

Research Article

สมาชิกรักษาปกติใน LA^{**} -กึ่งกรุปปกติ

On the regularity-preserving elements in regular LA^{**} -semigroups

ชฎารัตน์ ถาปน¹ และ ไพโรจน์ เยียรยง^{1*}

Chadarat Tapan¹ and Pairote Yiarayong^{1*}

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม จ. พิษณุโลก 65000

¹Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Pibulsongkram Rajabhat University, Phitsanulok 65000, Thailand

*E-mail: pairote0027@hotmail.com

Received: 05/04/2020; Revised: 19/09/2020; Accepted: 20/10/2020

บทคัดย่อ

กำหนดให้ a เป็นสมาชิกใด ๆ ในกึ่งกรุปเกือบซ้าย $(S, *)$ จะเรียก a เป็นสมาชิกรักษาปกติใน S ถ้า $(S, \circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ ในบทความนี้ได้นำเสนอแนวคิดของสมาชิกรักษาปกติในกึ่งกรุปเกือบซ้าย และมีการตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของสิ่งที่กล่าวมาข้างต้น นอกจากนี้ได้พิสูจน์ว่าถ้า $(S, *)$ เป็น LA^{**} -กึ่งกรุปปกติและ $a \in S$ แล้วเงื่อนไขต่อไปนี้จะสมมูลกัน

1. a เป็นสมาชิกรักษาปกติใน S
2. $(b * a) * S = S * b$ สำหรับทุกสมาชิก $b \in S$
3. $a \in R(S)$

สุดท้ายนี้ได้หาลักษณะเฉพาะของสมาชิกรักษาปกติใน LA^{**} -กึ่งกรุปปกติ

คำสำคัญ: กึ่งกรุปเกือบซ้าย, LA^{**} -กึ่งกรุป, สมาชิกรักษาปกติ, ตัวผกผันซ้าย, กึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ

Abstract

An element a of S is a regularity-preserving element of an left almost semigroup $(S, *)$ if the left almost semigroup $(S, \circ_a)$ is regular. In this paper, the notions of regularity-preserving elements in left almost semigroups are investigated. Moreover, we prove that the following conditions are equivalent:

1. a is a regularity-preserving element in a regular LA^{**} -semigroup.
2. $(b * a) * S = S * b$ for any element b of S .
3. $a \in R(S)$.

Finally, we characterize the regularity-preserving elements of regular LA^{**} -semigroups.

Keywords: left almost semigroup, LA^{**} -semigroup, regularity-preserving element, left invertive, regular left almost semigroup

บทนำ

ในบทความนี้เป็นการศึกษาสมาชิกรักษาปกติในกึ่งกรุปเกือบซ้ายซึ่งเป็นการพัฒนามาจากการศึกษาตัวแปร (variant) ของกึ่งกรุปเกือบซ้าย กล่าวคือ จะเรียกสมาชิก a ใด ๆ ในกึ่งกรุปเกือบซ้าย $(S, *)$ ว่า ตัวแปร (variant) ของกึ่งกรุปเกือบซ้าย ถ้านิยามการดำเนินการ “ $\circ_a$ ” บน S โดยที่

$$x \circ_a y = (x * a) * y$$

สำหรับทุกสมาชิก x และ y ในกึ่งกรุปเกือบซ้าย S ยิ่งไปกว่านั้นเห็นได้ชัดเลยว่า $\circ_a$ เป็นดำเนินการทวิภาคบน S โครงสร้างพีชคณิตดังกล่าวได้รับการพัฒนาโดย Tapan และ Yiarayong (Tapan & Yiarayong, 2020) ในปี 2020 ยิ่งไปกว่านั้นยังมีนักคณิตศาสตร์อีกมากมายที่ได้ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของกึ่งกรุปเกือบซ้ายอย่างแพร่หลายซึ่งได้อธิบายถึงทฤษฎีบท สมบัติ และตัวอย่างต่าง ๆ ของกึ่งกรุปเกือบซ้าย เช่น

ในปี ค.ศ. 2014, Shah และ Kausar (Shah & Kausar, 2014) ได้อธิบายผลการศึกษาลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปเกือบซ้ายอันดับปกติ (regular ordered left almost semigroup) [กึ่งกรุปเกือบซ้ายอันดับปกติซ้าย, กึ่งกรุปเกือบซ้ายอันดับปกติขวา, กึ่งกรุปเกือบซ้ายอันดับปกติแบบอ่อนซ้าย, กึ่งกรุปเกือบซ้ายอันดับปกติแบบอ่อนขวา, กึ่งกรุปเกือบซ้ายอันดับปกติภายใน] [left regular ordered left almost semigroup, right regular ordered left almost semigroup, left weakly regular ordered left almost semigroup, right weakly regular ordered left almost semigroup, intra-regular ordered left almost semigroup] โดยสมบัติบางประการของไอดีลซ้ายวิกซ์นัย (fuzzy left ideal) [ไอดีลขวาวิกซ์นัย, ไบ-ไอดีลวิกซ์นัย, ไบ-ไอดีลวางนัยทั่วไปวิกซ์นัย] [fuzzy right ideal, fuzzy bi-ideal, fuzzy generalized bi-ideal] ต่อไปในปี ค.ศ. 2015, Amjad และคณะ (Amjad, Yousafzai & Iampan, 2015) ได้อธิบายลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปเกือบซ้ายอันดับปกติ (regular ordered left almost semigroup) ในพจน์ของ $(\in, \in \vee q_k)$ -ไอดีลซ้ายวิกซ์นัย

$((\in, \in \vee q_k)$ -fuzzy left ideal) ในปี ค.ศ. 2016, Arif และคณะ (Arif et al., 2016) ได้อธิบายผลการศึกษาของบาง AG-กรุปพอยด์ (slim AG-groupoid) และได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างบาง AG-กรุปพอยด์กับกึ่งกรุปสลับที่ (commutative semigroup) ต่อมาในปี ค.ศ. 2018, Iqbal และ Ahmad (Iqbal & Ahmad, 2018) ได้ศึกษา CA - AG-กรุปพอยด์ได้อธิบายว่า CA - AG-กรุปพอยด์เป็นกรุปพอยด์ที่มีสมบัติ $x * (y * z) = z * (x * y)$ สำหรับแต่ละสมาชิก x, y และ z ใน S นอกจากนี้ยังได้อธิบายลักษณะเฉพาะของไอดีลซ้ายและไอดีลขวาใน CA - AG-กรุปพอยด์ ในปี ค.ศ. 2019, Younas และ Mushtaq (Younas & Mushtaq, 2019) ได้ศึกษาตัวผกผัน (inverse) ของ LA - กึ่งกรุป (LA-semigroups) กล่าวคือจะเรียกสมาชิก x ว่า ตัวผกผัน (inverse) ของ y ใน LA - กึ่งกรุป $(S, *)$ ถ้า $x = (x * y) * x$ และ $y = (y * x) * y$ และได้ตรวจสอบสมบัติพื้นฐานบางอย่างของตัวผกผันใน LA - กึ่งกรุป ในปี ค.ศ. 2020, Kausar, Alesemi และ Salahuddin (Kausar, Alesemi & Salahuddin, 2020) ได้อธิบายผลการศึกษาลักษณะเฉพาะของ AG-กรุปพอยด์อันดับปรกติ (regular ordered AG-groupoid) [AG-กรุปพอยด์อันดับปรกติขวา, AG-กรุปพอยด์อันดับปรกติซ้าย, $(2,2)$ -AG-กรุปพอยด์อันดับปรกติ, AG-กรุปพอยด์อันดับปรกติแบบอ่อน, AG-กรุปพอยด์อันดับปรกติ-ภายใน] [right regular ordered AG-groupoid, left regular ordered AG-groupoid, $(2,2)$ -regular ordered AG-groupoid, weakly regular ordered AG-groupoid and intra-regular ordered AG-groupoid] ในพจน์ของปฏิไอดีลซ้ายวิกษณัย (anti fuzzy left ideal)[ปฏิไอดีลขวาวิกษณัย, ปฏิไอดีลภายในวิกษณัย][anti fuzzy right ideal, anti fuzzy interior ideal] เมื่อไม่นานมานี้ Iqbal และ Ahmad (Iqbal & Ahmad, 2020) ได้ตรวจสอบสมบัติพื้นฐานบางอย่างของกึ่งกรุปเกือบซ้ายแจกแจงสลับที่ซ้าย (left abelian distributive LA-semigroup)

ในบทความนี้ได้กำหนดบทนิยามของสมาชิกรักษาปรกติในกึ่งกรุปเกือบซ้ายและมีการตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของสมาชิกรักษาปรกติในกึ่งกรุปเกือบซ้าย นอกจากนี้ได้หาลักษณะเฉพาะของสมาชิกรักษาปรกติใน LA^{**} -กึ่งกรุปปรกติ

ความรู้พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้เราได้ให้บทนิยามและผลลัพธ์บางอย่างที่จำเป็นสำหรับวัตถุประสงค์และการศึกษาสมาชิกรักษาปรกติในกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติ ดังนี้

บทนิยาม 1. (Kazim & Naseerudin, 1972) กำหนดให้ S เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียก $(S, *)$ ว่า กึ่งกรุปเกือบซ้าย หรือ LA - กึ่งกรุปเกือบซ้าย (left almost semigroup) ก็ต่อเมื่อฟังก์ชัน $*$: $S \times S \rightarrow S$ โดยที่ $*(x, y) \mapsto x * y$ สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใด ๆ ใน S ที่มีสมบัติ $(x * y) * z = (z * y) * x$ สำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใด ๆ ใน S และเรียกสมบัตินี้ว่า อินเวอร์ทีฟซ้าย (left invertive)

บทตั้ง 2. (Kazim & Naseerudin, 1972) ถ้า $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายแล้ว $(a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d)$ สำหรับทุกสมาชิก a, b, c และ d ใด ๆ ใน S

กำหนดให้ $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย จะเรียก $(S, *)$ ว่า มีเอกลักษณ์ซ้าย (left identity) ถ้ามีสมาชิก e ใน S ซึ่งทำให้ $e * x = x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใด ๆ ใน S และจะเรียก “ e ” ว่า เอกลักษณ์ซ้าย (left identity)

บทตั้ง 3. (Mushtaq & Yusuf, 1979) ถ้า $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้ายแล้ว $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใด ๆ ใน S

บทตั้ง 4. (Mushtaq & Yusuf, 1979) ถ้า $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายที่มีเอกลักษณ์ซ้ายแล้ว $(a * b) * (c * d) = (d * c) * (b * a)$ สำหรับทุกสมาชิก a, b, c และ d ใด ๆ ใน S

กำหนดให้ $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย จะเรียก $(S, *)$ ว่า LA^{**} -กึ่งกรุป ถ้าสำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใน S ซึ่ง $x * (y * z) = y * (x * z)$

บทนิยาม 5. (Protic & Boinovic, 1995) กึ่งกรุปเกือบซ้าย $(S, *)$ จะเรียกว่า LA^{**} -กึ่งกรุป ถ้าสำหรับทุกสมาชิก x, y และ z ใน S ซึ่ง $x * (y * z) = y * (x * z)$

กำหนดให้ $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย จะเรียก $(S, *)$ ว่า กึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ (regular left almost semigroup) ถ้าสำหรับแต่ละสมาชิก x ใด ๆ ใน S แล้วจะมีสมาชิก a ใน S ซึ่ง $x = (x * a) * x$

บทนิยาม 6. (Tapan & Yiarayong, 2020) กำหนดให้ a เป็นสมาชิกใด ๆ ในกึ่งกรุปเกือบซ้าย $(S, *)$ นิยามการดำเนินการ “ $\circ_a$ ” โดยที่ $x \circ_a y = (x * a) * y$ สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน S เห็นได้ชัดเจนว่า $\circ_a$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S จะเรียกสมาชิก a ว่า ตัวแปร (variant) ของ S

กำหนดให้ $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย นิยามเซต $R(S)$ โดยที่ $R(S) = \{a \in S \mid (S, \circ_a) \text{ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ}\}$

บทตั้ง 7. (Tapan & Yiarayong, 2020) ถ้า $(S, *)$ เป็น LA^{**} -กึ่งกรุปปกติและ $a \in S$ แล้วเงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $a \in R(S)$
2. $(S * a) * b = S * b$ สำหรับทุกสมาชิก $b \in S$

ผลการวิจัย

ในหัวข้อต่อไปนี้จะแนะนำแนวความคิดของสมาชิกรักษากฎปกติในกึ่งกรุปเกือบซ้าย นอกจากนี้ได้ตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของ LA^{**} -กึ่งกรุป และ LA^{**} -กึ่งกรุปปกติ โดยเริ่มต้นจากการกำหนดบทนิยามของสมาชิกรักษากฎปกติในกึ่งกรุปเกือบซ้าย ดังนี้

กำหนดให้ a เป็นสมาชิกใด ๆ ในกึ่งกรุปเกือบซ้าย $(S, *)$ จะเรียก a เป็นสมาชิกรักษากฎปกติ (regularity-preserving) ใน S ถ้า $(S, \circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ

ทฤษฎีบท 8. ถ้า $(S, *)$ เป็น LA^{**} -กึ่งกรุปปกติและ $a \in S$ แล้วเงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1. a เป็นสมาชิกรักษากฎปกติใน S
2. $(b * a) * S = S * b$ สำหรับทุกสมาชิก $b \in S$
3. $a \in R(S)$

การพิสูจน์ เนื่องจาก $(S * a) * b = (b * a) * S = S * b$ โดยบทตั้ง 7 เห็นได้ชัดเจนว่า $a \in R(S)$ ก็ต่อเมื่อ $(b * a) * S = S * b$ สำหรับทุกสมาชิก $b \in S$ □

ตัวอย่าง 9. กำหนดให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และมีการดำเนินการดังตารางที่ 1

ตาราง 1 ตารางแสดงการดำเนินการ “*” บนเซต S

*	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	4	5	3
4	1	2	3	4	5
5	1	2	5	3	4

จากตารางเห็นได้ชัดเจนว่า $(S, *)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย (Yousafzai, Khan, Khan & Hila, 2016) แต่ไม่เป็นกึ่งกรุปเนื่องจาก $(3*4)*5 = 5*5 = 4$ แต่ $3*(4*5) = 3*5 = 3$ จึงได้ว่า $(3*4)*5 \neq 3*(4*5)$ จึงไม่มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ ยิ่งไปกว่านั้นเห็นได้ชัดเจนว่า $(S, *)$ เป็น LA^{**} -กึ่งกรุปปรกติ เนื่องจาก $1 = 1*1 = (1*1)*1, 2 = 2*2 = (2*2)*2, 3 = 4*3 = (3*3)*3, 4 = 4*4 = (4*3)*4$ และ $5 = 4*5 = (5*5)*5$

ตาราง 2 ตารางแสดงการดำเนินการ “ $\circ_4$ ” บนเซต S

$\circ_4$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	5	3	4
4	1	2	3	4	5
5	1	2	4	5	3

จากตารางเห็นได้ชัดเจนว่า $(S, \circ_4)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้าย ยิ่งไปกว่านั้น $(S, \circ_4)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติเนื่องจาก $1 = 1 \circ_4 1 = (1 \circ_4 1) \circ_4 1, 2 = 2 \circ_4 2 = (2 \circ_4 2) \circ_4 2, 3 = 4 \circ_4 3 = (3 \circ_4 5) \circ_4 3, 4 = 4 \circ_4 4 = (4 \circ_4 4) \circ_4 4$ และ $5 = 4 \circ_4 5 = (5 \circ_4 3) \circ_4 5$ โดยทฤษฎีบท 8 จะได้ว่า 4 เป็นสมาชิกรักษารกติใน S และ $4 \in R(S)$

ทฤษฎีบท 10. ถ้า a เป็นสมาชิกรักษารกติใน LA^{**} -กึ่งกรุปปรกติ $(S, *)$ แล้ว $(a*b)*S = b*S$ สำหรับทุกสมาชิก $b \in S$

การพิสูจน์ กำหนดให้ b เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S เห็นได้ชัดเจนว่า

$$\begin{aligned}
 (a*b)*S &= (a*b)*(S*S) \\
 &= (a*S)*(b*S) \\
 &= b*((a*S)*S) \\
 &\subseteq b*S
 \end{aligned}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $b*S \subseteq (a*b)*S$ เนื่องจาก a เป็นสมาชิกรักษารกติใน S จะได้ว่า $(S, \circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปรกติดังนั้นจะมีสมาชิก s ใน S โดยที่

$$\begin{aligned} b &= (b \circ_a s) \circ_a b \\ &= ((b*a)*s) \circ_a b \\ &= (((b*a)*s)*a)*b \\ &= (b*a)*((b*a)*s) \end{aligned}$$

ต่อไปกำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S โดยที่ $x \in b*S$ จึงได้ว่าจะมีสมาชิก r ใน S โดยที่ $x = b*r$ พิจารณา

$$\begin{aligned} x &= b*r \\ &= ((b*a)*((b*a)*s))*r \\ &= (r*((b*a)*s))*(b*a) \\ &= (a*b)*(((b*a)*s)*r) \in (a*b)*S \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $b*S \subseteq (a*b)*S$ นั่นคือ $(a*b)*S = b*S$ □

บทแทรก 11. ถ้า a เป็นสมาชิกรักษาลกติกในกึ่งกรุปเกือบซ้าย $(S, *)$ ที่มีเอกลักษณ์ซ้ายและ $a \in R(S)$ แล้ว $(a*b)*S = b*S$ สำหรับทุกสมาชิก $b \in S$

การพิสูจน์ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 10 □

กำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ในกึ่งกรุปเกือบซ้าย $(S, *)$ จะเรียก x ว่า **นิพพล (idempotent)** ใน $(S, *)$ ถ้า $x = x*x$ (ซึ่งเราสามารถเขียนแทน $x*x$ ด้วย x^2) และกำหนดเซต $E(S)$ หมายถึงเซตของนิพพลทั้งหมดของ $(S, *)$

ทฤษฎีบท 12. กำหนดให้ $(S, *)$ เป็น LA^{**} -กึ่งกรุปปกติโดยที่ $E(S) \neq \emptyset$ ถ้า x เป็นสมาชิกรักษาลกติกใน S แล้ว $((y*(r*r))*x)*x \in E(S)$ สำหรับทุกสมาชิก $y \in E(S)$

การพิสูจน์ เนื่องจาก x เป็นสมาชิกรักษาลกติกใน S จะได้ว่า $x \in R(S)$ โดยทฤษฎีบท 8 จะได้ว่า $(S*x)*y = (y*x)*S = S*y$ เพราะว่า $(S, *)$ เป็น LA^{**} -กึ่งกรุปปกติดังนั้นจะมีสมาชิก s ใน S โดยที่ $y = (y*s)*y \in S*y$ นั่นคือ $y \in (S*x)*y$ จะได้ว่า จะมีสมาชิก r ใน S โดยที่ $y = (r*x)*y$ เพราะว่า $y \in E(S)$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} [((y*(r*r))*x)*x]^2 &= (((y*(r*r))*x)*x)*(((y*(r*r))*x)*x) \\ &= (((y*(r*r))*x)*((y*(r*r))*x))*(x*x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (((y*y)*(r*r))*x)*(((y*y)*(r*r))*x))* (x*x) \\
 &= (((x*(r*r))*(y*y))*((x*(r*r))*(y*y)))* (x*x) \\
 &= (((r*(x*r))*(y*y))*((r*(x*r))*(y*y)))* (x*x) \\
 &= (((r*y)*((x*r)*y))*((r*y)*((x*r)*y)))* (x*x) \\
 &= (((y*(x*r))*(y*r))*((y*(x*r))*(y*r)))* (x*x) \\
 &= (((y^2*(x*r))*(y*r))*((y^2*(x*r))*(y*r)))* (x*x) \\
 &= (((r*x)*y^2)*(y*r))*((r*x)*y^2)*(y*r))* (x*x) \\
 &= (((r*x)*y)*(y*r))*((r*x)*y)*(y*r))* (x*x) \\
 &= ((y*(y*r))*(y*(y*r)))* (x*x) \\
 &= ((y*y)*((y*r)*(y*r)))* (x*x) \\
 &= (y*((y*r)*(y*r)))* (x*x) \\
 &= (y*((y*y)*(r*r)))* (x*x) \\
 &= (y*(y*(r*r)))* (x*x) \\
 &= ((x*x)*(y*(r*r)))* y \\
 &= (y*((x*x)*(r*r)))* y \\
 &= ((y*y)*((x*x)*(r*r)))* y \\
 &= (((r*r)*(x*x))*(y*y))* y \\
 &= (y*(y*y))*((r*r)*(x*x)) \\
 &= (y*y)*((r*r)*(x*x)) \\
 &= ((x*x)*(r*r))*(y*y) \\
 &= ((r*r)*(x*x))*(y*y) \\
 &= (x*((r*r)*x))*(y*y) \\
 &= ((y*y)*((r*r)*x))* x \\
 &= ((r*r)*(y*x))* x \\
 &= ((x*y)*(r*r))* x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (((r*r)*y)*x)*x \\
 &= (((r*r)*(y*y))*x)*x \\
 &= (((y*y)*(r*r))*x)*x \\
 &= ((y*(r*r))*x)*x
 \end{aligned}$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $((y*(r*r))*x)*x \in E(S)$ □

กำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ในกึ่งกรุปเกือบซ้าย $(S, *)$ ที่มีเอกลักษณ์ซ้าย จะเรียกสมาชิก x ว่า ตัวผกผันซ้าย [ตัวผกผันขวา] (left inverse [right inverse]) ใน $(S, *)$ ถ้ามีสมาชิก y ใน S ซึ่ง $e = x*y [e = y*x]$

ทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกรักษaprกติและตัวผกผันซ้าย ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 13. ถ้า $(S, *)$ เป็น LA -กึ่งกรุปปรกติที่มีเอกลักษณ์ซ้ายแล้วเงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1. a เป็นสมาชิกรักษaprกติใน S
2. a เป็นตัวผกผันซ้าย
3. $a \in R(S)$

การพิสูจน์ เห็นได้ชัดเจนว่าข้อความ 1 สมมูลกับข้อความ 3 ต่อไปสมมติให้ a สมาชิกรักษaprกติใน S จะได้ว่า $(S, \circ_a)$ เป็น LA -กึ่งกรุปปรกติ เนื่องจาก e เป็นสมาชิกใน S ดังนั้นจะมีสมาชิก s ใน S โดยที่

$$\begin{aligned}
 e &= (e \circ_a s) \circ_a e \\
 &= (((e*a)*s)*a)*e \\
 &= ((a*s)*a)*e \\
 &= (e*a)*(a*s) \\
 &= a*(a*s)
 \end{aligned}$$

นั่นคือ a เป็นตัวผกผันซ้ายใน S

สมมติให้ a เป็นตัวผกผันซ้ายจะได้ว่าจะมีสมาชิก r ใน S โดยที่ $e = a*r$ กำหนดให้ x เป็นสมาชิกใน S เนื่องจาก $(S, *)$ เป็น LA -กึ่งกรุปปรกติจึงได้ว่าจะมีสมาชิก s ใน S โดยที่

$$\begin{aligned}
 x &= (x*s)*x \\
 &= ((e*x)*(e*s))*x \\
 &= (((a*r)*x)*((a*r)*s))*x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (((a*r)*(a*r))*(x*s))*x \\
 &= ((a*((a*r)*r))*(x*s))*x \\
 &= (((x*s)*((a*r)*r))*a)*x \\
 &= (((r*(a*r))*(s*x))*a)*x \\
 &= (((r*(a*r))*(s*x))*a)*x \\
 &= (((r*(a*r))*((e*s)*(e*x))))*a)*x \\
 &= (((r*(a*r))*(((a*r)*s)*((a*r)*x))))*a)*x \\
 &= (((r*(a*r))*(((a*r)*(a*r))*(s*x))))*a)*x \\
 &= (((r*(a*r))*(((a*a)*(r*r))*(s*x))))*a)*x \\
 &= (((r*(a*r))*(((r*r)*s)*((a*a)*x))))*a)*x \\
 &= (((r*(a*r))*(((r*r)*s)*((x*a)*a))))*a)*x \\
 &= (((r*(a*r))*((x*a)*(((r*r)*s)*a))))*a)*x \\
 &= (((x*a)*((r*(a*r))*(((r*r)*s)*a))))*a)*x \\
 &= (((x*a)*((a*r^2)*((r^2*s)*a))))*a)*x \in (((x*a)*S)*a)*x
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x \in (((x*a)*S)*a)*x$ ทำให้ได้ว่าจะมีสมาชิก z ใน S โดยที่

$$\begin{aligned}
 x &= (((x*a)*z)*a)*x \\
 &= ((x \circ_a z)*a)*x \\
 &= (x \circ_a z) \circ_a x
 \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $(S, \circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $a \in R(S)$ นั่นคือ a เป็นสมาชิกรักษาด้านซ้ายใน S □

กำหนดให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ในกึ่งกรุปเกือบซ้าย $(S, *)$ จะเรียกสมาชิก e ว่าเอกลักษณ์กลาง (mididentity) ใน S ถ้า $(x*e)*y = x*y$ สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน S นอกจากนี้จะกำหนดเซต $M(S)$ หมายถึงเซตของสมาชิกเป็นเอกลักษณ์กลางทั้งหมดของ $(S, *)$ นั่นคือ

$$M(S) := \{e \in S \mid xy = (x * e) * y, \forall x, y \in S\}$$

ในตอนสุดท้ายได้หาลักษณะเฉพาะของสมาชิกรักษาปรกติใน LA^{**} -กึ่งกรุปปรกติ

ทฤษฎีบท 15. ถ้า $(S, *)$ เป็น LA^{**} -กึ่งกรุปปรกติที่มีเอกลักษณ์กลาง e แล้วเงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $a \in R(S)$
2. $M(S) \cap (S * a) \cap (a * S) \neq \emptyset$
3. a เป็นสมาชิกรักษาปรกติใน S

การพิสูจน์ เห็นได้ชัดจากข้อความ 1 สมมูลกับข้อความ 3 ต่อไปสมมติให้ a สมาชิกรักษาปรกติใน S จะได้ว่า $(S, \circ_a)$ เป็น LA -กึ่งกรุปปรกติ เนื่องจาก e เป็นสมาชิกใน S ดังนั้นจะมีสมาชิก s ใน S โดยที่

$$\begin{aligned} e &= (e \circ_a s) \circ_a e \\ &= (((e * a) * s) * a) * e \\ &= ((a * s) * (e * a)) * e \\ &= (e * (e * a)) * (a * s) \\ &= a * ((e * (e * a)) * s) \in a * S \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} e &= (e \circ_a s) \circ_a e \\ &= (((e * a) * s) * a) * e \\ &= ((a * s) * (e * a)) * e \\ &= ((a * e) * (s * a)) * e \\ &= (a * (s * a)) * e \\ &= (e * (s * a)) * a \in S * a \end{aligned}$$

นั่นคือ $e \in M(S) \cap (S * a) \cap (a * S) \neq \emptyset$

สมมติให้ข้อความที่ 2 เป็นจริง เนื่องจาก $M(S) \cap (S * a) \cap (a * S) \neq \emptyset$ จะได้ว่าจะมีสมาชิก x ใน S โดยที่ $x \in M(S) \cap (S * a) \cap (a * S)$ นั่นคือจะมีสมาชิก r และ s ใน S โดยที่ $x \in M(S)$, $x = a * r$ และ $x = s * a$ กำหนดให้ y เป็นสมาชิกใน S เนื่องจาก $(S, *)$ เป็น LA -กึ่งกรุปปรกติจึงได้ว่าจะมีสมาชิก z ใน S โดยที่

$$\begin{aligned} y &= (y * z) * y \\ &= ((y * z) * x) * y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((y*z)*(s*a))*y \\
&= ((a*s)*(z*y))*y \\
&= (((z*y)*s)*a)*y \\
&= (((((z*y)*x)*s)*a)*y \\
&= (((s*x)*(z*y))*a)*y \\
&= (((s*(s*a))*(z*y))*a)*y \\
&= (((s*z)*((s*a)*y))*a)*y \\
&= (((s*z)*((y*a)*s))*a)*y \\
&= (((y*a)*((s*z)*s))*a)*y \in (((y*a)*S)*a)*y
\end{aligned}$$

ดังนั้น $y \in (((y*a)*S)*a)*y$ ทำให้ได้ว่าจะมีสมาชิก b ใน S โดยที่

$$\begin{aligned}
x &= (((y*a)*b)*a)*y \\
&= ((y \circ_a b)*a)*y \\
&= (y \circ_a b) \circ_a y
\end{aligned}$$

จึงได้ว่า $(S, \circ_a)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบซ้ายปกติ จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $a \in R(S)$ นั่นคือ a เป็นสมาชิกรักษaprกติใน S □

สรุปผล

ในบทความนี้ได้นิยามสมาชิกรักษaprกติในกึ่งกรุปเกือบซ้ายและมีการตรวจสอบสมบัติต่างๆ ของสมาชิกรักษaprกติในกึ่งกรุปเกือบซ้าย นอกจากนี้ได้พิสูจน์ว่าถ้า $(S, *)$ เป็น LA^{**} -กึ่งกรุปปกติและ $a \in S$ แล้วเงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1. a เป็นสมาชิกรักษaprกติใน S
2. $(b*a)*S = S*b$ สำหรับทุกสมาชิก $b \in S$
3. $a \in R(S)$

นอกจากนี้ได้สร้างทฤษฎีบทที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกรักษaprกติและตัวผกผันซ้าย กล่าวคือทุกสมาชิกรักษaprกติใน LA -กึ่งกรุปปกติ $(S, *)$ ที่มีเอกลักษณ์ซ้ายจะเป็นตัวผกผันซ้ายและเป็นสมาชิกใน $R(S)$ ในตอนสุดท้ายได้หาลักษณะเฉพาะของสมาชิกรักษaprกติใน LA^{**} -กึ่งกรุปปกติ

เอกสารอ้างอิง

- Amjad, V., Yousafzai, F. & Iampan, A. (2015). On generalized fuzzy ideals of ordered LA -semigroups. *Boletín de Matematicas*, 22(1): 1 - 19.
- Arif, M., Khan, A., Shah, M. & Hussain, F. (2016). Some properties of slim AG-groupoids. *International Journal of Computer Science and Information Security*, 14(8): 819 – 826.
- Iqbal, M. & Ahmad, I. (2018). Ideals in CA -AG AG-groupoids. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 49(2): 265 - 284.
doi: 10.1007/s13226-018-0268-5
- Iqbal, M. & Ahmad, I. (2020). Note on left abelian distributive LA -semigroups. *Punjab University Journal of Mathematics*, 52(1): 47 – 63.
- Kausar, N., Alesemi, M. & Salahuddin. (2020). Anti fuzzy interior ideals on ordered AG-groupoids. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(1):113 - 129. doi: 10.29020/nybg.ejpam.v13i1.3576
- Kazim, M. A. & Naseerudin, M. (1972). On almost-semigroup. *Aligarh Bull. Math.*, 2: 1 - 7.
- Mushtaq, Q. & Yusuf, S.M. (1979). On locally associative LA -semigroups. *J. Nat. Sci. Math.*, 19, 57 - 62.
- Protic, P.V. & Boinovic, M. (1995). Some congruences on an AG^{**} -groupoid. *Filomat*, 9, 879 - 886.
- Shah, T. & Kausar, N. (2014). Characterizations of non-associative ordered semigroups by their fuzzy bi-ideals. *Theoretical Computer Science*, 529: 96 – 110. doi: 10.1016/j.tcs.2014.02.007
- Tapan, C. & Yiarayong, P. (2020). Some results in LA^{**} -semigroups. *The Mathematical Association of Thailand under the Patronage of His Majesty the King*,
- Younas, I. & Mushtaq, Q. (2019). On left permutable inverse LA -semigroups. *Maejo Int. J. Sci. Technol.*, 13(01), 10 – 18.
- Yousafzai, F., Khan, W., Khan, A. & Hila, K. (2016). I-V fuzzy set theory applied on po- LA -semigroups. *Afr. Mat.*, 27: 23-35. doi: 10.1007/s13370-015-0320-0.