

Academic Article

สมบัติวิทยากระแสของการทดสอบการไหลยืดดึง

Rheology properties of elongational flow experiments

ชาญยุทธ โกลิตะวงษ์

Chanyut Kolitawong

ศูนย์วิจัยพอลิเมอร์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและการบิน-อวกาศ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้า
พระนครเหนือ บางซื่อ กรุงเทพฯ 10800

Polymer Research Center, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's
University of Technology North Bangkok, Bangsue, Bangkok 10800, Thailand

E-mail: chanyut.k@eng.kmutnb.ac.th

Received: 18/11/2018; Revised: 26/08/2019; Accepted: 12/09/2019

บทคัดย่อ

บทความนี้จะอธิบายถึงการทดสอบการไหลยืดดึง (extension flow experiments) ที่มีการทดสอบกันอยู่หลัก ๆ 3 รูปแบบคือ การดึงยืดทิศทางเดียว (uniaxial elongational flow) การดึงยืดสองทิศทาง (biaxial stretching flow) และการดึงยืดในระนาบ (planar elongational flow) โดยการทดสอบยืดดึงมาตรฐานทั้ง 3 แบบจะมีวิธีการทดสอบหลัก ๆ อยู่ 2 วิธีคือ การกำหนดอัตรายืดดึงคงตัว $\dot{\epsilon}_0$ เรียกว่าการทดสอบยืดดึงคงตัว (steady extension flow) และการกำหนดอัตรายืดดึงไม่คงตัว $\dot{\epsilon}(t)$ เช่น การทดสอบยืดหดเป็นรอบ (oscillatory extension) การเพิ่มความเค้นยืดดึง (elongational stress growth) การคลายตัวของความเค้นยืดดึงหรือการดึงยืดเป็นขั้น (elongation relaxation or step elongational strain) และการดึงคืบ (elongational creep) เป็นต้น เพื่อให้ให้นักวิจัยที่ทำงานทางด้านวิทยากระแสของทางสมาคมได้ใช้ตัวแปรและสมบัติวิทยากระแสที่ได้จากการทดสอบเหล่านี้ด้วยตัวแปรเดียวกัน ทางสมาคมวิทยากระแสแห่งสหรัฐอเมริกา (society of rheology, USA) ได้ออกประกาศการกำหนดสัญลักษณ์ของตัวแปรและสมบัติวิทยากระแสที่ได้จากการทดสอบเหล่านี้มาอย่างต่อเนื่อง

คำสำคัญ: สมบัติวิทยากระแส การทดสอบยืดหดเป็นรอบ การดึงคืบ การทดสอบการเพิ่มความเค้นยืดดึง การทดสอบการคลายตัวของความเค้นยืดดึง

Abstract

The objective of this article is to discuss on rheology properties used in 3 types of conventional extension flow experiments; uniaxial, biaxial and planar elongational flows. These standard flow experiments can be tested in either steady extensional rate $\dot{\epsilon}_0$ which is called steady elongational flow, and unsteady extensional rate $\dot{\epsilon}(t)$ such as extensional oscillatory, stress growth, stress relaxation (or some time called step elongational strain) and creep experiments. To synchronize these standard test properties and symbol notations, the society of rheology (SOR), United State of America, has declared those properties and symbol notations for its rheologist members from time to time.

Keywords: rheology of elongational flows, oscillatory elongation, elongational stress growth, elongational creep, elongation relaxation.

บทนำ

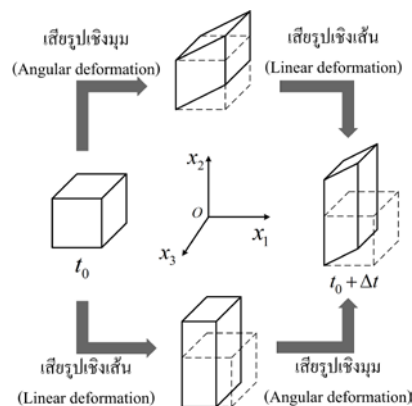
การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเสียรูปของวัตถุในช่วงเวลาที่สนใจ โดยที่แรงนั้นจะทำให้วัตถุเกิดการเสียรูปอย่างถาวรและเกิดเป็นการไหลของสสารเป็นศาสตร์ที่ทางราชบัณฑิตยสถานเรียกว่าวิทยากระแส (rheology) หรือบางท่านเรียกทับศัพท์ว่ารีโอโลยี ซึ่งเป็นศาสตร์ที่เกิดขึ้นในช่วงราวกลางคริสต์ศตวรรษที่ 20 (Tanner, 2002; Kolitawong, 2003; Kolitawong & Giacomini, 2009) การไหลแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มหลัก ๆ คือ การไหลแบบเฉือน (shear flow) และการไหลที่ไม่มีการเฉือน (shear free flow) หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าการไหลยืดดึง (elongational flow) การไหลแบบเฉือนเป็นการไหลของของไหลในช่องแคบหรือไหลในท่อ ซึ่งกระบวนการผลิตพลาสติกแทบทั้งหมด เช่น การอัดรีด (extrusion) การฉีดเข้าแม่พิมพ์ (injection molding) และการกดอัดเข้าแม่พิมพ์ (compression molding) จะเกี่ยวกับการไหลแบบเฉือนนี้ ส่วนการไหลแบบที่ไม่มีการเฉือนจะเกิดจากการยืดดึงเป็นหลัก เช่น การยืดดึงในกระบวนการหลอมปั่นเส้นใย (fiber melt spinning) กระบวนการเป่าถุง (film blowing) และการเป่าเข้าแม่พิมพ์ (blow molding) เป็นต้น ในขณะที่การไหลในช่องแคบหรือไหลในท่อนั้นบางครั้งของไหลอาจจะถูกยืดดึง (elongation) ไปพร้อม ๆ กันกับการไหลแบบเฉือนซึ่งเป็นธรรมชาติของการไหล เช่น การไหลผ่านช่องแคบหรือท่อลดขนาด เป็นต้น

เมื่อมีแรงกระทำจากภายนอกทำให้รูปทรงของก้อนของไหลเสียรูปไป (ตามความเร็วในการเปลี่ยนรูปทรง) ซึ่งทำให้เกิดความเค้นภายในก้อนของไหลดังแสดงในรูปที่ 1 โดยทั่วไปความเค้น (τ_{ij}) จะแปรผันกับอัตราการเสียรูปของก้อนของไหล ($\dot{\gamma}_{ij}$) ดังสมการที่ (1) (Pritchard, 2011; Cengel & Cimbala, 2014)

$$\tau_{ij} \propto \dot{\gamma}_{ij} \quad (1)$$

เมื่อ i และ j เป็นตำแหน่งบนเทนเซอร์ความเค้นและความเครียดซึ่งมีค่าเท่ากับ 1, 2, 3 และเป็นหมายเลขกำกับทิศทางของระบบแกน โดยแกน x_1, x_2, x_3 บางครั้งเรียกว่าแกน x, y, z ในระบบแกนพิกัดฉากตามลำดับ ซึ่งสมการที่ (1) สามารถเขียนอยู่ในรูปของเทนเซอร์ความเค้น $\underline{\tau}$ และเทนเซอร์อัตราเครียด $\underline{\dot{\gamma}}$ ได้คือ

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_{11} & \dot{\gamma}_{12} & \dot{\gamma}_{13} \\ \dot{\gamma}_{21} & \dot{\gamma}_{22} & \dot{\gamma}_{23} \\ \dot{\gamma}_{31} & \dot{\gamma}_{32} & \dot{\gamma}_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

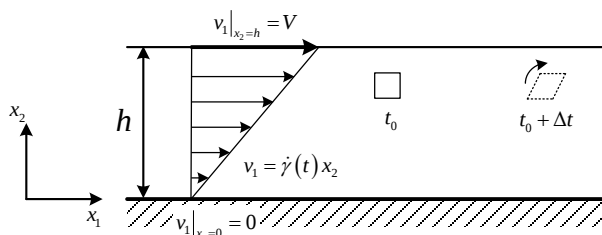


รูปที่ 1. แสดงก่อนอนุภาคของไหลที่มีการเคลื่อนที่ทำให้ก่อนอนุภาคมีการเสีรูปร่างเชิงเส้น เช่น การยืดดึง และการเสีรูปร่างเชิงมุม เช่น การบิดเบี้ยวไปพร้อม ๆ กัน โดยก่อนอนุภาคที่เวลา t_0 ยังไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ในขณะที่ก่อนอนุภาคเดิมที่เวลา $t_0 + \Delta t$ เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปแล้ว

พจน์ของอัตราเครียดนิยามโดย

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (3)$$

เมื่อ v_i และ v_j เป็นความเร็วของก้อนของไหล (fluid element) ในแนวแกน i และ j และ x_i และ x_j เป็นตำแหน่งของก้อนของไหลในแนวแกน i และ j ตามลำดับ เมื่อ $i, j = 1, 2, 3$ อัตราเครียดของวัสดุในสมการที่ (3) เกิดจากอัตราการเสีรูปร่างของวัสดุเชิงเส้น (linear deformation) เมื่อ $i = j$ ซึ่งอยู่ในตำแหน่งแนวทแยง (diagonal positions) ของเทนเซอร์อัตราเครียด และเกิดอัตราการเสีรูปร่างเชิงมุม (angular deformation) เมื่อ $i \neq j$ ซึ่งจะอยู่นอกตำแหน่งทแยงมุม (off-diagonal position) ของเทนเซอร์อัตราเครียด ทำให้สามารถแจกแจงประเภทของการไหลออกเป็น 2 กลุ่มคือการไหลแบบเฉือนและการไหลที่ไม่มีการเฉือน (pure shear and shear free flows) โดยในทางทฤษฎี การไหลแบบเฉือนจะเป็นการไหลที่มีค่าอัตราเครียดที่อยู่ในตำแหน่งทแยงมุมเป็นศูนย์ทั้งหมด และในทางกลับกัน การไหลที่ไม่มีการเฉือนจะเป็นการไหลที่มีค่าอัตราเครียดที่อยู่นอกตำแหน่งทแยงมุมเป็นศูนย์ทั้งหมด



รูปที่ 2. แสดงการไหลแบบเฉือนอย่างง่าย (simple shear flow) ในทิศทาง x_1 ด้วยความเร็ว V ระหว่างช่องแคบที่มีความสูง h

ยกตัวอย่างเช่นในการไหลที่ไม่สามารถอัดได้ (incompressible) และมีอุณหภูมิคงที่ (isothermal) ของไหลแบบนิวโทเนียนที่ถูกเฉือนระหว่างช่องแคบในทิศทาง x_1 ทำให้มีผลต่างความเร็ว V ที่ความสูง h ดังแสดงในรูปที่ 2 จะมีความเค้นเฉือน τ_{21} แปรผันตรงกับอัตราความเครียดเฉือน $\dot{\gamma}_{21}$ นั่นคือ (White, 2003; Munson et al., 2002)

$$\tau_{21} = -\mu \dot{\gamma}_{21} \quad (4)$$

เมื่อ μ คือความหนืดนิวโทเนียนซึ่งเป็นค่าคงที่ ในทำนองเดียวกันสำหรับของไหลแบบนอนนิวโทเนียน ความเค้นเฉือน τ_{21} ยังคงแปรผันกับอัตราความเครียดเฉือน $\dot{\gamma}_{21}$ แต่ค่าความหนืดนอนนิวโทเนียน η จะเป็นฟังก์ชันสเกลาร์คงตัวของอัตราเครียด $\dot{\gamma}$ (scalar invariants of strain rate) ดังแสดงในสมการที่ (5)

$$\tau_{21} = -\eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}_{21} \quad (5)$$

โดยในที่นี้อัตราความเครียดเฉือน $\dot{\gamma}_{21}$ คือ

$$\dot{\gamma}_{21} = \frac{V}{h} \quad (6)$$

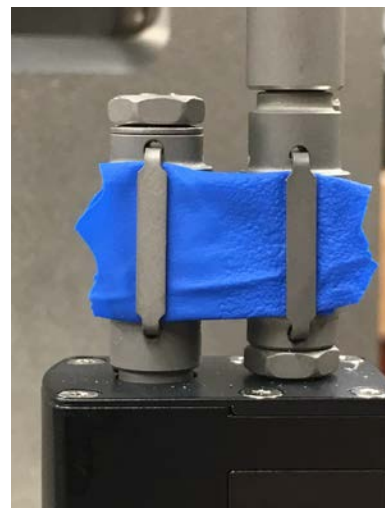
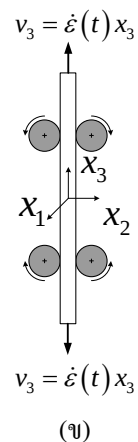
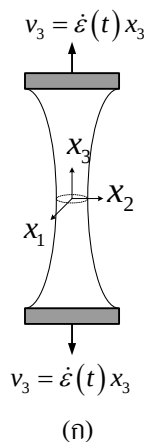
และฟังก์ชันสเกลาร์คงตัวของอัตราเครียด $\dot{\gamma}$ (scalar invariants of strain rate) คือ

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ji}} \quad (7)$$

สำหรับการวิเคราะห์ทางกลของสมบัติวิหยากระแสดและตัวแปรในการไหลแบบเฉือนสามารถอ่านเพิ่มเติมได้จาก Kolutawong (2018) เราเรียกสมการที่ (5) ว่าเป็นพฤติกรรมการไหลคล้ายนิวโทเนียน (generalized Newtonian fluid) และเราเรียกสมการแสดงพฤติกรรมของของไหลเมื่อมีแรงมากระทำทำให้ของไหลเปลี่ยนจากสถานะเดิมในสมการที่ (4) และ (5) ว่าสมการแสดงพฤติกรรม (constitutive equation) (Bird et al., 2015)

ถึงแม้ว่าการทดสอบยึดดึงในของไหลจะยากกว่าการทดสอบแบบเฉือน เนื่องจากการจับยึดของไหลเพื่อยึดนั้นทำได้ยากกว่า (Barroso et al., 2003) แต่อย่างที่กล่าวไว้ข้างต้นว่าธรรมชาติของการไหลจะต้องมีทั้งการไหลแบบเฉือนและการไหลยึดดึงควบคู่กันไป วัตถุประสงค์ของบทความนี้ต้องการอธิบายถึงวิหยากระแสดในการทดสอบ

ยืดดึง (rheology of elongational flow experiments) แบบต่าง ๆ ที่นิยมใช้ เช่น สมบัติวิทยากระแสของวัสดุและพฤติกรรมการไหลยืดดึงทิศทางเดียว สองทิศทางและในระนาบที่ได้จากการทดสอบนั้น บทความนี้จะกล่าวถึงสมบัติวิทยากระแสจากการทดสอบการไหลที่ไม่ขึ้นกับเวลาซึ่งมีแค่เพียงการทดสอบยืดดึงคงตัว ในขณะที่การทดสอบการไหลอื่น ๆ เป็นแบบที่ขึ้นอยู่กับเวลา (unsteady flow) เช่น การทดสอบยืดหดเป็นรอบ การทดสอบการเพิ่มความเค้น การทดสอบการคลายตัวของความเค้นยืดดึง และการคืบ ซึ่งเป็นการทดสอบมาตรฐานที่ทางสมาคมวิทยากระแสแห่งสหรัฐอเมริกา (society of rheology, USA) กำหนดให้นักวิจัยใช้ทดสอบในห้องปฏิบัติการทั่วไป



รูปที่ 3. ตัวอย่างการดึงในทิศทางเดียวของ (ก) เส้นใย (Anna & McKinley, 2001) และ (ข) แผ่นฟิล์ม (ค) ชิ้นงานยาง
ทรงรูปบนเครื่องทดสอบความเค้นแรงดึงตามมาตรฐาน ASTM (D 412 – 98a) (ASTM International, 2003); และ (ง)
ชิ้นงานยางทรงรูปบนเครื่องทดสอบการยืดดึงแบบหัวหมุนคู่ (dual windup extensional rheometer) (Sentmanat, 2003;
2004)

การไหลยืดดึง

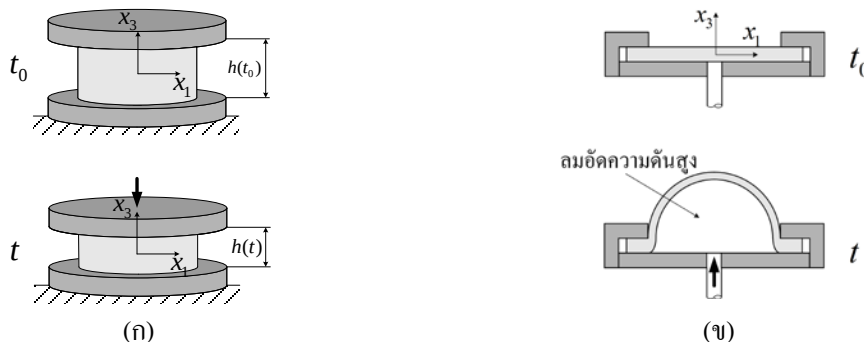
การไหลแบบยืดดึง (elongational or stretching flow) เป็นการไหลที่ไม่มีการเฉือน (shear free flow) จะเป็นการไหลที่มีค่าอัตราเครียดที่อยู่นอกตำแหน่งทแยงมุมเป็นศูนย์ทั้งหมดทำให้เหลืออัตราเครียดในตำแหน่งแนวทแยงมุม (แกนหลัก) 3 ตัวในสมการที่ (3)

$$\dot{\gamma}_{11} = 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \dot{\gamma}_{22} = 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \dot{\gamma}_{33} = 2 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (8), (9), (10)$$

นอกจากนี้การไหลสำหรับวัสดุที่อัดตัวไม่ได้ยังถูกควบคุมด้วยกฎอนุรักษ์มวลกล่าวคือ (Róžańska, 2017)

$$\dot{\gamma}_{11} + \dot{\gamma}_{22} + \dot{\gamma}_{33} = 0 \quad (11)$$

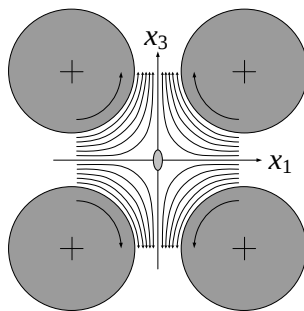
ดังนั้นการทำการทดลองที่ง่ายที่สุดในการไหลที่ไม่มีการเฉือนจะเป็นการควบคุมความเร็วในทิศทางเดียวด้วยการดึงวัสดุทดสอบซึ่งเราเรียกว่าการยืดดึงทิศทางเดียว (uniaxial elongational flow) เหมาะกับวัสดุทดสอบที่เป็นเส้นใย (filament stretching) (Torres et al., 2014; McKinley & Sridhar, 2002) หรือขึ้นทดสอบมาตรฐานตาม ASTM (D 412 – 98a) (ดูรูปที่ 3) ส่วนวัสดุทดสอบที่เป็นแผ่นจะเหมาะกับการทดสอบการยืดดึงสองทิศทาง (biaxial stretching flow) (Wangchai, 2005; Wangchai et al., 2008; 2011) ดังแสดงในรูปที่ 4 และสุดท้ายจะกล่าวถึงการยืดดึงในระนาบ (planar elongational flow) จะเป็นการทดสอบการยืดดึงที่ไม่มีการหมุน (irrotational flow) ในเนื้อวัสดุ (ดูรูปที่ 5)



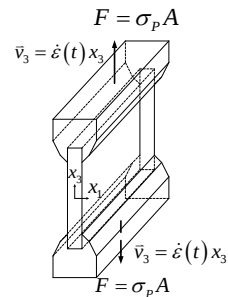
รูปที่ 4. ตัวอย่างการทดสอบการยืดดึงสองทิศทาง (biaxial stretching flow) ด้วย (ก) วิธีกดอัด (lubricated squeezing flow) (Song et al., 2007) และ (ข) วิธีเป่าแผ่นฟิล์มให้พองลม (bubble inflation method)

ตารางที่ 1. ค่าอัตรายืดดึง (elongational rate) $\dot{\epsilon}(t)$ และตัวแปล b ที่ขึ้นอยู่กับรูปแบบการยืดดึง

รูปแบบการยืดดึง	อัตรายืดดึง $\dot{\epsilon}(t)$	b
การดึงยืดทิศทางเดียว (uniaxial elongational flow)	$\dot{\epsilon}(t) > 0$	$b = 0$
การดึงยืดสองทิศทาง (biaxial stretching flow)	$\dot{\epsilon}(t) < 0$	$b = 0$
การดึงยืดในระนาบ (planar elongational flow)	$\dot{\epsilon}(t) > 0$	$b = 1$



(ก)



(ข)

รูปที่ 5. ตัวอย่างการยืดดึงในระนาบด้วย (ก) วิธียืดดึงด้วยลูกกลิ้งสี่ตัวของเทอร์เลอร์ (Taylor's four-roller apparatus) หมุนปั่นของเหลวเพื่อยืดดึงหยดสารละลายเหลวที่อยู่ตรงกลาง (Taylor, 1934; Sharma et al., 2014; Brimmo & Qasaimeh, 2017) และ (ข) วิธีดึงแผ่นชิ้นงานด้วยเครื่องทดสอบการยืดดึง (tensile test machine)

สมบัติกระแสวิทยาที่ได้จากการทดสอบยืดดึงเหล่านี้แทบจะไม่มีคามหมายเลยหากไม่สามารถนำไปใช้ในสมการแสดงพฤติกรรม (constitutive equations) (Petrie, 2006; Khan & Larson, 1987; 1990) เพื่อนำไปใช้ในการทำนายผลการไหลของวัสดุในสถานการณ์ต่าง ๆ เช่นการขึ้นรูปพลาสติก กระบวนการแปรรูปอาหาร การไหลของเลือดผ่านช่องแคบได้อย่างแม่นยำ โดยสมการความเร็วในการยืดดึงทั้ง 3 จะเขียนได้ดังสมการที่ (12)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\epsilon}(t)}{2}(1+b)x_1 \\ -\frac{\dot{\epsilon}(t)}{2}(1-b)x_2 \\ \dot{\epsilon}(t)x_3 \end{pmatrix}_{123} \quad (12)$$

เมื่อ $\dot{\epsilon}(t)$ คืออัตรายืดดึง (elongational rate) และ b มีค่าเป็น 0 หรือ 1 จะถูกกำหนดจากรูปแบบการยืดดึงและถูกสรุปไว้ในตารางที่ 1 ซึ่งจะกล่าวถึงโดยละเอียดต่อไป โดยความเครียดยืดดึงมีความสัมพันธ์กับอัตรายืดดึงคือ

$$\epsilon(t_{ref}, t) \equiv \int_{t_{ref}}^t \dot{\epsilon}(t') dt' \quad (13)$$

โดย t_{ref} เป็นเวลาเริ่มต้นซึ่งโดยทั่วไปจะเป็นศูนย์ (0) และ t' คือตัวแปรดัมมี่ของการอินทิเกรต (dummy of integration) ซึ่งจะหายไปหลังจากการแทนค่าเวลาดังแต่ $t' = t_{ref}$ ถึง $t' = t$ ใด ๆ แล้ว การทดสอบยืดดึงสามารถกระทำได้ 2 แบบคือควบคุมความเค้นแล้ววัดความเครียด หรือควบคุมความเครียดแล้ววัดความเค้น [ดูหัวข้อ 5.3.2 ของ Menard (2008)] สำหรับของไหลแบบอัดตัวไม่ได้ค่าความเค้นยืดดึงที่ต้องการวัดมีเพียง 2 ค่าคือ $\tau_{33} - \tau_{11}$ และ $\tau_{22} - \tau_{11}$ เนื่องจากความเร็วในเนื้อวัสดุค่อนข้างไม่เป็นเชิงเส้นและกระจายตัวไม่เท่ากันในแต่ละจุดของตำแหน่งวัสดุทำให้ความเค้นยืดดึงที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุไม่เท่ากันเช่นเดียวกัน (เนื่องจากความเค้นยืดดึงเป็นฟังก์ชันของความเร็วในเนื้อวัสดุ) ดังนั้นการวัดความเค้นยืดดึงในเนื้อวัสดุที่เกิดจากการดึง จะใช้เทคนิคการวัดที่หลากหลายเช่น

ใช้การวัดการเคลื่อนที่ของวัสดุจากดัชนีหักเหของแสงในเนื้อวัสดุ (flow birefringence) ในแต่ละช่วงเวลา หรือใช้วิธีติดตารางบนพื้นผิววัสดุและบันทึกวิดีโอ (video tapping) เพื่อการเคลื่อนที่ของวัสดุในขณะทดสอบ (Nguyen et al., 2015) เป็นต้น การเคลื่อนที่ของวัสดุจะก่อให้เกิดความเครียดยืดดึงของวัสดุและสัมพันธ์กับอัตราเครียดยืดดึงตามสมการที่ (13) รายละเอียดเพิ่มเติมเกี่ยวกับเครื่องมือวัดและทดสอบแบบยืดดึงโดยละเอียดสามารถหาอ่านเพิ่มเติมได้ในบทที่ 7 ของ Macosko (1994)

ตารางที่ 2. แสดงการควบคุมข้อมูลเข้า-ออก (Input and Output) ในการทดลองยืดดึงทิศทางเดียว (Uniaxial elongation) แบบควบคุมอัตรายืดดึงคงตัว $\dot{\epsilon}_0$ ที่ช่วงเวลาที่ต้องการ

(ก) ยืดดึงคงตัว (steady elongation)	(ข) ยืดหดเป็นรอบ (oscillatory elongation)	(ค) การเพิ่มความเค้นยืดดึง (elongational stress growth)	(ง) การคลายตัวของความเค้นยืดดึง (elongational stress relaxation)

ตัวแปรและสมบัติวิทยากระแสนในการไหลยืดดึงในบทความนี้อ้างอิงสมาคมวิทยากระแสนแห่งสหรัฐอเมริกา (society of rheology, USA) ที่ได้แต่งตั้งคณะกรรมการทำความตกลงร่วมกันในการใช้สมบัติวิทยากระแสนและตัวแปรที่ได้จากการทดสอบมาตรฐานเหล่านี้ (Dealy, 1984; 1995; Ad Hoc Committee on Official Nomenclature and Symbols, 2013) และได้ประกาศให้กับนักวิจัยที่ทำงานทางด้านวิทยากระแสนได้ใช้ตัวแปรและสมบัติวิทยากระแสนที่ได้จากการทดสอบในทิศทางเดียวกัน ถึงแม้ว่าในบทความนี้จะรวบรวมสมบัติวิทยากระแสนของการทดสอบการไหลยืดดึงที่ใช้กันมากไว้แล้ว แต่ยังมีสมบัติวิทยากระแสนบางตัวที่ไม่ได้กล่าวถึงในที่นี้

ตารางที่ 3. สรุปลักษณะของวัสดุและฟังก์ชันของวัสดุที่เกิดจาก $\tau_{33} - \tau_{11}$ และ $\tau_{22} - \tau_{11}$ ในการทดสอบยืดดึงคงตัว (steady elongational flow) แบบต่าง ๆ

การทดสอบ	ความเร็วของวัสดุ	$-\frac{\tau_{33} - \tau_{11}}{\dot{\epsilon}_0}$	$-\frac{\tau_{22} - \tau_{11}}{\dot{\epsilon}_0}$
(ก) ยืดดึงทิศทางเดียวคงตัว (steady uniaxial elongational flow) [$b = 0$ และ $\dot{\epsilon}_0 > 0$]	$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\epsilon}_0}{2}x_1 \\ -\frac{\dot{\epsilon}_0}{2}x_2 \\ \dot{\epsilon}_0x_3 \end{pmatrix}_{123}$	$-\frac{\sigma_E}{\dot{\epsilon}_0} = \eta_E(\dot{\epsilon}_0)$	0
(ข) ยืดดึงสองทิศทางคงตัว (steady biaxial elongational flow) [$b = 0$ และ $\dot{\epsilon}_0 < 0$]	$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\epsilon}_0}{2}x_1 \\ -\frac{\dot{\epsilon}_0}{2}x_2 \\ \dot{\epsilon}_0x_3 \end{pmatrix}_{123}$	$-\frac{\sigma_B}{\dot{\epsilon}_0} = \eta_B(\dot{\epsilon}_0)$	0
(ค) ยืดดึงในระนาบคงตัว (steady planar elongational flow) [$b = 1$ และ $\dot{\epsilon}_0 > 0$]	$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\dot{\epsilon}_0x_1 \\ 0 \\ \dot{\epsilon}_0x_3 \end{pmatrix}_{123}$	$-\frac{\sigma_{P_1}}{\dot{\epsilon}_0} = \eta_{P_1}(\dot{\epsilon}_0)$	$-\frac{\sigma_{P_2}}{\dot{\epsilon}_0} = \eta_{P_2}(\dot{\epsilon}_0)$

หมายเหตุ $\eta_E(\dot{\epsilon}_0)$ คือความหนืดยืดดึงทิศทางเดียว, $\eta_B(\dot{\epsilon}_0)$ คือความหนืดยืดดึงสองทิศทาง และ $\eta_{P_1}(\dot{\epsilon}_0)$ และ $\eta_{P_2}(\dot{\epsilon}_0)$ คือความหนืดยืดดึงในระนาบลำดับที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

การทดสอบยืดดึงคงตัว

ในการทดสอบยืดดึงคงตัวทิศทางเดียว (steady uniaxial elongational flow) ซึ่งทดสอบจะถูกยืดดึงในทิศทาง x_3 ดังแสดงในรูปที่ 6 โดยจะควบคุมอัตราเครียดยืดดึงให้คงที่นั่นคือ

$$\dot{\epsilon}(t) = \dot{\epsilon}_0 \quad (14)$$

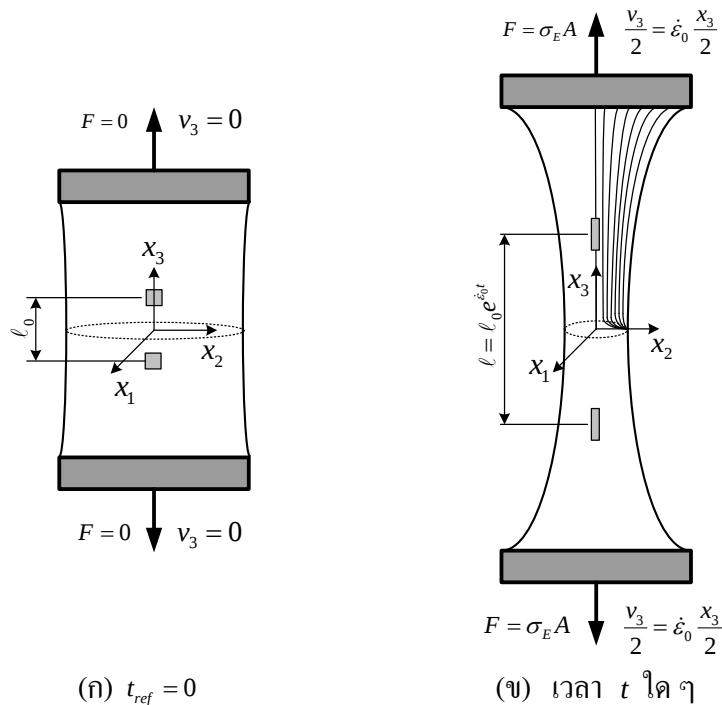
แล้วทำการวัดการตอบสนองของความเครียดยืดดึงและความเค้นยืดดึงดังแสดงในตารางที่ 2 (ก) เมื่อก่อนอนุภาคในชั้นทดสอบการดึงทิศทางเดียวถูกดึงด้วยอัตรายืดดึงคงที่ $\dot{\epsilon}_0$ ในทิศทาง x_3 ดังนั้นความเร็วในทิศทาง x_3 ซึ่งนิยามในสมการที่ (12) คือ

$$v_3 = \frac{dx_3}{dt} = \dot{\epsilon}_0 x_3 \quad (15)$$

อินทรีเกรตตั้งแต่เวลาเริ่มต้น $t_{ref} = 0$ ซึ่งก้อนของไหลอยู่ที่ตำแหน่ง $x_3 = \ell_0/2$ ถึงเวลา t ใด ๆ ก้อนของไหลอยู่ที่ตำแหน่ง $x_3 = \ell/2$ ใด ๆ ดังนั้น

$$\varepsilon = \int_{\ell_0/2}^{\ell/2} \frac{dx_3}{x_3} = \int_{t_{ref}=0}^t \dot{\varepsilon}_0 dt' \quad (16)$$

เมื่อความเครียดยืดดึง ε แสดงในสมการที่ (13) ดังนั้นระยะ ℓ ระหว่างก้อนของไหลที่อยู่ระหว่างการดึงแบบคงตัว จะมีความสัมพันธ์กับความเครียดแบบเฮนคีส (Hencky strain) (ดูรูปที่ 6)



รูปที่ 6. แสดงระยะทางระหว่างก้อนอนุภาคในการดึงทิศทางเดียวที่ถูกดึงด้วยอัตรายืดดึงคงที่ $\dot{\varepsilon}_0$ (ก) ก้อนของไหลที่เวลาเริ่มต้น $t_{ref} = 0$ และ (ข) ก้อนของไหลที่เวลา t ใด ๆ เส้นที่มูมบนขวาแสดงเส้นทางการไหล (streamlines) ในเนื้อวัสดุ

$$\varepsilon = \dot{\varepsilon}_0 t = \ln \frac{\ell}{\ell_0} \quad (17)$$

และมีความเร็วของวัสดุและฟังก์ชันของวัสดุที่เกิดจาก $\tau_{33} - \tau_{11}$ และ $\tau_{22} - \tau_{11}$ ในการทดสอบยืดดึงคงตัว (steady elongational flow) แบบต่าง ๆ ดังแสดงในตารางที่ 3 โดยทั่วไปแล้วความหนืดยืดดึงทิศทางเดียว η_E ที่อัตราเฉือนต่ำ ๆ จะมีค่าเป็น 3 เท่าของความหนืดที่อัตราเฉือนเป็นศูนย์ η_0 (zero-shear-rate viscosity) ที่ได้จากการทดสอบแบบเฉือน

$$\lim_{\dot{\varepsilon}_0 \rightarrow 0} \eta_E = 3\eta_0 \quad (18)$$

และความหนืดยืดหยุ่นเชิงทวิทางเดียว η_E สำหรับของไหลนิวโทเนียนบางครั้งจะถูกรเรียกว่าความหนืดทวิทางเดียว η_T เพื่อเป็นเกียรติแก่ผู้ค้นพบความสัมพันธ์นี้ (Trouton, 1906) ในขณะที่ความหนืดยืดหยุ่นเชิงทวิทางเดียวที่อัตราเฉือนต่ำ ๆ ความหนืดยืดหยุ่นเชิงทวิทางเดียว η_B จะมีค่าเป็น 6 เท่าของความหนืดที่อัตราเฉือนเป็นศูนย์ η_0 (Bird et al., 1977; 1987)

$$\lim_{\dot{\epsilon}_0 \rightarrow 0} \eta_B(\dot{\epsilon}_0) = 6\eta_0 \quad (19)$$

การทดสอบยืดหดเป็นรอบ

การทดสอบยืดหดเป็นรอบ (oscillatory elongation) สามารถกระทำได้หลายรูปแบบ (Menard, 2008) แต่รูปแบบที่ง่ายที่สุดคือการบีบ (หรือดึง) ชิ้นทดสอบที่อยู่ระหว่างหัวจับขึ้นทดสอบขึ้น-ลงไป-มา (ดูบทที่ 3 ของ Haddad, 1995) เช่น การทดสอบยืดหดเป็นรอบ (oscillatory elongation) ที่ได้จากเครื่องวิเคราะห์เชิงกลพลวัต (dynamic mechanical analyzer, DMA) ในวัสดุที่มีสมบัติแข็งและเหนียว (hard and tough materials) นอกจากจะเป็นการทดสอบการล้าตัว (fatigue) ของวัสดุ บางครั้งจะศึกษาเกี่ยวกับการเกิดรอยแตกร้าว (crack) เนื่องจากการล้าตัวของวัสดุด้วย (Jearanaisilawong et al., 2016) แต่ในที่นี้เราจะศึกษาวัสดุที่มีสมบัติหยุ่นหนืด (viscoelastic) ที่ไม่เกิดการล้าตัวเนื่องจากโครงสร้างของวัสดุไม่มีการเปลี่ยนแปลงไปตามความเครียดหรือการเสื่อมคุณภาพของสมบัติวัสดุไปตามเวลา (aging)

สำหรับพอลิเมอร์ที่มีสมบัติเป็นของแข็ง (solid polymer) การทดสอบยืดหดเป็นรอบนิยมทดสอบด้วยการควบคุมความเค้นยืดหยุ่นและวัดความเครียดยืดหยุ่นซึ่งสามารถดูเพิ่มเติมได้จากหัวข้อ 5.1 ของ Menard (2008) แต่เนื่องจากการศึกษาการดึงยืดของสารละลายพอลิเมอร์และพอลิเมอร์หลอมเหลวโดยมากจะทดสอบโดยควบคุมอัตราเครียดยืดหยุ่นและวัดความเค้นยืดหยุ่นดังแสดงในตารางที่ 2 (ข) โดยการกำหนดให้อัตราเครียดยืดหยุ่นของวัสดุคือ

$$\dot{\epsilon}(t) = \dot{\epsilon}_0 \cos \omega t \quad (20)$$

โดย $\dot{\epsilon}_0$ เป็นขนาดเป็นขนาดของอัตราเครียดยืดหยุ่น (elongational strain rate amplitude) ซึ่งมีความเครียดยืดหยุ่นเป็นไปตามสมการที่ (13)

$$\epsilon(0, t) = \int_0^t \dot{\epsilon}_0 \cos \omega t' dt' = \dot{\epsilon}_0 \sin \omega t \quad (21)$$

เมื่อ ϵ_0 เป็นขนาดของความเครียดยืดหยุ่น (elongational strain amplitude) มีค่าเป็นบวก (+) เสมอ และมีความสัมพันธ์กับขนาดของอัตราเครียดยืดหยุ่นคือ

$$\dot{\epsilon}_0 = \omega \epsilon_0 \quad (22)$$

โดยมากการทดสอบชนิดนี้มักจะนิยมทดสอบในรูปแบบยืดหดเป็นรอบทิศทางเดียว (oscillatory uniaxial elongation) (Kee & Fong, 1995) และยืดหดเป็นรอบสองทิศทาง (oscillatory biaxial stretching) แต่อย่างไรก็ตามการทดสอบยืดหดเป็นรอบในระนาบ (oscillatory planar elongation) ก็มีการทดสอบเพื่อใช้หาหลักการแยกตัวของหยดสารละลายพอลิเมอร์ (breaking of polymer solution droplet) (Li & Sarkar, 2005) แต่การคิดคำนวณจะแตกต่าง

จากการทดสอบยืดหดเป็นรอบทิศทางเดียวและสองทิศทางและไม่ได้กล่าวถึงในที่นี้ นอกจากนี้ถ้าขนาดของอัตราเครียดยืดหดเป็นรอบต่ำ (small amplitude oscillatory elongational flow, SAOE) สมการความเค้นยืดดึงจะมีความหยุ่นหนืดเชิงเส้นกับอัตราเครียดยืดดึง (linear viscoelastic behavior) แต่ถ้าขนาดของอัตราเครียดยืดหดเป็นรอบสูง (large amplitude oscillatory elongational flow, LAOE) สมการความเค้นยืดดึงจะไม่มี ความหยุ่นหนืดเชิงเส้นกับอัตราเครียดยืดดึง (nonlinear viscoelastic behavior) และสมบัติวิทยากระแสที่หาได้จากการทดสอบด้วยการควบคุมความเค้นยืดดึงแล้ววัดความเครียดยืดดึงจะแตกต่างจากการทดสอบโดยควบคุมอัตราเครียดยืดดึงแล้ววัดความเค้นยืดดึง ในที่นี้ขอกล่าวถึงแค่การทดสอบที่มีขนาดของอัตราเครียดยืดหดเป็นรอบต่ำ (SAOE) เท่านั้น สำหรับการทดสอบมีขนาดของอัตราเครียดยืดหดเป็นรอบสูง (LAOE) สามารถหาอ่านเพิ่มเติมได้จาก Bejenariu et al. (2010) และ Dessi et al. (2017)

สำหรับการทดสอบยืดหดเป็นรอบทิศทางเดียว (oscillatory uniaxial elongation) เวกเตอร์ความเร็วในการทดสอบยืดหดเป็นรอบทิศทางเดียว จะเป็นไปตามสมการที่ (12) ดังนั้นเทนเซอร์อัตราการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง (rate of deformation tensor) ในการทดสอบยืดหดเป็นรอบทิศทางเดียวคือ

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{\epsilon}_0 \cos \omega t & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\epsilon}_0 \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 2\dot{\epsilon}_0 \cos \omega t \end{pmatrix}_{123} \quad (23)$$

และค่าเทนเซอร์ความเค้นยืดดึงจะมีความสัมพันธ์ดังสมการที่ (24) นั่นคือ

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -2\sigma \end{pmatrix}_{123} \quad (24)$$

โดยความเค้นยืดดึงตอบสนอง (stress response) จะมีความถี่เท่ากับความถี่ของอัตราเครียดยืดดึงแต่มีระยะเฟสที่แตกต่างกัน (phase difference) กล่าวคือ

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (25)$$

โดย δ เป็นระยะเฟสที่แตกต่างกัน (phase difference) ระหว่างความเค้นยืดดึงและอัตราเครียดยืดดึง และ σ_0 เป็นขนาดของความเค้นยืดดึงตอบสนอง (elongational stress response amplitude) ซึ่งควรจะเป็นค่าคงที่ ดังนั้นเราสามารถหาว่า $\tau_{33} - \tau_{11}$ ได้จาก

$$\tau_{33} - \tau_{11} = -2\sigma - \sigma = -3\sigma \quad (26)$$

คูณตลอดสมการที่ (26) ด้วย -1 และแทนค่าสมการที่ (25) จะได้

$$-(\tau_{33} - \tau_{11}) = 3\sigma_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (27)$$

ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณจะได้

$$-(\tau_{33} - \tau_{11}) = 3\sigma_0 (\sin \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \delta) \quad (28)$$

เมื่อนิยามมอดุลัสยืดหยุ่นของยังส์ (Young's elastic modulus) คือ

$$E = -\frac{\tau_{33} - \tau_{11}}{\varepsilon(t)} \quad (29)$$

โดยความเครียดยืดดึง $\varepsilon(t)$ หาได้จากสมการที่ (13) เมื่อแทนค่าสมการที่ (28) ลงในสมการที่ (29) จะได้

$$-\frac{(\tau_{33} - \tau_{11})}{\varepsilon_0} = E' \sin \omega t + E'' \cos \omega t \quad (30)$$

โดยมีมอดุลัสสะสมยืดดึง (elongational storage modulus)

$$E'(\omega) = \frac{3\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos \delta \quad (31)$$

และมอดุลัสสูญเสียยืดดึง (elongational loss modulus)

$$E''(\omega) = \frac{3\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \delta \quad (32)$$

โดยมอดุลัสสะสมยืดดึงเป็นความสามารถของวัสดุในการดูดซับพลังงานระหว่างการรับโหลดและมอดุลัสสูญเสียยืดดึงเป็นการสูญเสีย (ปลดปล่อย) พลังงานจากการรับโหลดดังแสดงให้เห็นด้วยการเปรียบเทียบกับภาระคอนของลูกเทนนิสในรูปที่ 7 และมอดุลัสสะสมยืดดึงและมอดุลัสสูญเสียยืดดึงสัมพันธ์กับมอดุลัสสะสมและมอดุลัสสูญเสียในการทดสอบเฉือนเป็นรอบ (oscillatory shear) คือ

$$E' = 3G' \quad (33)$$

$$E'' = 3G'' \quad (34)$$

เมื่อ

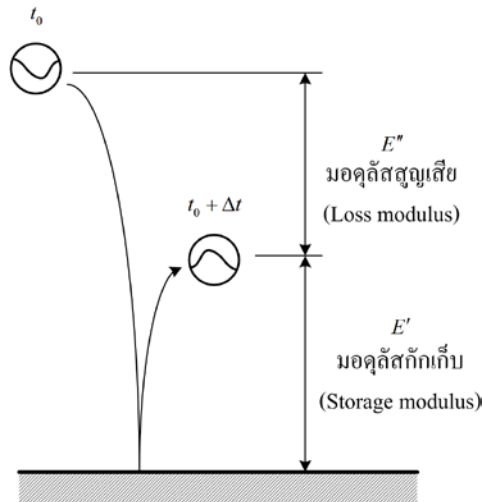
$$G'(\omega) = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cos \delta \quad (35)$$

$$G''(\omega) = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \sin \delta \quad (36)$$

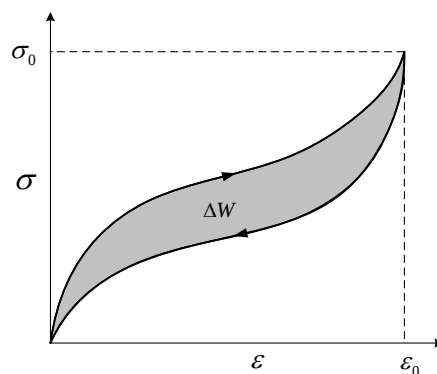
โดย G' คือมอดุลัสสะสม (storage modulus) และ G'' คือมอดุลัสสูญเสีย (loss modulus) จะเห็นได้ว่าการทดสอบเฉือนเป็นรอบ สามารถวัดได้ทั้งพฤติกรรมความยืดหยุ่นและพฤติกรรมของเหลวออกมาได้พร้อม ๆ กัน โดย γ_0 เป็นขนาดความเครียด และ τ_0 เป็นขนาดของความเค้นตอบสนอง (stress response amplitude) ซึ่งเป็นค่าคงที่ ในขณะที่การพล็อตระหว่างความเค้นยืดดึงและความเครียดยืดดึงในการทดสอบยืดหดเป็นรอบจะเกิดวงรอบฮิสเทอรีซิส (hysteresis loop) ดังแสดงในรูปที่ 8 ซึ่งเป็นงานที่สูญเสียต่อหน่วยพื้นที่ถ้าวัสดุมีสมบัติวิสโคอีลาสติก (viscoelastic property) นั่นคือ

$$\Delta W = \oint \sigma d\varepsilon \quad (37)$$

สมการที่ (37) แสดงให้เห็นว่าวัสดุที่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ (purely elastic) เท่านั้นที่จะไม่เกิดวงรอบฮิสเทอรีซิส (hysteresis loop) นั่นคือจะต้องใช้แรงดึงและปล่อยกลับที่เท่ากันที่ระยะยืดเดียวกัน การทดสอบยืดหดเป็นรอบมีการใช้ฟังก์ชันเชิงซ้อนเพื่อช่วยในการคำนวณเหมือนในการทดสอบเฉือนเป็นรอบเช่นกันแต่จะไม่กล่าวถึงในที่นี้



รูปที่ 7. แสดงการสะสม (storage) และการสูญเสีย (loss) พลังงานของลูกเทนนิสที่ถูกปล่อยให้ตกสู่พื้น



รูปที่ 8. แสดงวงรอบฮิสเทอรีซิส (hysteresis loop) ในการทดสอบยืดหดเป็นรอบเป็นงานที่สูญเสียต่อหน่วยพื้นที่ เนื่องจากวัสดุมีสมบัติวิสโคอีลาสติก (viscoelastic property)

การทดสอบการเพิ่มความเค้นยืดดึง

การทดสอบการเพิ่มความเค้นยืดดึง (elongational stress growth) ทำได้โดยการกำหนดอัตราเครียดดึงยืดแบบคงตัว $\dot{\epsilon}_0$ อย่างทันทีทันใดดังแสดงในตารางที่ 2 (ค) นั่นคือ

$$\dot{\epsilon}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dot{\epsilon}_0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (37)$$

และมีความเร็วของวัสดุและฟังก์ชันของวัสดุที่เกิดจาก $\tau_{33} - \tau_{11}$ และ $\tau_{22} - \tau_{11}$ ในการทดสอบการเพิ่มความเค้นยืดดึง (elongational stress growth) แบบต่าง ๆ ดังแสดงในตารางที่ 4 (Orr & Sridhar, 1999; Wang et al., 2011; Bhattacharjee et al., 2016)

ตารางที่ 4. สรุปลักษณะของวัสดุและฟังก์ชันของวัสดุที่เกิดจาก $\tau_{33} - \tau_{11}$ และ $\tau_{22} - \tau_{11}$ ในการทดสอบการเพิ่มความเค้นยืดดึง (elongational stress growth) แบบต่าง ๆ

การทดสอบ	ความเร็วของวัสดุ ที่เวลา $t \geq 0$	$-\frac{\tau_{33} - \tau_{11}}{\dot{\epsilon}_0}$	$-\frac{\tau_{22} - \tau_{11}}{\dot{\epsilon}_0}$
(ก) การเพิ่มความเค้นยืดดึง ทิศทางเดียว (uniaxial elongational startup) [$b = 0$ และ $\dot{\epsilon}_0 > 0$]	$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\epsilon}_0}{2} x_1 \\ -\frac{\dot{\epsilon}_0}{2} x_2 \\ \dot{\epsilon}_0 x_3 \end{pmatrix}_{123}$	$-\frac{\sigma_E}{\dot{\epsilon}_0} = \eta_E^+(t, \dot{\epsilon}_0)$	0
(ข) การเพิ่มความเค้นยืดดึง สองทิศทาง (biaxial elongational startup) [$b = 0$ และ $\dot{\epsilon}_0 < 0$]	$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\epsilon}_0}{2} x_1 \\ -\frac{\dot{\epsilon}_0}{2} x_2 \\ \dot{\epsilon}_0 x_3 \end{pmatrix}_{123}$	$-\frac{\sigma_B}{\dot{\epsilon}_0} = \eta_B^+(t, \dot{\epsilon}_0)$	0
(ค) การเพิ่มความเค้นยืดดึงใน ระนาบ (planar elongational startup) [$b = 1$ และ $\dot{\epsilon}_0 > 0$]	$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\dot{\epsilon}_0 x_1 \\ 0 \\ \dot{\epsilon}_0 x_3 \end{pmatrix}_{123}$	$-\frac{\sigma_{P_1}}{\dot{\epsilon}_0} = \eta_{P_1}^+(t, \dot{\epsilon}_0)$	$-\frac{\sigma_{P_2}}{\dot{\epsilon}_0} = \eta_{P_2}^+(t, \dot{\epsilon}_0)$

หมายเหตุ $\eta_E^+(t, \dot{\epsilon}_0)$ คือความหนืดยืดดึงทิศทางเดียว, $\eta_B^+(t, \dot{\epsilon}_0)$ คือความหนืดยืดดึงสองทิศทาง และ $\eta_{P_1}^+(t, \dot{\epsilon}_0)$ และ $\eta_{P_2}^+(t, \dot{\epsilon}_0)$ คือความหนืดยืดดึงในระนาบลำดับที่ 1 และ 2 ในการทดสอบการเพิ่มความเค้นยืดดึง

การทดสอบการเพิ่มความเค้นยืดดึง (elongational stress growth) เป็นการทดสอบที่เหมือนการทดสอบการเพิ่มความเค้นเฉือน (shear stress growth) กล่าวคือการทดสอบการเพิ่มความเค้นยืดดึง สามารถทำได้โดยการตั้งค่าอัตรายืดดึงคงตัว $\dot{\epsilon}_0$ อย่างทันทีทันใดเพื่อกระชากขึ้นทดสอบและเฝ้าดูการตอบสนองของความเค้นในเนื้อวัสดุจากอุปกรณ์วัดแรงที่ติดไว้อีกด้านหนึ่งของขึ้นทดสอบ ในขณะที่การทดสอบการลดลงของความเค้นยืดดึง (elongational stress decay) ไม่สามารถทำได้จริงในทางปฏิบัติ เนื่องจากไม่สามารถควบคุมให้เกิดการลดลงของอัตราเครียดดึงยืดแบบคงตัว $\dot{\epsilon}_0$ ในการทดสอบการลดลงของความเค้นยืดดึงได้ ดังนั้นจึงไม่มีความจำเป็นในการให้นิยามการทดสอบการลดลงของความเค้นยืดดึงแต่อย่างใด (Morrison, 2001)

การทดสอบการคลายตัวของความเค้นยืดดึง

การทดสอบการคลายตัวของความเค้นยืดดึงหรือการดึงยืดเป็นขั้น (elongation stress relaxation or step elongational strain) จะทำโดยการตั้งค่าอัตราเครียดยืดดึงคงตัว $\dot{\epsilon}_0$ ในช่วงเวลาสั้น ๆ t_0 ลงบนขึ้นทดสอบ (กระชากขึ้นทดสอบด้วยอัตราเครียดยืดดึงคงตัว $\dot{\epsilon}_0$ 1 ครั้งในช่วงเวลาสั้น ๆ t_0) ดังแสดงในตารางที่ 2 (ง) ทำให้ขึ้นทดสอบมีความเครียดยืดดึงอย่างถาวร ϵ_0

$$\epsilon(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dot{\epsilon}_0 t & 0 \leq t < t_0 \\ \epsilon_0 = \dot{\epsilon}_0 t_0 & t \geq t_0 \end{cases} \quad (38)$$

แล้วทำการวัดความเค้นยืดดึง σ ที่ค่อย ๆ คลายตัวลงเรื่อย ๆ โดยมีอัตราเครียดยืดดึงคือ

$$\dot{\epsilon}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dot{\epsilon}_0 & 0 \leq t < t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases} \quad (39)$$

ในช่วงต้นความเค้นยืดดึง $\sigma(t)$ อาจเกิดการกระชาก (overshoot) เนื่องจากแรงกระชากให้เกิดอัตราเครียดยืดดึงคงตัว $\dot{\epsilon}_0$ ในช่วงเวลา t_0 สั้น ๆ นั้น หลังจากเกิดความเครียดยืดดึงอย่างถาวร ϵ_0 ความเค้นยืดดึง $\sigma(t)$ จะค่อย ๆ คลายตัวลง (stress relaxation) (Wang et al., 2011) ฟังก์ชันของวัสดุที่เกิดจาก $\tau_{33} - \tau_{11}$ และ $\tau_{22} - \tau_{11}$ ในการทดสอบการคลายตัวของความเค้นยืดดึงแสดงในตารางที่ 5

การทดสอบการคลายตัวของความเค้นยืดดึงสามารถทดสอบด้วยการดึงเส้นใยทิศทางเดียว (filament stretching) ดังแสดงในรูปที่ 3 (ก) (Orr & Sridhar, 1996; 1999; Bhattacharjee et al., 2016) หรือการทดสอบการคลายตัวของความเค้นยืดดึงสามารถทดสอบโดยวิธีกดอัด (lubricated squeezing) ซึ่งเป็นการทดสอบแบบการคลายตัวของความเค้นยืดดึงสองทิศทางดังแสดงในรูปที่ 4 (ก) ได้ด้วย (Soskey & Winter, 1984; 1985) แต่อย่างไรก็ตาม การทดสอบการคลายตัวของความเค้นยืดดึงนิยมนิยามทดสอบเพื่อหาค่ามอดุลัสผ่อนคลาย (relaxation modulus) ในช่วงที่วัสดุมีความเครียดยืดดึง ϵ_0 คงที่

โดยทั่วไปแล้วมอดุลัสพ่อนคลายยืดดึงทิศทางเดียว (uniaxial extensional relaxation modulus) $E_E(t, \varepsilon_0)$ จะมีค่าเป็น 3 เท่าของมอดุลัสพ่อนคลายของวัสดุวิสโคอิลาสติกเชิงเส้น (relaxation modulus of linear viscoelastic) $G(t)$ ที่ได้จากการทดสอบการคลายตัวของความเค้นเฉือน (Barroso et al., 2003) กล่าวคือ

$$E_E(t, \varepsilon_0) \equiv \frac{\tau_{33} - \tau_{11}}{\varepsilon_0} = 3G(t) \quad (40)$$

และมอดุลัสพ่อนคลายยืดดึงสองทิศทาง (biaxial extensional relaxation modulus) $E_B(t, \varepsilon_0)$ ที่ความเครียดน้อย ๆ จะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับมอดุลัสพ่อนคลายของวัสดุวิสโคอิลาสติกเชิงเส้น (relaxation modulus of linear viscoelastic) $G(t)$ เช่นกัน (Soskey & Winter, 1985)

$$\lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} E_B(t, \varepsilon_0) \equiv \frac{\tau_{33} - \tau_{11}}{\varepsilon_0} = 6G(t) \quad (41)$$

เมื่อมอดุลัสพ่อนคลายของวัสดุวิสโคอิลาสติกเชิงเส้นสามารถเขียนอยู่ในรูปของสเปกตรัมของเวลาพ่อนคลาย (spectrum of relaxation times, λ_i) และมอดุลัสพ่อนคลาย (relaxation moduli, g_i)

$$G(t) = \sum_{i=1}^N g_i \exp(-t / \lambda_i) \quad (42)$$

ความสัมพันธ์นี้สามารถใช้ในการตรวจสอบผลการทดลองในการทดสอบการคลายตัวของความเค้นยืดดึงได้เป็นอย่างดีเนื่องจากปกติแล้ววัสดุที่มีสมบัติเป็นของไหลจะทำการทดสอบการไหลแบบเฉือนได้ง่ายกว่าการทดสอบการไหลแบบยืดดึง ในขณะที่การคลายตัวของความเค้นยืดดึงจะนานและการทดสอบการคลายตัวของความเค้นเฉือนจะให้ค่ามอดุลัสพ่อนคลายเดียวกัน (Khan & Larson, 1991)

การทดสอบการดึงคืบ

ต่างจากการทดสอบยืดดึงแบบอื่น ๆ การทดสอบการดึงคืบ (elongational creep) เป็นการทดสอบที่ให้ความเค้นยืดดึงคงตัว σ_0 เพื่อให้วัสดุเกิดความเครียดดึงคืบ $\varepsilon(0, t)$ ซ้ำ ๆ อย่างถาวร ทำได้อย่างง่าย ๆ โดยใช้ตุ้มน้ำหนัก (dead weight) แขนงถ่วงขึ้นทดสอบ (sample) ดังแสดงใน

รูปที่ 9 นั่นคือ

$$\tau_{33} - \tau_{11} \equiv \sigma = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sigma_0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (43)$$

โดย σ_0 คือค่าความเค้นยืดดึงคงตัว (steady elongational stress) และวัดความยาวที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลาดังแสดงใน

ตารางที่ 6 (ก) เมื่อกำหนดให้ความหยุ่นคืบยืดดึง (elongational creep compliance) คือ

$$D(t, \sigma_0) \equiv -\frac{\varepsilon(0, t)}{\sigma_0} \quad (44)$$

เมื่อความเครียดขึ้นกับ $\varepsilon(0, t)$ นิยามในสมการที่ (13) ซึ่งหาได้จากความยาวที่เปลี่ยนแปลงไปตามช่วงเวลาที่ได้จากการวัด

ตารางที่ 5. สรุปความเร็วของวัสดุและฟังก์ชันของวัสดุที่เกิดจาก $\tau_{33} - \tau_{11}$ และ $\tau_{22} - \tau_{11}$ ในการทดสอบการคลายตัวของความเค้นยืดดึง (elongational stress relaxation) แบบต่าง ๆ

การทดสอบ	ความเร็วของวัสดุ ที่เวลา $0 < t \leq t_0$	$-\frac{\tau_{33} - \tau_{11}}{\dot{\varepsilon}_0}$	$-\frac{\tau_{22} - \tau_{11}}{\dot{\varepsilon}_0}$
(ก) การคลายตัวของความเค้น ยืดดึงทิศทางเดียว (uniaxial elongational relaxation) [$b = 0$ และ $\dot{\varepsilon}_0 > 0$]	$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\varepsilon}_0}{2} x_1 \\ -\frac{\dot{\varepsilon}_0}{2} x_2 \\ \dot{\varepsilon}_0 x_3 \end{pmatrix}_{123}$	$-\frac{\sigma_E}{\dot{\varepsilon}_0} = \eta_E(t, \dot{\varepsilon}_0)$	0
(ข) การคลายตัวของความเค้น ยืดดึงสองทิศทาง (biaxial elongational relaxation) [$b = 0$ และ $\dot{\varepsilon}_0 < 0$]	$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\varepsilon}_0}{2} x_1 \\ -\frac{\dot{\varepsilon}_0}{2} x_2 \\ \dot{\varepsilon}_0 x_3 \end{pmatrix}_{123}$	$-\frac{\sigma_B}{\dot{\varepsilon}_0} = \eta_B(t, \dot{\varepsilon}_0)$	0
(ค) การคลายตัวของความเค้น ยืดดึงระนาบ (planar elongational relaxation) [$b = 1$ และ $\dot{\varepsilon}_0 > 0$]	$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\dot{\varepsilon}_0 x_1 \\ 0 \\ \dot{\varepsilon}_0 x_3 \end{pmatrix}_{123}$	$-\frac{\sigma_{P_1}}{\dot{\varepsilon}_0} = \eta_{P_1}(t, \dot{\varepsilon}_0)$	$-\frac{\sigma_{P_2}}{\dot{\varepsilon}_0} = \eta_{P_2}(t, \dot{\varepsilon}_0)$

หมายเหตุ $\eta_E(t, \dot{\varepsilon}_0)$ คือความหนืดยืดดึงทิศทางเดียว, $\eta_B(t, \dot{\varepsilon}_0)$ คือความหนืดยืดดึงสองทิศทาง และ $\eta_{P_1}(t, \dot{\varepsilon}_0)$ และ $\eta_{P_2}(t, \dot{\varepsilon}_0)$ คือความหนืดยืดดึงในระนาบลำดับที่ 1 และ 2 ในการทดสอบการคลายตัวของความเค้นยืดดึง

การทดสอบการคลายตัวจากการดึงคืบ

การทดสอบการคลายตัวจากการดึงคืบ (elongational creep recovery test) เกิดจากการหยุดความเค้นยืดคืบคงตัว σ_0 อย่างทันทีทันใดด้วยการเอาตุ้มน้ำหนักออกแล้วเฝ้าดูการตอบสนองของความเครียด $\varepsilon_r(t)$ จากการวัดขนาดของชั้นทดสอบดังแสดงใน

ตารางที่ 6 (ข) โดยมีกำหนดความเค้นยืดคืบดังนี้

$$\tau_{33} - \tau_{11} \equiv \sigma = \begin{cases} \sigma_0 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (45)$$

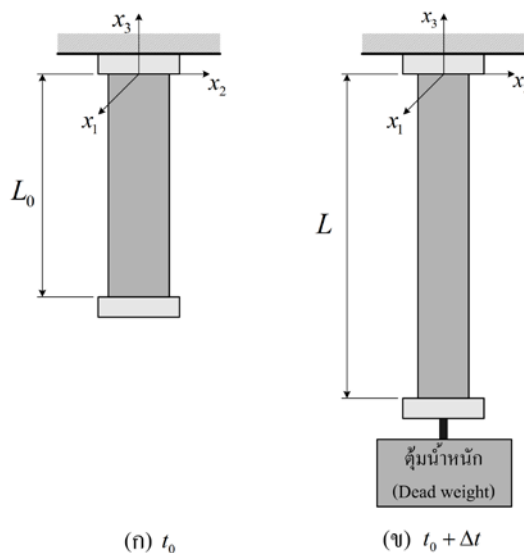
สมบัติทางวิทยากระแสนของการทดสอบจะเป็นฟังก์ชันของเวลา t และความเค้นยืดคืบคงตัว σ_0 ที่ใช้ โดยมีค่าการคลายตัวของความหยุ่นคืบยืดคืบ (elongational creep recovery compliance) คือ

$$D_r(t, \sigma_0) \equiv -\frac{\varepsilon_r(t)}{\sigma_0} \quad (46)$$

เมื่อค่าความเครียดคืบผ่อนคลาย $\varepsilon_r(t)$ นิยามในสมการที่ (13) หาได้จาก

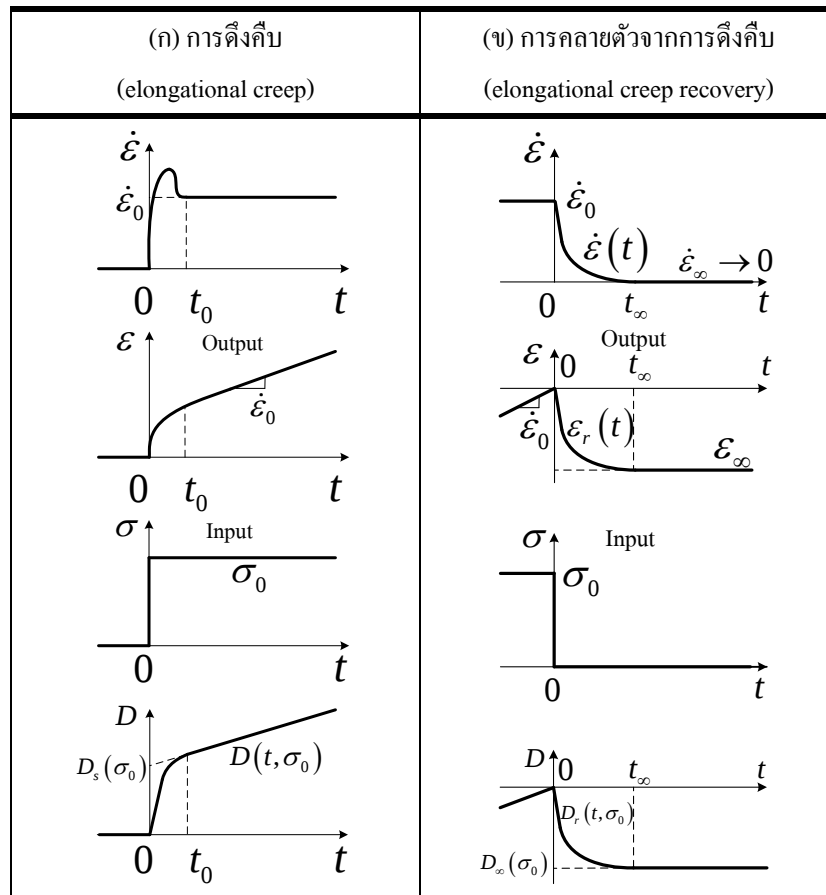
$$\varepsilon_r(t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}_r(t') dt' \quad (47)$$

เมื่อ t' คือตัวแปรดัมมี่ของการอินทิเกรต (dummy of integration) ซึ่งจะหายไปหลังจากการแทนค่าเวลาดังแต่ $t' = 0$ ถึง $t' = t$ ใด ๆ แล้ว และมีการทดสอบการดึงคืบตามด้วยการดึงคืบผ่อนคลายที่จะทดสอบเหมือนกับการทดสอบการคืบเลื่อนตามด้วยการคืบเลื่อนผ่อนคลาย



รูปที่ 9. การทดสอบการดึงคืบด้วยแรงคงที่จากตุ้มน้ำหนัก (dead weight) (ก) ที่เวลา t_0 ความยาวของชั้นทดสอบก่อนใส่ตุ้มน้ำหนัก L_0 และ (ข) ที่เวลา $t_0 + \Delta t$ ใด ๆ มีความยาวของชั้นทดสอบ L

ตารางที่ 6. แสดงการควบคุมข้อมูลเข้า-ออก (Input and Output) ในการทดลองการคืบและการคลายตัวจากการคืบ
คืบแบบควบคุมความเค้นยึดคืบคงตัว σ_0 ที่ช่วงเวลาที่ต้องการ



สรุป

การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเสียรูปของวัตถุที่ทำให้วัตถุเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างถาวรและเกิดเป็นการไหลของสสารในช่วงเวลาที่สนใจเป็นศาสตร์ที่เราเรียกว่าวิทยากระแส (rheology) การทดสอบสมบัติวิทยากระแสยึดคืบ (elongational flow experiments) มี 3 รูปแบบคือการทดสอบยึดคืบทิศทางเดียว (uniaxial elongational flow) การทดสอบคืบยึดสองทิศทาง (biaxial stretching flow) และการทดสอบคืบยึดในระนาบ (planar elongational flow) โดยการทดสอบทั้ง 3 แบบจะมีวิธีการทดสอบหลัก ๆ คือ การทดสอบยึดคืบคงตัว (steady elongational flow) การทดสอบยึดคืบเป็นรอบ (oscillatory elongation) การทดสอบการเพิ่มความเค้นยึดคืบ (elongational stress growth) การคืบ (elongational creep) และการทดสอบการคลายตัวของความเค้นยึดคืบหรือ

การดึงยืดเป็นขั้น (elongation relaxation or step elongational strain) ซึ่งการทดสอบมาตรฐานเหล่านี้ทางสมาคมวิทยากระแสดแห่งสหรัฐอเมริกา (society of rheology, USA) ได้ตั้งคณะกรรมการทำข้อตกลงร่วมกันในการกำหนดสมบัติวิทยากระแสดและตัวแปรที่ได้จากการทดสอบและได้ประกาศให้กับนักวิจัยที่ทำงานทางด้านวิทยากระแสดได้ใช้ตัวแปรและสมบัติวิทยากระแสดที่ได้จากการทดสอบเหล่านี้ให้เหมือนกัน

การทดสอบยืดหดเป็นรอบ (oscillatory elongation) เป็นวิธีการทดสอบที่น่าสนใจในการหาสมบัติพลวัตของวิทยากระแสด โดยมากจะใช้ทดสอบการล้าตัว (fatigue) ของวัสดุและการเกิดรอยแตกร้าว (crack) ในเนื้อวัสดุจากเครื่องวิเคราะห์เชิงกลพลวัต (dynamic mechanical analyzer, DMA) อีกรูปแบบหนึ่งที่น่าสนใจคือการทดสอบการดึงคืบ (elongational creep) เนื่องจากการทดสอบที่ง่ายด้วยการใช้ตุ้มน้ำหนัก (dead weight) แขนงถ่วงขึ้นทดสอบ (sample) แล้ววัดระยะยืดของชิ้นทดสอบเทียบกับเวลาเท่านั้น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณ นายพงศ์เทพ พ่วงทอง นักศึกษาระดับปริญญาเอก ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและการบิน-อวกาศ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ที่ช่วยอ่านตรวจทานต้นฉบับชุดนี้

เอกสารอ้างอิง

- Ad Hoc Committee on Official Nomenclature and Symbols. (2013). Official symbols and nomenclature of the society of rheology. *Journal of Rheology*, 57(4), 1047-1055. doi: 10.1122/1.4811184
- Anna, S. L. & McKinley G. H. (2001). Elasto-capillary thinning and breakup of model elastic liquids. *Journal of Rheology*, 45(1), 115-138. doi: 10.1122/1.1332389
- ASTM International. (2003). *D 412 – 98a: Standard Test Methods for Vulcanized Rubber and Thermoplastic Elastomers-Tension*. West Conshohocken, PA, USA: American Society for Testing and Materials. doi: 10.1520/D0412-98A
- Bejenariu, A. G., Rasmussen, H. K., Skov, A. L., Hassager, O. & Frankaer, S. M. (2010). Large amplitude oscillatory extension of soft polymeric networks. *Rheologica Acta*, 49(8), 807-814. doi: 10.1007/s00397-010-0464-7
- Bhattacharjee, P. K., Nguyen, D. A., Masubuchi, Y. & Sridhar, T. (2016). Extensional step strain rate experiments on an entangled polymer solution. *Macromolecules*, 50(1), 386-395. doi:10.1021/acs.macromol.6b00823
- Bird, R. B., Armstrong, R. C. & Hassager, O. (1977). *Dynamics of Polymeric Liquids: Volume 1 Fluid Mechanics* (1st ed.). New York, USA: John Wiley and Sons.

- Bird, R. B., Armstrong, R. C. & Hassager, O. (1987). *Dynamics of Polymeric Liquids: Volume 1 Fluid Mechanics* (2nd ed.). New York, USA: John Wiley and Sons.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., Lightfoot, E. N. & Klingenberg, D. J. (2015). *Introductory Transport Phenomena*. New York, USA: John Wiley and Sons.
- Barroso, V. C., Ribeiro, S. P. & Maia, J. M. (2003). Stress relaxation after a step strain in uniaxial extension of polyisobutylene and polyethylene. *Rheologica Acta*, 42(4), 345-354. doi:10.1007/s00397-002-0284-5
- Brimmo, A. T., & Qasaimeh, M. A. (2017). Stagnation point flows in analytical chemistry and life sciences. *Royal Society of Chemistry Advances*, 7(81): 51206-51232. doi: 10.1039/c7ra11155j
- Cengel, Y. A. & Cimbala, J. M. (2014). *Fluid Mechanics, Fundamentals and Applications* (3rd ed.). New York, USA: McGraw Hill.
- Dealy, J. M. (1984). Official nomenclature for material functions describing the response of a viscoelastic fluid to various shearing and extensional deformations. *Journal of Rheology*, 28(3), 181-195. doi: 10.1122/1.549739
- Dealy, J. M. (1995). Official nomenclature for material functions describing the response of a viscoelastic fluid to various shearing and extensional deformations. *Journal of Rheology*, 39(1), 253-265. doi: 10.1122/1.4765670
- Dessi, C., Vlassopoulos, D., Giacomini, A. J. & Saengow, C. (2017). Elastomers in large-amplitude oscillatory uniaxial extension. *Rheologica Acta*, 56(12), 955-970. doi: 10.1007/s00397-017-1046-8
- Haddad, Y. M. (1995). *Viscoelasticity of Engineering Materials*. New York, USA: Chapman & Hall.
- Jearanaisilawong, P., Nilbuaklee, S. & Kolutawong, C. (2016). *Effects of size, shape and orientation on propagation of sidewall crack in a truck tire*. p. 57. (Abstract: AMR_02_K) The 1st International Conference on Engineering Innovation (ICEI 2016), 6-7 June 2016, Sukosol Hotel, Bangkok.
- Kee, D. D. & Fong, C. M. (1995). Elongational, hysteresis, and oscillatory flows of complex fluids. *Polymer Engineering and Science*, 35(12), 1031-1036. doi: 10.1002/pen.760351211
- Khan, S. A. & Larson, R. G. (1987). Comparison of simple constitutive equations for polymer melts in shear, and biaxial and uniaxial extensions. *Journal of Rheology*, 31(3), 207-234. doi: 10.1122/1.549922
- Khan, S. A. & Larson, R. G. (1990). Erratum: Comparison of simple constitutive equations for polymer melts in shear, and biaxial and uniaxial extensions [*J. Rheol.* 31, 207 (1987)]. *Journal of Rheology*, 34(1), 137-138. doi: 10.1122/1.550119
- Khan, S. A. & Larson, R. G. (1991). Step planar extension of polymer melts using a lubricated channel. *Rheologica Acta*, 30(1), 1-6. doi: 10.1007/bf00366788

- Kolitawong, C. (2003). *A sliding plate rheometer for large deformation viscoelastic measurements*. pp. 841-844. In The 17th Conference of Mechanical Engineering Network of Thailand, 15-17 October 2003, Prachinburi, Thailand.
- Kolitawong, C. & Giacomini, A. J. (2009). Sliding plate rheometer and its applications. *The Journal of King Mongkut's University of Technology North Bangkok*, 19(1), 109-115.
- Kolitawong, C. (2018). Rheology property testing of shear flow. *Journal of Science Ladkrabang*, 27(2), 44-64. (in Thai)
- Li, X. & Sarkar, K. (2005). Drop dynamics in oscillating extensional flow at finite Reynolds numbers. *Physics of Fluids*, 17, 027103. doi: 10.1063/1.1844471
- Macosko, C. W. (1994). *Rheology: Principles, Measurements and Applications*. New York, USA: Wiley-VCH.
- McKinley, G. H. & Sridhar, T. (2002). Filament-stretching rheometry of complex fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34(1), 375-415. doi: 10.1146/annurev.fluid.34.083001.125207
- Menard, H. P. (2008). *Dynamic Mechanical Analysis: A Practical Introduction* (2nd ed.). Boca Raton, FL, USA: CRC Press.
- Morrison, F. A. (2001). *Understanding Rheology*. New York, USA: Oxford University Press.
- Munson, B. R., Young, D. F. & Okiishi, T. H. (2002). *Fundamentals of Fluid Mechanics* (4th ed.). New York, USA: John Wiley and Sons.
- Nguyen, D. A., Bhattacharjee, P. K. & Sridhar, T. (2015). Response of an entangled polymer solution to uniaxial and planar deformation. *Journal of Rheology*, 59(3), 821-833. doi: 10.1122/1.4917544
- Orr, N. V. & Sridhar, T. (1996). Stress relaxation in uniaxial extension. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 67, 77-103. doi: 10.1016/s0377-0257(96)01487-5
- Orr, N. V. & Sridhar, T. (1999). Probing the dynamics of polymer solutions in extensional flow using step strain rate experiments. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 82(2-3), 203-232. doi: 10.1016/s0377-0257(98)00163-3
- Petrie, C. J. S. (2006). Extensional viscosity: A critical discussion. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 137(1-3), 15-23. doi: 10.1016/j.jnnfm.2006.01.011
- Pritchard, P. J. (2011). *Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics* (8th ed.). New York, USA: John Wiley & Sons, Inc.

- Róžańska, S. (2017). Extensional Rheology in Food Processing. In J. Ahmed, P. Ptaszek & S. Basu (Eds), *Advances in Food Rheology and Its Applications* pp. 125-157. Cambridge, UK: Woodhead Publishing. doi: 10.1016/B978-0-08-100431-9.00006-1
- Sentmanat, M. L. (2003). *Dual Windup Extensional Rheometer, U.S. Patent No. 6,578,413 B2*, Washington DC., USA: U.S. Patent and Trademark Office.
- Sentmanat, M.L. (2004). Miniature universal testing platform for extensional melt rheometer to solid-state deformation behavior. *Rheologica Acta*, 43, 657-669. doi: 10.1007/s00397-004-0405-4
- Sharma, R. K., Furusawa, K., Fukui, A. & Sasaki, N. (2014). Effects of a flow field on amyloid fibrillogenesis in a β -lactoglobulin solution. *International Journal of Biological Macromolecules*, 70, 490-497. doi: 10.1016/j.ijbiomac.2014.06.034
- Song, Y., Zheng, Q. & Wang, Z. (2007). Equibiaxial extensional flow of wheat gluten plasticized with glycerol. *Food Hydrocolloids*, 21(8), 1290-1295. doi: 10.1016/j.foodhyd.2006.10.007
- Soskey, P. R. & Winter, H. H. (1984). Large step shear strain experiments with parallel-disk rotational rheometers. *Journal of Rheology*, 28(5), 625-645. doi:10.1122/1.549770
- Soskey, P. R. & Winter, H. H. (1985). Equibiaxial extension of two polymer melts: Polystyrene and low density polyethylene. *Journal of Rheology*, 29(5), 493-517. doi:10.1122/1.549799
- Tanner, R. I. (2002). *Engineering Rheology* (2nd ed.). Oxford: Oxford University Press.
- Taylor, G. I. (1934). The Formation of Emulsions in Definable Fields of Flow. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 146(858), 501-523.
- Torres, M. D., Hallmark, B. & Wilson, D. I. (2014). Effect of concentration on shear and extensional rheology of guar gum solutions. *Food Hydrocolloids*, 40: 85-95.
- Trouton, F. T. (1906). On the coefficient of viscous traction and its relation to that of viscosity. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 77(519), 426-440. doi: 10.1098/rspa.1906.0038
- Wang, Y., Cheng, S. & Wang, S.-Q. (2011). Basic characteristics of uniaxial extension rheology: Comparing monodisperse and bidisperse polymer melts. *Journal of Rheology*, 55(6): 1247-1270.
- Wangchai, S. (2005). *Finite element analysis of heat generation in particle filled natural rubber vulcanizates during cyclic deformation*. (Master Thesis) Department of Mechanical Engineering, King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok, Thailand. (in Thai)

- Wangchai, S., Kolutawong, C. & Chaikittiratna, A. (2008). Finite element simulation for heat built-up in vulcanized natural rubber subjected to dynamic load. *Journal of King Mongkut's University of Technology North Bangkok*, 18(3), 49-61. (in Thai)
- Wangchai, S., Kolutawong, C. & Chaikittiratna, A. (2011). Finite element analysis of heat generation in particle filled natural rubber vulcanizates during cyclic deformation. *Journal of King Mongkut's University of Technology North Bangkok*, 21(1), 754-762. (in Thai)
- White, F. M. (2003). *Fluid Mechanics* (4th ed.). New York, USA: McGraw Hill.