ เมื่อ $d = 1$ สำหรับกรณีตัดทอนความล้มเหลว และ $d = 0$ สำหรับกรณีตัดทอนเวลา

2) $V = 2\lambda T_n^{\beta}$ มีการแจกแจงกำลังสอง ที่มีองศาเสรีเท่ากับ $2n$

3) U และ V เป็นอิสระต่อกัน

ทฤษฎีบท 2 ถ้าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับพารามิเตอร์ β คือ $\hat{\beta} = n / (n\ln w - \sum_{i=1}^{n}\ln t_i)$ จะได้ว่า $\hat{\beta}$ เป็นตัวประมาณที่เอนเอียง (unbiased estimator) ของพารามิเตอร์ β โดยที่มีค่าคาดหมาย $(E(\hat{\beta}))$ และความแปรปรวน $(Var(\hat{\beta}))$ คือ

$$E(\hat{\beta}) = \frac{n\beta}{(n-d-1)} \qquad [9]$$

และ

$$Var(\hat{\beta}) = \frac{n^2\beta^2}{(n-d-1)^2(n-d-2)} \qquad [10]$$

ตามลำดับ เมื่อ $w = t_n$ สำหรับกรณีตัดทอนความล้มเหลว และ $w = t$ สำหรับกรณีตัดทอนเวลา

doi:10.14416/j.appsci.2020.02.014

การประมาณค่าแบบช่วง (interval estimation)

ในการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ β และ λ นั้น เราสามารถสร้างช่วงความเชื่อมั่นได้โดยอาศัยผลจากทฤษฎีบท 1 เนื่องจาก $2n\beta/\hat{\beta}$ มีการแจกแจงไคกำลังสอง ที่มีองศาเสรีเท่ากับ $2(n-d)$ ช่วงความเชื่อมั่นที่แท้จริง $(1-\alpha)100\%$ สำหรับพารามิเตอร์ β สามารถสร้างได้ดังต่อไปนี้

$$P\left(\chi^2_{(1-\alpha/2,2(n-d))} \le \frac{2n\beta}{\hat{\beta}} \le \chi^2_{(\alpha/2,2(n-d))}\right) = 1-\alpha$$

$$P(\hat{\beta}\chi^2_{(1-\alpha/2,2(n-d))} \le 2n\beta \le \hat{\beta}\chi^2_{(\alpha/2,2(n-d))}) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\hat{\beta}\chi^2_{(1-\alpha/2,2(n-d))}}{2n} \le \beta \le \frac{\hat{\beta}\chi^2_{(\alpha/2,2(n-d))}}{2n}\right) = 1-\alpha$$

ดังนั้น จะได้ช่วงความเชื่อมั่นที่แท้จริง $(1-\alpha)100\%$ สำหรับพารามิเตอร์ β คือ

$$\frac{\hat{\beta}\chi^2_{(1-\alpha/2,2(n-d))}}{2n} \le \beta \le \frac{\hat{\beta}\chi^2_{(\alpha/2,2(n-d))}}{2n} \quad [11]$$

ส่วนการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ λ อาศัยผลจากทฤษฎีบท 1 ที่ว่า $2\lambda T_n^{\beta}$ มีการแจกแจงกำลังสอง ที่มีองศาเสรีเท่ากับ $2n$ ดังนั้น จะได้ช่วงความเชื่อมั่นที่แท้จริง $(1-\alpha)100\%$ สำหรับพารามิเตอร์ λ กรณีทราบค่า β คือ

$$\frac{\chi^2_{(1-\alpha/2,2n-d)}}{2T_n^{\beta}} \le \lambda \le \frac{\chi^2_{(\alpha/2,2n-d)}}{2T_n^{\beta}} \quad [12]$$

เมื่อ α คือ ระดับนัยสำคัญ (significance level) และ $d=1$ สำหรับกรณีตัดทอนความล้มเหลว และ $d=0$ สำหรับกรณีตัดทอนเวลา (Chumnaul, 2019)

หมายเหตุ ช่วงความเชื่อมั่นที่แท้จริง $(1-\alpha)100\%$ สำหรับพารามิเตอร์ λ กรณีไม่ทราบค่า β จะไม่กล่าวถึงในที่นี้ เนื่องจากการสร้างช่วงความเชื่อมั่นที่แท้จริงหรือแม้กระทั่งช่วงความเชื่อมั่นโดยประมาณต้องใช้วิธีการทางสถิติที่มีความซับซ้อนมากขึ้น เช่น การใช้เมทริกซ์สารสนเทศของฟิชเชอร์ (Fisher's information matrix) (Gaudoin, 2006) การใช้ปริมาณหมุนนัยทั่วไป (generalized pivotal quantity) (Wang, et al., 2013; Crow, 1982) หรือการใช้วิธีการอนุมานแบบเบส์ (Bayesian inference) เป็นต้น

การทดสอบสมมติฐานพารามิเตอร์ของกระบวนการเพาเวอร์ลอว์

การทดสอบสมมติฐานพารามิเตอร์ β

การทดสอบสมมติฐานพารามิเตอร์ β แบบสองด้าน (two-sided test) มีสมมติฐานของการทดสอบคือ

$$H_0: \beta = \beta_0$$

$$H_1: \beta \ne \beta_0$$

 doi:10.14416/j.appsci.2020.02.014

โดยอาศัยผลจากทฤษฎีบท 1 จะได้สถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานข้างต้นคือ

$$\chi^2 = \frac{2n\beta_0}{\hat{\beta}} \qquad [13]$$

เมื่อ β_0 คือค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบและ $\hat{\beta}$ คือตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ β ดังนั้น เราจะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (H_0) ที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $\chi^2 < \chi^2_{(1-\alpha/2,2(n-d))}$ หรือ $\chi^2 > \chi^2_{(\alpha/2,2(n-d))}$ เมื่อ $d=1$ สำหรับกรณีตัดทอนความล้มเหลวและ $d=0$ สำหรับกรณีตัดทอนเวลา

ในสถานการณ์จริงหรือในทางปฏิบัติส่วนใหญ่ การทดสอบสมมติฐานพารามิเตอร์ β จะมีวัตถุประสงค์เพื่อหาข้อสรุปว่าระบบมีการพัฒนาหรือหรือเสื่อมสภาพ ดังนั้น สมมติฐานสำหรับการทดสอบจึงสามารถแยกออกเป็น 3 แบบตามประเภทของความเชื่อถือได้ ดังนี้

1) ถ้าต้องการทดสอบว่าระบบมีการพัฒนาหรือระบบมีการเติบโตของความเชื่อถือได้ สมมติฐานสำหรับการทดสอบคือ $H_0: \beta \geq 1$ คู่กับ $H_1: \beta < 1$

2) ถ้าต้องการทดสอบว่าระบบมีการเสื่อมสภาพหรือมีความเชื่อถือได้ลดลง สมมติฐานสำหรับการทดสอบคือ $H_0: \beta \leq 1$ คู่กับ $H_1: \beta > 1$

3) ถ้าต้องการทดสอบว่าระบบมีความเชื่อถือได้คงที่ สมมติฐานสำหรับการทดสอบคือ $H_0: \beta = 1$ คู่กับ $H_1: \beta \neq 1$

การทดสอบสมมติฐานพารามิเตอร์ λ กรณีทราบค่า β

การทดสอบสมมติฐานพารามิเตอร์ λ แบบสองด้าน (two-sided test) มีสมมติฐานของการทดสอบคือ

$$H_0: \lambda = \lambda_0$$
$$H_1: \lambda \neq \lambda_0$$

โดยอาศัยผลจากทฤษฎีบท 1 เช่นเดียวกับการทดสอบสมมติฐานพารามิเตอร์ β จะได้สถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานข้างต้นคือ

$$\chi^2 = 2\lambda_0 T_n^{\beta} \qquad [14]$$

เมื่อ λ_0 คือค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบ ดังนั้น เราจะปฏิเสธสมมติฐานหลักที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $\chi^2 < \chi^2_{(1-\alpha/2,2n)}$ หรือ $\chi^2 > \chi^2_{(\alpha/2,2n)}$ เมื่อ $d=1$ สำหรับกรณีตัดทอนความล้มเหลวและ $d=0$ สำหรับกรณีตัดทอนเวลา

หมายเหตุ สำหรับการทดสอบสมมติฐานพารามิเตอร์ λ กรณีไม่ทราบค่า β จะไม่กล่าวถึงในที่นี้

 Vol. 19 No. 2: 175-187 [2020]
doi:10.14416/j.appsci.2020.02.014

การประยุกต์ใช้กระบวนการเพาเวอร์ลอว์กับความเชื่อถือได้ของระบบที่ซ่อมแซมได้

ในหัวข้อนี้ จะนำเสนอตัวอย่างการนำกระบวนการเพาเวอร์ลอว์หรือแบบจำลองเพาเวอร์ลอว์ไปประยุกต์ใช้กับระบบ ที่ซ่อมแซมได้โดยใช้ข้อมูลจริง โดยข้อมูลที่ใช้ในตัวอย่างแรกคือ เวลาการเกิดความล้มเหลว (หน่วย: ชั่วโมง) ของเครื่องกำเนิดไฟฟ้าของเครื่องบิน (aircraft generator) (Rigdon & Basu, 2000) และข้อมูลที่ใช้ในตัวอย่างที่สองคือเวลาการเกิดความล้มเหลวของเครื่องปรับอากาศในเครื่องบินโบอิ้ง (Boeing air-conditioning) (Yu et al., 2008)

เวลาการเกิดความล้มเหลวของเครื่องกำเนิดไฟฟ้าของเครื่องบิน

ข้อมูลที่ใช้ในตัวอย่างนี้เป็นข้อมูลกรณีตัดทอนความล้มเหลว โดยเครื่องกำเนิดไฟฟ้าของเครื่องบินจะถูกทำการทดสอบจนกระทั่งความล้มเหลวครั้งที่ 13 เกิดขึ้นจึงจะหยุดทำการทดสอบ เวลาการเกิดความล้มเหลวของเครื่องกำเนิดไฟฟ้าของเครื่องบิน (ชั่วโมง) ทั้ง 13 ครั้ง ($t_1, t_2, \ldots, t_{13}$) เป็นดังต่อไปนี้

55 166 205 341 488 567 731 1308 2050 2453 3115 4017 4596

จากข้อมูลดังกล่าว จะได้ $n = 13,\ t_{13} = 4596,\ \ln t_{13} = 8.4329,$ และ $\sum_{i=1}^{13} \ln t_i = 86.7814$ ดังนั้น ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ λ และ β คือ $\hat{\lambda} = 0.1072$ และ $\hat{\beta} = 0.5690$ ตามลำดับ

ในที่นี้จะทำการทดสอบว่าระบบมีการพัฒนาหรือระบบมีการเติบโตของความเชื่อถือได้หรือไม่ โดยมีสมมติฐานของการทดสอบคือ

$H_0 : \beta \geq 1$ (ระบบไม่มีการเติบโตของความเชื่อถือได้)

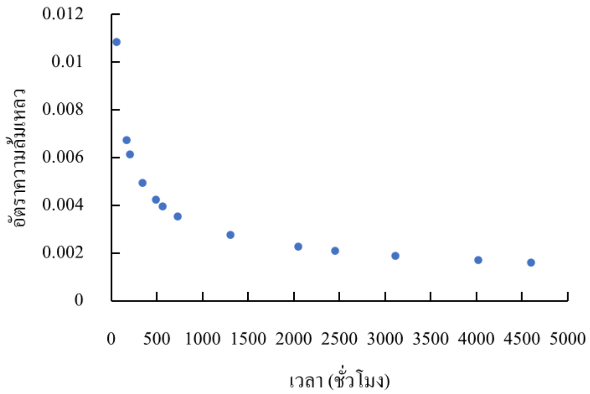
$H_1 : \beta < 1$ (ระบบมีการเติบโตของความเชื่อถือได้)

เมื่อคำนวณค่าสถิติทดสอบจะได้

$$\chi^2 = \frac{2n\beta_0}{\hat{\beta}} = \frac{2(13)(1)}{0.5690} = 45.69$$

เนื่องจาก 45.69 > $\chi^2_{(0.05, 2(13-1))} = 36.415$ แสดงว่าเครื่องกำเนิดไฟฟ้าของเครื่องบินมีการเติบโตของความเชื่อถือได้ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และเมื่อนำข้อมูลและค่าประมาณที่ได้มาสร้างกราฟเพื่อดูอัตราความล้มเหลวของระบบดังรูปภาพ 4 จะเห็นว่า ระบบมีการเติบโตของความเชื่อถือได้ซึ่งสอดคล้องกับผลการทดสอบสมมติฐาน

Vol. 19 No. 2: 175-187 [2020]
doi:10.14416/j.appsci.2020.02.014



รูปภาพ 4 อัตราความล้มเหลวของเครื่องกำเนิดไฟฟ้าของเครื่องบิน ณ เวลาต่าง ๆ

เวลาการเกิดความล้มเหลวของเครื่องปรับอากาศในเครื่องบินโบอิ้ง

ข้อมูลที่ใช้ในตัวอย่างนี้เป็นข้อมูลกรณีตัดทอนเวลา โดยเครื่องปรับอากาศในเครื่องบินโบอิ้งจะถูกทำการทดสอบไปเรื่อยๆ จนกระทั่งครบ 2500 ชั่วโมงจึงจะหยุดทำการทดสอบ ซึ่งในช่วงเวลา 2500 ชั่วโมง เครื่องปรับอากาศในเครื่องบินโบอิ้งเกิดความล้มเหลวทั้งหมด 29 ครั้ง เวลาการเกิดความล้มเหลว (ชั่วโมง) เป็นดังนี้

90 100 160 346 407 456 470 494 550 570 649 733 777 836 865 983

1008 1164 1474 1550 1576 1620 1643 1705 1835 2043 2113 2214 2422

จากข้อมูลนี้จะได้ $t = 2500$, $n = 29$, $\ln t = 7.8240$, และ $\sum_{i=1}^{29} \ln t_i = 193.7820$ ดังนั้น ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ λ และ β คือ $\hat{\lambda} = 0.0307$ และ $\hat{\beta} = 0.8758$ ตามลำดับ

เนื่องจากค่าประมาณพารามิเตอร์ β ค่อนข้างเข้าใกล้ 1 ในกรณีนี้เราจะทำการทดสอบว่าระบบมีความเชื่อถือได้ที่คงที่หรือไม่ โดยมีสมมติฐานของการทดสอบคือ

$H_0 : \beta = 1$ (ระบบมีความเชื่อถือได้คงที่)

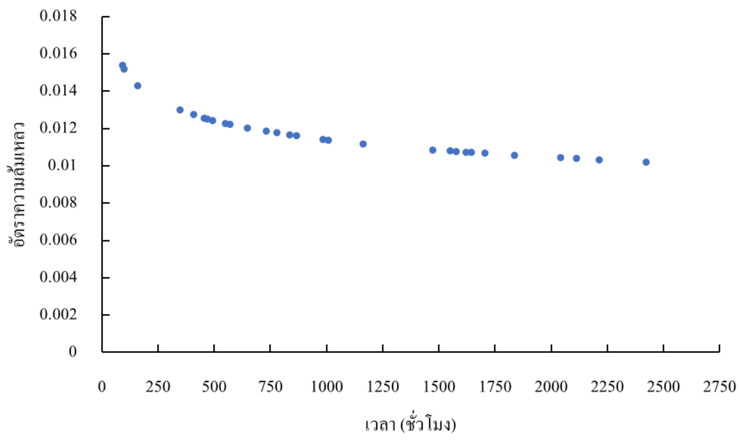
$H_1 : \beta \neq 1$ (ระบบมีความเชื่อถือได้ไม่คงที่)

เมื่อคำนวณค่าสถิติทดสอบจะได้

$$\chi^2 = \frac{2n\beta_0}{\hat{\beta}} = \frac{2(29)(1)}{0.8758} = 66.23$$

เนื่องจากค่าสถิติทดสอบ 66.23 อยู่ระหว่าง $\chi^2_{(0.975,2(29-0))} = 80.936$ และ $\chi^2_{(0.025,2(29-0))} = 38.844$ แสดงว่าเครื่องปรับอากาศในเครื่องบินโบอิ้งมีความเชื่อถือได้คงที่หรือเวลาการเกิดความล้มเหลวของเครื่องปรับอากาศในเครื่องบินโบอิ้งไม่ได้ถูกควบคุมโดยกระบวนการเพาเวอร์ลอว์ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และเมื่อนำข้อมูลและค่าประมาณที่ได้มาสร้างกราฟเพื่อดูอัตราความล้มเหลวของระบบจะได้ดังรูปภาพ 5 ซึ่งจะเห็นว่า อัตราความล้มเหลวของเครื่องปรับอากาศในเครื่องบินโบอิ้งที่เวลาต่างๆ ค่อนข้างใกล้เคียงกัน โดยมีค่าอยู่ระหว่าง 0.01-0.016

Vol. 19 No. 2: 175-187 [2020]
doi:10.14416/j.appsci.2020.02.014



รูปภาพ 5 อัตราความล้มเหลวของเครื่องปรับอากาศในเครื่องบินโบอิ้ง ณ เวลาต่าง ๆ

สรุป

บทความนี้ได้นำเสนอแนวคิดพื้นฐานและการอนุมานทางสถิติเบื้องต้นสำหรับกระบวนการเพาเวอร์ลอว์ ซึ่งเป็นกระบวนการนอนฮอเมอจีเนียสปัวซงชนิดหนึ่งที่ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายในการศึกษาและวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ของระบบที่ซ่อมแซมได้ อย่างไรก็ตาม ในบทความนี้นำเสนอการประยุกต์ใช้กระบวนการเพาเวอร์ลอว์กับระบบที่ซ่อมแซมได้เพียง 1 ระบบเท่านั้น และนำเสนอเฉพาะกรณีที่เราสามารถเก็บข้อมูลเวลาการเกิดความล้มเหลวของระบบได้ทั้งหมด ในทางปฏิบัติ เราสามารถนำกระบวนการเพาเวอร์ลอว์ไปใช้ในการศึกษาและวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ของระบบที่ซ่อมแซมได้มากกว่า 1 ระบบ และสามารถประยุกต์ใช้ในกรณีที่ข้อมูลบางส่วนเกิดความสูญหายได้

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณ ผศ.ชิต ดุรงค์แสง และผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ได้กรุณาสละเวลาในการอ่าน ให้ข้อคิดเห็นและคำชี้แนะ และตรวจแก้บทความฉบับนี้จนเสร็จสมบูรณ์

doi:10.14416/j.appsci.2020.02.014

เอกสารอ้างอิง

Chumnaul, J. (2019). Inferences on the power-law process with applications to repairable systems (Ph.D. thesis) Department of Mathematics and Statistics, Mississippi State University, USA.

Chumnaul, J. & Sepehrifar, M. (2018). Generalized confidence interval for the scale parameter of the power-law process with incomplete failure data. *Computational Statistics and Data Analysis, 128, 17-33.*

Crow, L. H. (1975). Reliability Analysis for Complex, Repairable Systems, Report 138, AMSAA.

Crow, L. H. (1982). Confidence interval procedures for the Weibull process with application to reliability growth. *Technometrics, 24, 67–72.*

Engelhardt, M. & Bain, L. (1992). Statistical analysis of a Weibull process with left-censored data. *Survival Analysis: State of the Art, 173–195.*

Finkelstein, J. M. (1976). Confidence bounds on the parameters of Weibull process. *Technometrics, 18, 115-117.*

Jin, T. D., Liao, H. T. & Kilari, M. (2010). Reliability growth modeling for in-service electronic systems considering latent failure modes. *Microelectronics Reliability, 50, 324-331.*

Rigdon, S. E. & Basu, A. P. (2000). *Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems.* New York: John Wiley.

Wang, B., Xie, M. & Zhou, J. (2013). Generalized confidence interval for the scale parameter of the power-law process. *Communications in Statistics: Theory and Methods, 42, 898-906.*

Yu, J. W., Tian, G. L. & Tang, M. L. (2008). Statistical inference and prediction for the Weibull process with incomplete observations. *Computational Statistics and Data Analysis, 52, 1587–1603.*

Zhou, Y. Q. & Weng, Z. X. (1992). *Reliability growth.* Beijing: Science Press.

Gaudoin, O., Yang, B. & Xie, M. (2006). Confidence intervals for the scale parameter of the power-law process. *Communications in Statistics: Theory and Methods, 35, 1525–1538.*