

Academic Article

สมการอนุรักษ์ในกลศาสตร์ของไหล

Conservation law governing equations in fluid mechanics

ชาญยุทธ โกลิตะวงษ์

Chanyut Kolitawong

ศูนย์วิจัยพอลิเมอร์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและการบิน-อวกาศ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้า
พระนครเหนือ บางซื่อ กรุงเทพฯ 10800

Polymer Research Center, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's
University of Technology North Bangkok, Bangsue, Bangkok 10800, Thailand

E-mail: chanyut.k@eng.kmutnb.ac.th

Received: 18/11/2018; Revised: 27/04/2019; Accepted: 07/05/2019

บทคัดย่อ

บทความนี้ต้องการที่จะนำเสนอมุมมองทางด้านวิทยาศาสตร์กายภาพของสมการการอนุรักษ์ ซึ่งเป็นพื้นฐานในการวิเคราะห์ปัญหาเชิงวิศวกรรม โดยกล่าวถึงที่มาของกฎการอนุรักษ์มวล โมเมนตัม และพลังงานที่ใช้ในกลศาสตร์ของไหล ด้วยมุมมองทางกลศาสตร์ความต่อเนื่อง (continuum mechanics) จากการพิจารณาก่อนของไหลที่ถูกตัดพาไปในระบบแกนและมีการไหลผ่านปริมาตรควบคุม (control volume) ที่เวลา t_0 ใด ๆ โดยในที่นี้เราใช้ระบบแกนพิกัดจากเป็นพิกัดอ้างอิง ด้วยกฎการอนุรักษ์มวลที่กล่าวว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลในปริมาตรควบคุมมีค่าเท่ากับอัตราของมวลที่ไหลเข้าปริมาตรควบคุมลบด้วยอัตราของมวลที่ไหลออกจากปริมาตรควบคุม และในทำนองเดียวกันจากกฎข้อที่ 2 ของนิวตันที่ว่าผลรวมของแรง $\sum \vec{F}$ ที่กระทำกับปริมาตรควบคุมของกลุ่มอนุภาคของไหลที่มีมวล δm ให้เคลื่อนที่ ณ ช่วงเวลา t_0 ใด ๆ จะแปรผันตรงกับความเร่งทำให้เราสามารถสรุปกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมได้ ทำนองเดียวกันกฎการอนุรักษ์พลังงานได้จากกฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์ ที่กล่าวว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในปริมาตรควบคุมจะมีค่าเท่ากับผลรวมของการถ่ายเทความร้อนเนื่องจากการนำความร้อนผ่านพื้นผิวของปริมาตรควบคุมรวมกับงานที่ออกมาจากปริมาตรควบคุมทำให้เราสามารถสรุปออกมาเป็นกฎการอนุรักษ์พลังงานได้

คำสำคัญ: กฎการอนุรักษ์มวล, กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม, กฎการอนุรักษ์พลังงาน, ระบบแกนพิกัดจาก

Abstract

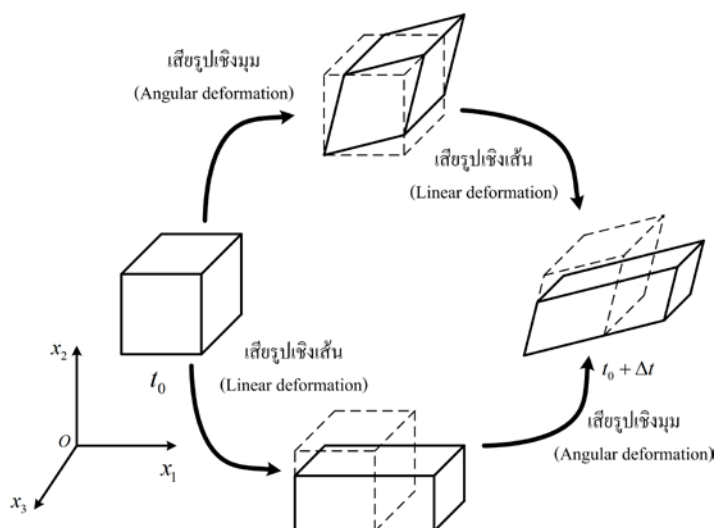
The objective of this article is to show physical perspective interpretation of conservative laws normally used in engineering problems by illustrated how to derive those conservative laws in fluid mechanics; mass, momentum and energy conservation from continuum mechanics perspective. Here, we use Cartesian coordinates to show that, at any time t_0 , mass flowing through a control volume is conserved. By the fact that mass in a system is always constant, we could gain the mass conservation equation in a control volume by proving that the rate of change of mass in the control volume equals to the mass balance between the in- and out-mass fluxes. In the meantime, by the 2nd Newton's law applied at any time t_0 , the total forces $\sum \vec{F}$ acting on a control volume that has its mass δm are proportional to the fluid mass acceleration, we can deduce the momentum conservation equations. Finally, by using the fact, from the 1st law of thermodynamics, that rate of energy changed in a control volume equals to rate of heat combined with rate of work changed in and out of the control volume.

Keywords: conservation of mass, conservation of momentum, conservation of energy, Cartesian coordinates

บทนำ

กฎการอนุรักษ์เกิดจากความเป็นจริงทางธรรมชาติ นักฟิสิกส์ได้เฝ้าสังเกตความเป็นจริงตามธรรมชาติ นั้น ๆ แล้วนำมาตั้งเป็นกฎการอนุรักษ์ทั้งหลาย ยกตัวอย่างความจริงตามธรรมชาติที่ว่ามวล (พลังงาน) จะไม่สูญหายไปไหน แต่อาจจะมีการเปลี่ยนรูปหรือเปลี่ยนสถานะ อันเป็นที่มาของกฎการอนุรักษ์มวล (พลังงาน) ทางฟิสิกส์ หรือความจริงตามธรรมชาติที่กล่าวว่าผลรวมของแรงกระทำต่อวัตถุจะเท่ากับมวลคูณความเร่งของวัตถุ อันเป็นที่มาของกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law) ซึ่งเป็นที่มาของกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) เป็นต้น กฎการอนุรักษ์มวล โมเมนตัม และพลังงานซึ่งสามารถเรียกรวม ๆ กันว่าสมการควบคุม (governing equations) ถูกนำมาประยุกต์ใช้ทางวิศวกรรมอย่างกว้างขวาง ด้วยมุมมองทางด้านกลศาสตร์ความต่อเนื่อง (continuum mechanics) เราจะไม่มองสสารในระดับอะตอมแต่จะมองสสารเป็นกลุ่มก้อนของไหล (fluid element) ที่มีสมบัติที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องกันไปตลอดทั้งก้อนวัตถุ ดังนั้นเมื่อก้อนของไหลถูกแรงจากภายนอกมากระทำจะทำให้เกิดการเสียรูปเชิงเส้น (linear deformation) การเสียรูปเชิงมุม (angular deformation) ไปพร้อม ๆ กัน ดังแสดงในรูปที่ 1 ซึ่งแสดงก้อนของไหลเกิดการเคลื่อนที่ทำให้ก้อนของไหลมีการเสียรูปเชิงเส้น เช่น การยืดดึง และการเสียรูปเชิงมุม เช่น การบิดเบี้ยวไปพร้อม ๆ กัน โดยก้อนของไหลที่เวลา t_0 ยังไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ในขณะที่ก้อนของไหลเดิมที่เวลา $t_0 + \Delta t$ เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปจากเดิม (Lai et al., 2010) บทความนี้จะไม่รวมถึงกฎการอนุรักษ์ที่ใช้ในฟิสิกส์สมัยใหม่ (modern physics) ที่สามารถใช้งานได้ตั้งแต่ในระดับอนุภาคมูลฐาน ที่มีขนาดเล็ก เช่น อะตอม นิวตรอน อิเล็กตรอน และอนุภาคฮิกส์ (Higgs) ซึ่งเป็นการพิสูจน์กฎการอนุรักษ์เฉพาะจุด

(local gauge conservative law) (Anco & Bluman, 2002; Kosmann-Schwarzbach, 2011) จนถึงระดับก่อนของไหลในกลศาสตร์ของไหล (traditional fluid mechanics)



รูปที่ 1. แสดงก่อนของไหลเกิดการเสียดรูปเชิงเส้น เช่น การยืดดึง และการเสียดรูปเชิงมุม เช่น การบิดเบี้ยวไปพร้อม ๆ กัน โดยก่อนของไหลที่เวลา t_0 ยังไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ในขณะที่ก่อนของไหลเดิมที่เวลา $t_0 + \Delta t$ เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปจากเดิม

การประยุกต์ใช้กฎการอนุรักษ์มวล โมเมนตัม และพลังงานในเชิงวิศวกรรมอย่างหลากหลายขึ้นอยู่กับรูปแบบการไหล (type of flow) ว่าเป็นการไหลแบบราบเรียบ (laminar) หรือเป็นการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent) และรูปทรงของช่องทางไหล (flow channel) ถ้ารูปทรงของช่องทางไหลเป็นรูปเรขาคณิตง่าย ๆ เช่น ทรงกระบอก (cylinder) ทรงเหลี่ยม (slit) เราสามารถเลือกใช้สมการควบคุม (governing equations) ในระบบแกนพื้นฐานทั่วไป (Bird et al., 1960; Bird et al., 2002) เช่น ระบบแกนพิกัดฉาก (Cartesian coordinates) ระบบแกนทรงกระบอก (cylindrical coordinates) และระบบแกนทรงกลม (spherical coordinates) หรือในระบบแกนพิกัดอื่น ๆ (Moon & Spencer, 1988) เช่น eccentric cylindrical (Gilbert et al., 2017) หรือ bispherical (Gilbert & Giacomini, 2019) โดยในการไหลแบบราบเรียบเราสามารถหาคำตอบตรง (exact solutions) หรือคำตอบประมาณค่า (approximate solutions) ได้ แต่การประยุกต์ใช้งานทางวิศวกรรมโดยทั่วไปแล้วช่องทางไหลจะมีรูปทรงที่ซับซ้อน เช่น การไหลของพอลิเมอร์หลอมเหลวในแม่พิมพ์ฉีดพลาสติกหรือยาง (plastics or rubber injection molding) เพื่อผลิตชิ้นส่วนยานยนต์และอิเล็กทรอนิกส์ ซึ่งต้องวิเคราะห์สมการควบคุมเหล่านั้นด้วยการคำนวณเชิงตัวเลข (numerical methods) เป็นต้น

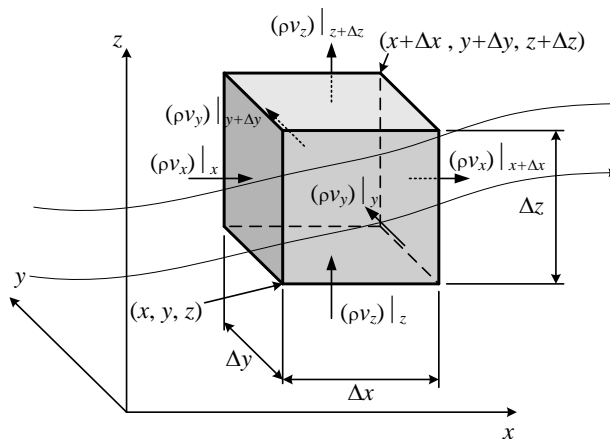
การแก้สมการอนุกรมมวล โมเมนตัม และพลังงานร่วมกับค่าขอบของปัญหา (boundary conditions) เพื่อหาคำตอบสามารถทำได้เมื่อใช้ร่วมกับการตั้งสมมุติฐานในเชิงวิศวกรรมเพื่อหาคำตอบแม่นยำตรง (exact solutions) ซึ่งเป็นคำตอบเชิงวิเคราะห์ (analytical solutions) และคำตอบประมาณค่า (approximate solutions) ซึ่งอาจจะแสดงอยู่ในรูปคำตอบเชิงวิเคราะห์ หรือคำตอบเชิงตัวเลข (numerical methods) ก็ได้ ปัจจุบันการแก้สมการควบคุม (governing equations) ให้อยู่ในรูปสมการคำตอบที่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นหรือไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งเป็นการแก้สมการแบบในรูปของตัวแปร (symbolic solvers) เราสามารถใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ เช่น Maple และ Mathematica ช่วยแก้สมการได้เป็นอย่างดี ในขณะที่เราสามารถใช้อุปกรณ์คอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อหาคำตอบของระบบได้ด้วยโปรแกรมคำนวณเชิงตัวเลขสำเร็จรูปที่ใช้ในงานวิศวกรรมพอลิเมอร์หลอมเหลว เช่น PolyFlow หรือ OpenFoam ใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับการไหลภายใน (internal flow) หรือใช้โปรแกรม Moldex หรือ Moldflow สำหรับการไหลเข้าแม่พิมพ์ฉีดพลาสติก เป็นต้น สำหรับโปรแกรมที่ประยุกต์ใช้สมการอนุกรมมวล โมเมนตัม และพลังงานในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมของไหลอื่น ๆ ยังมีอีกมากมายแต่จะไม่กล่าวถึงในที่นี้

บทความนี้ต้องการที่จะนำเสนอมุมมองทางด้านวิทยาศาสตร์กายภาพ (physical perspective interpretation) ของสมการการอนุรักษ์ที่นำมาประยุกต์ใช้ในเชิงวิศวกรรมเพื่อนำไปใช้ในการหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ (analytical solutions) เช่น คำตอบแม่นยำตรง (exact solutions) และคำตอบประมาณค่า (approximate solutions) ไม่ได้มีวัตถุประสงค์ที่จะวิพากษ์หรือค้นหาทฤษฎีใหม่ด้วยมุมมองทางด้านคณิตศาสตร์ (Ertel & Rossby, 1949; Naz et al., 2008; Cheviakov & Jean, 2015) และถึงแม้ว่าความสามารถของคอมพิวเตอร์ในปัจจุบันทำให้การหาคำตอบเชิงตัวเลข (numerical solutions) มีความสำคัญเพิ่มมากขึ้นและมีการนำไปใช้อย่างแพร่หลาย แต่ความเข้าใจในสมการการอนุรักษ์ก็ยังเป็นหัวใจสำคัญในการตีความหมายของคำตอบที่ได้จากการคำนวณไม่ว่าจะเป็นคำตอบเชิงวิเคราะห์หรือการหาคำตอบเชิงตัวเลข

กฎอนุกรมมวล

ถ้าพิจารณาก้อนของไหล (fluid element) มวล M ไหลในระบบ (system) จากวิธีการแบบลากรานจ์ (Lagrangian approach) จะพบว่ามวลในระบบจะไม่เปลี่ยนแปลงไปตามกาลเวลา (มวลคงที่ทุกขณะ) ซึ่งเป็นหลักการของการอนุรักษ์มวลแต่อย่างไรก็ตามสมการอนุกรมมวล (conservation of mass) ที่เขียนอยู่ในรูปอนุพันธ์สามารถอธิบายได้ง่ายกว่าด้วยวิธีการแบบออยเลอร์ (Euler approach) โดยการใช้ปริมาตรควบคุม (control volume) แล้วใช้วิธีหัดปริมาตรควบคุมให้เล็กลงจนเป็นจุดด้วยการพิจารณาก้อนของไหลในปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ๆ $\Delta x \Delta y \Delta z$ ที่มีหัวมุมหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $P_1(x, y, z)$ ใด ๆ บนระบบแกนที่หยุดนิ่ง (inertia frame) การเคลื่อนที่ของ ๆ ไหลในแนวแกน x พามวลไหลเข้าปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ๆ $\Delta x \Delta y \Delta z$ ผ่านระนาบที่มีหัวมุมหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $P_1(x, y, z)$ ด้วยอัตราไหลของมวล $(\rho v_x)|_x \Delta y \Delta z$ และไหลออกปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ๆ

$\Delta x \Delta y \Delta z$ ผ่านระนาบที่มีอีกหัวมุมหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ ด้วยอัตราไหลของมวล $(\rho v_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2. แสดงก้อนของไหลในปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ๆ $\Delta x \Delta y \Delta z$ ที่มีหัวมุมหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $P_1(x, y, z)$ ใด ๆ บนระบบแกนที่หยุดนิ่ง (inertia frame) การเคลื่อนที่ของของไหลในแนวแกน x พามวล M ไหลเข้าปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ๆ $\Delta x \Delta y \Delta z$ ผ่านระนาบที่มีหัวมุมหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $P_1(x, y, z)$

ในทำนองเดียวกันการเคลื่อนที่ของ ๆ ไหลในแนวแกน y พามวลไหลเข้าปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ๆ $\Delta x \Delta y \Delta z$ ผ่านระนาบที่มีหัวมุมหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $P_1(x, y, z)$ ด้วยอัตราไหลของมวล $(\rho v_y)|_y \Delta x \Delta z$ และไหลออกปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ๆ $\Delta x \Delta y \Delta z$ ผ่านระนาบที่มีอีกหัวมุมหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ ด้วยอัตราไหลของมวล $(\rho v_y)|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$ และการเคลื่อนที่ของ ๆ ไหลในแนวแกน z พามวลไหลเข้าปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ๆ $\Delta x \Delta y \Delta z$ ผ่านระนาบที่มีหัวมุมหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $P_1(x, y, z)$ ด้วยอัตราไหลของมวล $(\rho v_z)|_z \Delta x \Delta y$ และไหลออกปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ๆ $\Delta x \Delta y \Delta z$ ผ่านระนาบที่มีอีกหัวมุมหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ ด้วยอัตราไหลของมวล $(\rho v_z)|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$ จากกฎการอนุรักษ์มวล ที่กล่าวว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลในปริมาตรควบคุมมีค่าเท่ากับอัตราของมวลที่ไหลเข้าปริมาตรควบคุมลบด้วยอัตราของมวลที่ไหลออกจากปริมาตรควบคุม ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) = & (\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z \\ & + (\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z + (\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (1)$$

หารตลอดด้วย $\Delta x \Delta y \Delta z$ แล้วใส่ลิมิตให้ปริมาตรควบคุมเล็กลงจนเข้าใกล้ศูนย์

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\rho v_x|_{x+\Delta x} - \rho v_x|_x}{\Delta x} - \frac{\rho v_y|_{y+\Delta y} - \rho v_y|_y}{\Delta y} - \frac{\rho v_z|_{z+\Delta z} - \rho v_z|_z}{\Delta z} \right\} \quad (2)$$

จะได้รูปสมการอนุพันธ์ทั่วไปของกฎการอนุรักษ์มวลหรือสมการความต่อเนื่อง (mass conservation or continuity equation)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

สมการที่ (3) เขียนในรูปสมการเวกเตอร์จะได้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \rho \bar{v} = 0 \quad (4)$$

เมื่อเวกเตอร์ความเร็วของของไหล

$$\bar{v} = v_x \bar{\delta}_x + v_y \bar{\delta}_y + v_z \bar{\delta}_z \quad (5)$$

โดย $\bar{\delta}_x$, $\bar{\delta}_y$ และ $\bar{\delta}_z$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางไปในแนว x , y และ z ตามลำดับ และเวกเตอร์เกรเดียนต์ในระบบแกนพิกัดฉากคือ

$$\bar{\nabla} = \bar{\delta}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{\delta}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{\delta}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (6)$$

เวกเตอร์ความเร็วและเวกเตอร์เกรเดียนต์ในระบบแกนอื่น ๆ สามารถหาได้จากหัวข้อ 3.1 ในเอกสาร Bird et al., 1960 และ Bird et al., 2002 ในที่นี้จะแสดงการลดรูปเฉพาะในระบบแกนพิกัดฉากเท่านั้นซึ่งจากสมการ (4) ถ้าเป็นการไหลคงตัวของของไหล (steady flow of compressible or incompressible fluids) สมการ (4) จะลดรูปเป็น

$$\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{v} = 0 \quad (7)$$

นั่นคือ

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

แต่ถ้าเป็นการไหลของของไหลแบบอัดตัวไม่ได้ (steady or unsteady flow of incompressible fluid) สมการ (4) จะลดรูปเป็น

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0 \quad (9)$$

นั่นคือ

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

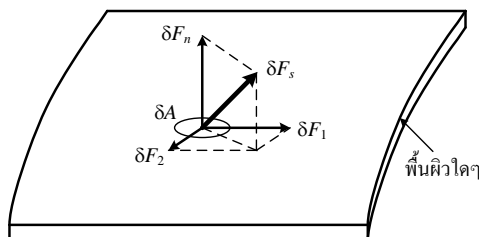
สมการอนุกรมมวลสำหรับการไหลแบบอัดตัวไม่ได้นี้จะแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงรูปทรงในแนวแกนหนึ่งจะกระทบกับการเปลี่ยนรูปทรงในอีกสองแนวแกนเนื่องจากปริมาตรของก้อนวัตถุจะต้องเท่าเดิมตลอดเวลา หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรคงที่ (volumetric dilatation rate) สำหรับของไหลที่อัดตัวไม่ได้นั่นเอง

กฎอนุกรมโมเมนตัม

กฎการอนุกรมโมเมนตัมมีที่มาจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน (Newton's law of motion) ที่เรารู้จัก ในที่นี้จะกล่าวถึงกฎข้อที่ 2 ของนิวตันที่กล่าวว่าผลรวมของแรงเกิดจากมวลคูณกับความเร่งของวัตถุ ซึ่งจะเป็นที่มาของสมการอนุกรมโมเมนตัมในที่สุด โดยก่อนที่จะทราบที่มาที่ไปของสมการอนุกรมโมเมนตัม เราจะต้องทำความรู้จักกับวิธีกำหนดแรงบนพื้นผิว และจะต้องรู้จักกับแรงกระทำกับวัตถุหรือกลุ่มอนุภาคของไหล (fluid particle) ซึ่งแบ่งออกเป็นแรงภายใน และแรงภายนอกด้วย

วิธีกำหนดแรงบนพื้นผิว

พิจารณาแรงขนาด δF_s ที่กระทำบนพื้นผิว δA ใด ๆ ออกสู่ภายนอก แรง δF_s สามารถแตกออกเป็นแรงที่ตั้งฉากกับพื้นผิว δA ได้ 1 แรงคือ δF_n และแตกออกเป็นแรงที่ขนานกับพื้นผิว δA ได้อีก 2 แรงคือ δF_1 และ δF_2 ดังรูปที่ 3 (ดูหัวข้อ 6.3 ใน Munson et al., 2002)



รูปที่ 3. แสดงแรงขนาด δF_s ที่กระทำบนพื้นผิว δA ใด ๆ ออกสู่ภายนอก แรง δF_s สามารถแตกออกเป็นแรงที่ตั้งฉากกับพื้นผิว δA ได้ 1 แรงคือ δF_n และแตกออกเป็นแรงที่ขนานกับพื้นผิว δA ได้อีก 2 แรงคือ δF_1 และ δF_2

ดังนั้นความเค้นตั้งฉาก (normal stress, π_n) คือ

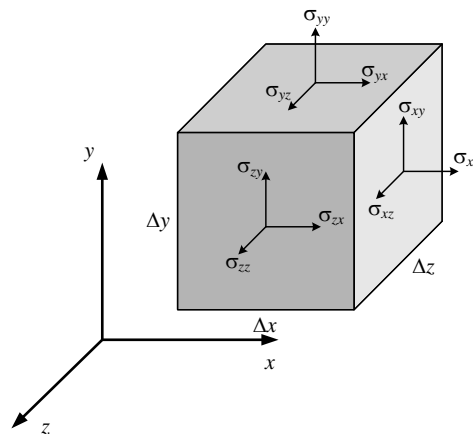
$$\pi_n = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_n}{\delta A} = \frac{dF_n}{dA} \quad (11)$$

ความเค้นเฉือนในแนวแกนที่ 1 (shearing stresses in 1st direction, π_1) และความเค้นเฉือนในแนวแกนที่ 2 (shearing stresses in 2nd direction, π_2) คือ

$$\pi_1 = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_1}{\delta A} = \frac{dF_1}{dA} \quad (12)$$

และ

$$\pi_2 = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_2}{\delta A} = \frac{dF_2}{dA} \quad (13)$$



รูปที่ 4. แสดงความเค้นรวมทั้งเก้า (9) ที่ประกอบกันเป็นเทนเซอร์ความเค้นรวมในทิศทางที่เป็นบวก (+) ซึ่งอยู่บนหน้าตัดด้านบน ด้านขวา และด้านหน้า บนปริมาตรควบคุม ในทางกลับกันความเค้นที่อยู่บนหน้าตัดด้านล่าง ด้านซ้าย และด้านหลังของปริมาตรควบคุมจะมีค่าเป็นลบ (-)

ในการให้สัญลักษณ์ความเค้น (stress notation) นั้นตัวห้อยตัวแรกจะแสดงถึงระนาบที่มีทิศทางตั้งฉากกับตัวห้อยนั้น (ทิศทางของพื้นที่) ตัวห้อยตัวที่สองแสดงถึงทิศทางของความเค้นนั้น ๆ (ทิศทางของแรงที่กระทำบนพื้นที่นั้น ๆ) ยกตัวอย่างเช่น σ_{xy} คือความเค้นบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x และมีทิศทางพุ่งไปทางแกน y จากการใช้สัญลักษณ์ความเค้นในลักษณะนี้เราสามารถรวบรวมความเค้นในแต่ละแนวแกนมาเขียนให้อยู่ในรูปเทนเซอร์ความเค้นรวม (total stress tensor, $\underline{\underline{\sigma}}$) ได้ดังนี้

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (14)$$

ในที่นี้แรงที่กระทำออกจากพื้นผิวมีค่าเป็นบวกทำให้ความเค้นดึงมีค่าเป็นบวก (+) และความเค้นกดมีค่าเป็นลบ (-) ไปด้วย และในทำนองเดียวกันแรงดันจะมีค่าน้อยกว่าศูนย์ หรือติดลบ (-) ดังแสดงในรูปที่ 4 ดังนั้นในที่นี้ $\underline{\underline{\sigma}}$ เป็น

เทนเซอร์ความเค้นรวมที่เกิดจากกลุ่มอนุภาคของไหลกระทำต่อของไหลภายนอกนั้นเอง ในขณะที่เทนเซอร์ความเค้นรวม (total stress tensor, $\underline{\pi}$) ที่เกิดจากแรงภายนอกกระทำต่อกลุ่มอนุภาคของไหลจะนิยามโดย

$$\underline{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_{xx} & \pi_{yx} & \pi_{zx} \\ \pi_{xy} & \pi_{yy} & \pi_{zy} \\ \pi_{xz} & \pi_{yz} & \pi_{zz} \end{pmatrix} \quad (15)$$

เมื่อ $\underline{\pi} = -\underline{\sigma}^T$ ในที่นี้เราจะใช้เทนเซอร์ความเค้นรวม (total stress tensor, $\underline{\pi}$) ในสมการที่ (15) ในการคำนวณต่อไป (ดูหัวข้อ 3.2.1 ใน Morrison, 2001)

แรงภายนอกและแรงภายใน

ในที่นี้แทนวัตถุที่ถูกแรงกระทำเป็นกลุ่มอนุภาคของไหล (forces on the differential element) มี 2 ชนิด ได้แก่ (1) แรงภายนอกหรือแรงที่พื้นผิว (surface forces, \vec{F}_s) และ (2) แรงภายใน (body forces, \vec{F}_b) แรงภายนอกหรือแรงที่พื้นผิวคือแรงที่กระทำมาจากภายนอกโดยจะกระทำบนพื้นผิวของวัตถุ ซึ่งในที่นี้แทนด้วยกลุ่มอนุภาคของไหล เช่น แรงดัน แรงเฉือน และแรงดึง เป็นต้น ส่วนแรงภายในคือแรงที่เกิดขึ้นภายในกลุ่มอนุภาคของไหล ซึ่งจะกระจายตัวทั่วทั้งกลุ่มอนุภาคของไหล เช่น แรงจากน้ำหนักที่กดทับหรือแรงจากสนามแม่เหล็ก เป็นต้น ดังนั้นแรงที่เกิดขึ้นกับกลุ่มอนุภาคของไหลจะเป็นผลรวมของแรงภายในและแรงที่พื้นผิวนั้นเอง

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_b + \sum \vec{F}_s \quad (16)$$

พิจารณากลุ่มอนุภาคของไหลปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ๆ (infinitesimal fluid element) $\Delta x \Delta y \Delta z$ ที่มีหัวมุมหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $P_1(x, y, z)$ ใด ๆ บนระบบแกนเฉื่อยที่หยุดนิ่ง (inertia frame) ในรูปที่ 5 โดยทั่วไปแล้วความเค้นจะเปลี่ยนแปลงไปตามกระแสน้ำของไหลของ ๆ เหลว ดังนั้นถ้าการไหลในแนวแกน x ของระบบก่อให้เกิดความเค้นตั้งฉาก $\pi_{xx}|_x$ บนพื้นที่ $\Delta y \Delta z$ อันเนื่องมาจากกลุ่มอนุภาคของไหลที่อยู่ติดกัน ในทำนองเดียวกันจะมีความเค้นเฉือน $\pi_{yx}|_y$ บนพื้นที่ $\Delta x \Delta z$ และความเค้นเฉือน $\pi_{zx}|_z$ บนพื้นที่ $\Delta x \Delta y$ ซึ่งเป็นระนาบที่ผ่านตำแหน่ง $P_1(x, y, z)$ และเกิดความเค้นตั้งฉาก $\pi_{xx}|_{x+\Delta x}$ บนพื้นที่ $\Delta y \Delta z$ ความเค้นเฉือน $\pi_{yx}|_{y+\Delta y}$ บนพื้นที่ $\Delta x \Delta z$ และความเค้นเฉือน $\pi_{zx}|_{z+\Delta z}$ บนพื้นที่ $\Delta x \Delta y$ ซึ่งเป็นระนาบที่ผ่านตำแหน่ง $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ โดยผลรวมของแรงที่เกิดจากความเค้นในทิศทาง x เกิดจากผลรวมของแรงตั้งฉากและแรงเฉือนโดยกำหนดให้แรงที่พุ่งไปในทิศทางบวก (+) ของเส้นจำนวนมีค่าเป็นบวก (+) และแรงที่พุ่งไปในทิศทางลบ (-) ของเส้นจำนวนมีค่าติดลบ (-) โดยแรงเฉือนสามารถหาได้ในทำนองคล้าย ๆ กันนี้ (ดูหน้า 2-7 ของ Bird et al., 1977 หรือดูหน้า 3-11 ของ Bird et al., 1987)

$$\Delta F_{x,s} = - \left(\pi_{xx}|_{x+\Delta x} - \pi_{xx}|_x \right) \Delta y \Delta z - \left(\pi_{yx}|_{y+\Delta y} - \pi_{yx}|_y \right) \Delta x \Delta z - \left(\pi_{zx}|_{z+\Delta z} - \pi_{zx}|_z \right) \Delta x \Delta y \quad (17)$$

หารตลอดสมการ (17) ด้วยปริมาตรของกลุ่มอนุภาคของไหล $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ แล้วใส่ลิมิตให้ ΔV เล็กจนเข้าใกล้ศูนย์ดังนี้

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta F_{x,s}}{\Delta V} = - \frac{\pi_{xx}|_{x+\Delta x} - \pi_{xx}|_x}{\Delta x} - \frac{\pi_{yx}|_{y+\Delta y} - \pi_{yx}|_y}{\Delta y} - \frac{\pi_{zx}|_{z+\Delta z} - \pi_{zx}|_z}{\Delta z} \right\} \quad (18)$$

ดังนั้นตามนิยามของการอนุพันธ์สมการที่ (18) ผลรวมของแรงที่เกิดจากความเค้นในทิศทาง x เขียนได้ดังนี้

$$\sum \delta F_{x,s} = \frac{dF_{x,s}}{dV} = - \left(\frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{zx}}{\partial z} \right) \quad (19)$$

ในทำนองเดียวกันแรงที่เกิดจากความเค้นในทิศทาง y เกิดจากการไหลในแนวแกน y ของระบบก่อให้เกิดความเค้นเฉือน $\pi_{xy}|_x$ บนพื้นที่ $\Delta y \Delta z$ ความเค้นตั้งฉาก $\pi_{yy}|_y$ บนพื้นที่ $\Delta x \Delta z$ และความเค้นเฉือน $\pi_{zy}|_z$ บนพื้นที่ $\Delta x \Delta y$ ซึ่งเป็นระนาบที่ผ่านตำแหน่ง $P_1(x, y, z)$ และเกิดความเค้นเฉือน $\pi_{xy}|_{x+\Delta x}$ บนพื้นที่ $\Delta y \Delta z$ ความเค้นตั้งฉาก $\pi_{yy}|_{y+\Delta y}$ บนพื้นที่ $\Delta x \Delta z$ และความเค้นเฉือน $\pi_{zy}|_{z+\Delta z}$ บนพื้นที่ $\Delta x \Delta y$ ซึ่งเป็นระนาบที่ผ่านตำแหน่ง $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ ผลรวมของแรงที่เกิดจากความเค้นในทิศทาง y คือ

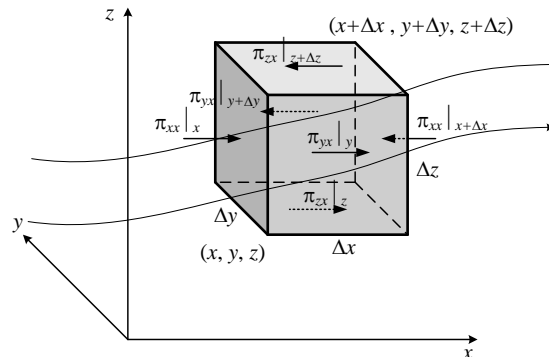
$$\sum \delta F_{y,s} = \frac{dF_{y,s}}{dV} = - \left(\frac{\partial \pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{zy}}{\partial z} \right) \quad (20)$$

และแรงที่เกิดจากความเค้นในทิศทาง z เกิดจากการไหลในแนวแกน z ของระบบก่อให้เกิดความเค้นเฉือน $\pi_{xz}|_x$ บนพื้นที่ $\Delta y \Delta z$ ความเค้นเฉือน $\pi_{yz}|_y$ บนพื้นที่ $\Delta x \Delta z$ และความเค้นตั้งฉาก $\pi_{zz}|_z$ บนพื้นที่ $\Delta x \Delta y$ ซึ่งเป็นระนาบที่ผ่านตำแหน่ง $P_1(x, y, z)$ และเกิดความเค้นเฉือน $\pi_{xz}|_{x+\Delta x}$ บนพื้นที่ $\Delta y \Delta z$ ความเค้นเฉือน $\pi_{yz}|_{y+\Delta y}$ บนพื้นที่ $\Delta x \Delta z$ และความเค้นตั้งฉาก $\pi_{zz}|_{z+\Delta z}$ บนพื้นที่ $\Delta x \Delta y$ ซึ่งเป็นระนาบที่ผ่านตำแหน่ง $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ ผลรวมของแรงที่เกิดจากความเค้นในทิศทาง z คือ

$$\sum \delta F_{z,s} = \frac{dF_{z,s}}{dV} = - \left(\frac{\partial \pi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{zz}}{\partial z} \right) \quad (21)$$

โดยมีเวกเตอร์ผลรวมแรงบนพื้นผิวของปริมาตรควบคุมต่อหน่วยปริมาตรคือ

$$\sum \delta \vec{F}_s = \sum \delta F_{x,s} \vec{\delta}_x + \sum \delta F_{y,s} \vec{\delta}_y + \sum \delta F_{z,s} \vec{\delta}_z \quad (22)$$



รูปที่ 5. แสดงกลุ่มอนุภาคของไหลในปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ๆ $\Delta x \Delta y \Delta z$ ที่มีหัวมุมหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $P_1(x, y, z)$ ใด ๆ บนระบบแกนที่หยุดนิ่ง (inertia frame) ที่มีความเค้นตึงจากและความเค้นเฉือนบนพื้นผิวปริมาตรควบคุมที่เกิดจากการไหลในแนวแกน x , y , และ z

ในที่นี้แรงภายใน \vec{F}_b ที่เราสนใจคือน้ำหนักของกลุ่มอนุภาคของไหลนั่นเอง พิจารณากลุ่มอนุภาคของไหลปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ๆ $\Delta x \Delta y \Delta z$ อยู่ในสนามแรงโน้มถ่วง \vec{g} ดังรูปที่ 6 ดังนั้นผลรวมของแรงภายใน \vec{F}_b ที่เกิดจากน้ำหนักของกลุ่มอนุภาคของไหลคือ (ดูหัวข้อ 6-3 และ 9-6 ใน Cengel & Cimbala, 2006)

$$\sum \vec{F}_b = \vec{F}_{gravity} = \delta m \vec{g} \quad (23)$$

โดย \vec{g} คือเวกเตอร์แรงโน้มถ่วง (gravity vector) โดย

$$\vec{g} = g_x \vec{\delta}_x + g_y \vec{\delta}_y + g_z \vec{\delta}_z \quad (24)$$

และมวลของกลุ่มอนุภาคของไหลคือผลคูณของความหนาแน่นและปริมาตรของกลุ่มอนุภาคของไหล

$$\delta m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \quad (25)$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนแรงภายใน \vec{F}_b ในแต่ละแนวแกนได้ดังนี้

$$\sum F_{x,b} = g_x \rho \Delta x \Delta y \Delta z \quad (26)$$

$$\sum F_{y,b} = g_y \rho \Delta x \Delta y \Delta z \quad (27)$$

$$\sum F_{z,b} = g_z \rho \Delta x \Delta y \Delta z \quad (28)$$

หารตลอดสมการที่ (26) – (28) ด้วย $\Delta x \Delta y \Delta z$ จะได้

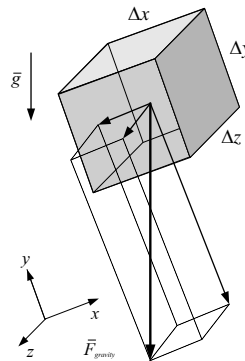
$$\sum \delta F_{x,b} = g_x \rho \quad (29)$$

$$\sum \delta F_{y,b} = g_y \rho \quad (30)$$

$$\sum \delta F_{z,b} = g_z \rho \quad (31)$$

และมีเวกเตอร์ผลรวมของแรงภายในรวมต่อหน่วยปริมาตรที่เขียนในแกน x , y และ z คือ

$$\sum \delta \vec{F}_b = \sum \delta F_{x,b} \vec{\delta}_x + \sum \delta F_{y,b} \vec{\delta}_y + \sum \delta F_{z,b} \vec{\delta}_z \quad (32)$$



รูปที่ 6. กลุ่มอนุภาคของไหลปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ๆ $\Delta x \Delta y \Delta z$ อยู่ในสนามแรงโน้มถ่วง \vec{g}

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

ในการสังเกตการเคลื่อนที่ของกลุ่มอนุภาคของไหลแบบลากรางจ์ (Lagrangian approach) เราใช้กฎข้อที่ 2 ของนิวตันที่ว่าผลรวมของแรง $\sum \vec{F}$ ที่กระทำกับปริมาตรควบคุมของกลุ่มอนุภาคของไหลที่มีมวล δm ให้เคลื่อนที่ ณ ช่วงเวลา t_0 ใด ๆ จะแปรผันตรงกับความเร่ง

$$\sum \vec{F} = \frac{D}{Dt}(\delta m \vec{v}) \quad (33)$$

เมื่อโอเปอเรเตอร์อนุพันธ์รวม (total or material derivative) นิยามโดย

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \{\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\}(\cdot) \quad (34)$$

เมื่อ \vec{v} คือความเร็วของของไหลแสดงในสมการที่ (5) และ $\vec{\nabla}$ คือเวกเตอร์เกรเดียนต์แสดงในสมการที่ (6) สมการที่ (33) มีความหมายว่าผลรวมของแรง $\sum \vec{F}$ ที่กระทำกับปริมาตรควบคุมของกลุ่มอนุภาคของไหลที่มีมวล δm มีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมหรือการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมจะก่อให้เกิดแรงนั้นคือสมการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of linear momentum) นั่นเอง ถ้าโดยปริมาตรควบคุมของกลุ่มอนุภาคของไหลมีปริมาตร $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ และมีความหนาแน่น ρ ดังนั้น

$$\sum \vec{F} = \frac{D}{Dt}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z \vec{v}) \quad (35)$$

หารตลอดด้วยปริมาตรของกลุ่มอนุภาคของไหล $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ จะได้ผลรวมของแรงต่อหน่วยปริมาตร $\sum \delta \vec{F}$

$$\frac{D}{Dt}(\rho \vec{v}) = \sum \delta \vec{F} \quad (36)$$

โดยผลรวมของแรงต่อหน่วยปริมาตรที่กระทำบนปริมาตรควบคุมจะเท่ากับผลรวมของแรงที่พื้นผิวต่อหน่วยปริมาตรรวมกับผลรวมของแรงภายในต่อหน่วยปริมาตรนั้นคือ

$$\sum \delta \vec{F} = \sum \delta \vec{F}_b + \sum \delta \vec{F}_s \quad (37)$$

โดยผลรวมของแรงที่พื้นผิวต่อหน่วยปริมาตร $\sum \delta \vec{F}_s$ แสดงในสมการที่ (22) และผลรวมของแรงภายในต่อหน่วยปริมาตร $\sum \delta \vec{F}_b$ แสดงในสมการที่ (32) แทนค่าเวกเตอร์ความเร็วในสมการที่ (5) และแทนค่าเวกเตอร์ผลรวมของแรงจากสมการที่ (37) ลงในสมการที่ (36) จะได้สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น (conservation of linear momentum or Cauchy's equation) ในแนว x , y และ z ดังนี้

$$\frac{D}{Dt}(\rho v_x) = g_x \rho - \left(\frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{zx}}{\partial z} \right) \quad (38)$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho v_y) = g_y \rho - \left(\frac{\partial \pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{zy}}{\partial z} \right) \quad (39)$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho v_z) = g_z \rho - \left(\frac{\partial \pi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{zz}}{\partial z} \right) \quad (40)$$

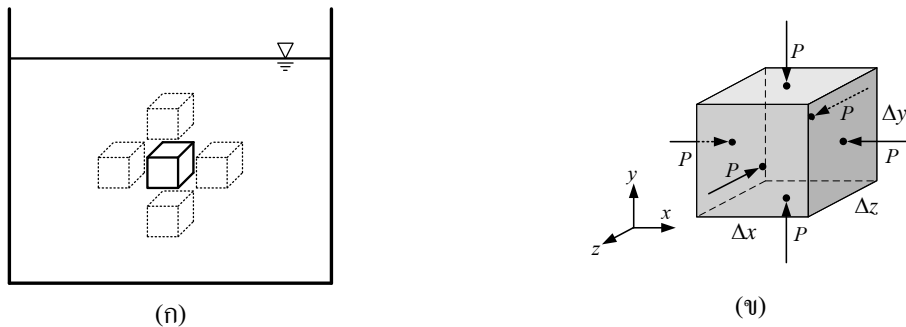
สมการที่ (38) – (40) เป็นสมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นที่แสดงในแนวแกน x , y และ z หรือเรียกชื่อตามผู้ที่คิดค้นขึ้นมาคือสมการของคาวชี (Cauchy's equation) สมการของคาวชีนี้มีตัวแปรอยู่ทั้งหมด 12 ตัว นั่นคือความเค้นทั้ง 9 ตัวรวมกับความเร็วในแนวแกน x , y และ z อีก 3 ตัว (v_x, v_y, v_z) แต่สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นมีอยู่แค่ 3 สมการเมื่อรวมกับสมการอนุรักษ์มวลอีก 1 สมการก็ยังไม่สามารถแก้สมการได้

สมการการเคลื่อนที่

ในบทก่อนหน้านี้สมการของคาวชีซึ่งไม่สามารถใช้แก้สมการได้เราจึงจะต้องลดทอนตัวแปรลงให้เหลือแค่ 4 ตัว ซึ่งเราจะเรียกว่าสมการการเคลื่อนที่ (the equation of motion) แต่ก่อนอื่นให้พิจารณาของไหลในบ่อที่ไม่มีการเคลื่อนที่ (fluid at rest) ดังนั้นกลุ่มอนุภาคของไหลจะไม่มีมีความเค้นเฉือนแต่ยังคงมีแรงดันของของไหลในทุกทิศทางที่เกิดจากแรงภายนอกดังรูปที่ 7 โดยแรงดันเหล่านี้เกิดจากน้ำหนักของของเหลวที่ทับถมลงมานั่นเอง ดังนั้นเทนเซอร์ความเค้นรวม (total stress tensor, $\underline{\underline{\pi}}$) สำหรับของไหลไม่มีการเคลื่อนที่ (fluid at rest) จะมีแต่ความเค้นตั้งฉากที่พุ่งเข้าหาปริมาตรควบคุมทุกทิศทางและมีค่าเท่ากับความดัน P

$$\underline{\underline{\pi}} = \begin{pmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zy} & \pi_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (41)$$

ดังนั้นค่าเฉลี่ยของความดันสามารถหาได้จากผลรวมของความเค้นตั้งฉากในขณะหนึ่งของไหลหยุดนิ่งนั่นคือ

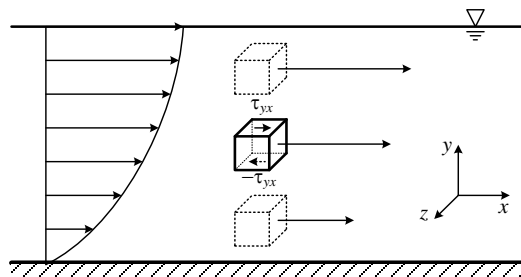


รูปที่ 7. (ก) แสดงของไหลในบ่อที่ไม่มีการเคลื่อนที่ (fluid at rest) และ (ข) ความเค้นตั้งฉากที่พุ่งเข้าหาปริมาตรควบคุมทุกทิศทุกทางและมีค่าเท่ากับความดัน P

$$P = \frac{1}{3}(\pi_{xx} + \pi_{yy} + \pi_{zz}) \quad (42)$$

แต่ถ้าของไหลมีการเคลื่อนที่ (moving fluid) นอกจากกลุ่มของไหลจะถูกกระทำโดยความเค้นเฉือนดังแสดงในรูปที่ 8 แล้วยังมีแรงดันของของไหลในทุกทิศทุกทางอีกด้วย ดังนั้นเทนเซอร์ความเค้นรวม (total stress tensor, $\underline{\underline{\pi}}$) สำหรับของไหลมีการเคลื่อนที่ (moving fluid) จะมีทั้งความเค้นตั้งฉาก (จากแรงดัน) และความเค้นที่เกิดขึ้นขณะกลุ่มอนุภาคของไหลเคลื่อนที่ (จากแรงเสียดทานหรือโมเมนตัม) นั่นคือ

$$\underline{\underline{\pi}} = \begin{pmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zy} & \pi_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (43)$$



รูปที่ 8. แสดงตัวอย่างของไหลที่มีการเคลื่อนที่ (moving fluid) โดยในที่นี้กลุ่มอนุภาคของไหลจะมีความเค้นเฉือน τ_{yx} ที่พื้นผิวด้านบนเนื่องจากกลุ่มอนุภาคของไหลข้างบน ซึ่งมีความเร็วที่สูงกว่าในทางกลับกันที่พื้นผิวด้านล่าง กลุ่มอนุภาคของไหลจะมีความเค้นเฉือน $-\tau_{yx}$ จากกลุ่มอนุภาคของไหลข้างล่างที่มีความเร็วที่ช้ากว่า

เราเรียกเทอมที่ 2 ทางขวามือของสมการที่ (43) ว่าเทนเซอร์ความเค้นเฉียดทาน หรือเทนเซอร์ความเค้นเฉือน หรือเทนเซอร์โมเมนตัมฟลักซ์ (viscous stress tensor or deviatoric stress tensor or momentum flux tensor, $\underline{\tau}$) โดยความเค้นเฉียดทานเนื่องจากการเคลื่อนที่จะประกอบไปด้วยความเค้นดัดจาก 3 ตัวในแนวทแยงมุม และความเค้นเฉือนอีก 6 ตัวที่เหลือ โดยความเค้นดัดจากทั้ง 3 ตัวนี้อาจจะเกิดจากการที่กลุ่มอนุภาคของไหลข้าง ๆ ปริมาตรควบคุมบีบหรือดึงก็ได้ และความเค้นเฉือนทั้ง 6 ตัวอาจจะเกิดจากการที่กลุ่มอนุภาคของไหลข้าง ๆ ปริมาตรควบคุมเฉียดสีในแนวต่าง ๆ กัน ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการ (43) ด้วยสัญลักษณ์เทนเซอร์ได้ดังนี้ (ดูตาราง 1.2.2 ใน Bird et al., 2015)

$$\underline{\pi} = P\underline{\delta} + \underline{\tau} \quad (44)$$

โดยเทนเซอร์เอกลักษณ์ $\underline{\delta}$ นิยามโดย

$$\underline{\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

แทนค่าความเค้นรวมลงในสมการของควอซีสมการที่ (38) – (40) ยกตัวอย่าง เช่น นำค่าความเค้นดัดจาก และความเค้นเฉือนที่กระทำในแนวแกน x จากสมการที่ (43)

$$\pi_{xx} = P + \tau_{xx} \quad (46)$$

$$\pi_{yx} = \tau_{yx} \quad (47)$$

$$\pi_{zx} = \tau_{zx} \quad (48)$$

แทนลงในสมการของควอซีในแนว x สมการที่ (38) จะได้

$$\frac{D}{Dt}(\rho v_x) = g_x \rho - \left(\frac{\partial}{\partial x}(P + \tau_{xx}) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (49)$$

จัดรูปสมการที่ (49) ใหม่จะได้

$$\frac{D}{Dt}(\rho v_x) = g_x \rho - \frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (50)$$

ในทำนองเดียวกันนำค่าความเค้นดัดจากและความเค้นเฉือนที่กระทำในแนวแกน y จากสมการที่ (43) แทนลงในสมการของควอซีในแกน y [สมการที่ (39)] และนำค่าความเค้นดัดจากและความเค้นเฉือนที่กระทำในแนวแกน z จากสมการที่ (43) แทนลงในสมการของควอซีในแกน z [สมการที่ (40)] จะได้

$$\frac{D}{Dt}(\rho v_y) = g_y \rho - \frac{\partial P}{\partial y} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (51)$$

และ

$$\frac{D}{Dt}(\rho v_z) = g_z \rho - \frac{\partial P}{\partial z} - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (52)$$

เขียนสมการการเคลื่อนที่ (50) – (52) ให้อยู่ในรูปเวกเตอร์-เทนเซอร์ ได้คือ

$$\frac{D}{Dt}(\rho \vec{v}) = -\vec{\nabla} P - [\vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}}] + \rho \vec{g} \quad (53)$$

โดยเวกเตอร์ความเร็วและเวกเตอร์แรงเค้นตึงในระบบแกนพิกัดฉากแสดงในสมการที่ (5) และ (6) ส่วนโอเปอเรเตอร์อนุพันธ์รวมแสดงในสมการที่ (34) เมื่อแทนค่าอนุพันธ์รวมลงในสมการที่ (51) ทำให้สมการการเคลื่อนที่ในแนวแกน x เขียนได้ดังนี้

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \quad (54)$$

ในทำนองเดียวกันสมการการเคลื่อนที่ในแนวแกน y

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = - \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \quad (55)$$

และสมการการเคลื่อนที่ในแนวแกน z

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \quad (56)$$

ในการไหลที่ไม่สามารถกดอัดได้ (incompressible) และมีอุณหภูมิคงที่ (isothermal) ของไหลแบบนิวทรอนเนียนจะมีพฤติกรรมการไหลที่ความเค้นเฉือนจะแปรผันตรงกับอัตราความเค้นเฉือน นั่นคือ

$$\underline{\underline{\tau}} = -\mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \quad (57)$$

เมื่อ μ คือค่าความหนืดนิวทรอนเนียน ซึ่งเป็นค่าคงที่และ $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ คือเทนเซอร์อัตราการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเชิงมุมนิยามโดย

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = (\vec{\nabla} \vec{v}) + (\vec{\nabla} \vec{v})^T \quad (58)$$

ดังนั้นจากสมการที่ (57) เทนเซอร์ความเค้นเฉือน $\underline{\underline{\tau}}$ จะเขียนได้ดังนี้

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} & -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} & -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (59)$$

เมื่อแทนค่า

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (60)$$

$$\tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (61)$$

$$\tau_{zx} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (62)$$

ลงในสมการการเคลื่อนที่ (equation of motion) ในแนว x ในสมการที่ (54) และใช้ความสัมพันธ์ของสมการอนุรักษ์มวลสำหรับของไหลที่อัดตัวไม่ได้ในสมการที่ (10) จะได้

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \quad (63)$$

ในทำนองเดียวกันในแนวแกน y และ z จะได้

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \quad (64)$$

และ

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \quad (65)$$

กำหนดให้ลาปลาซโอเปอเรเตอร์ (Laplace operator) ในระบบแกนพิกัดฉากคือ

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (66)$$

ดังนั้นเขียนสมการที่ (63) - (65) ในรูปเวกเตอร์ได้ว่า

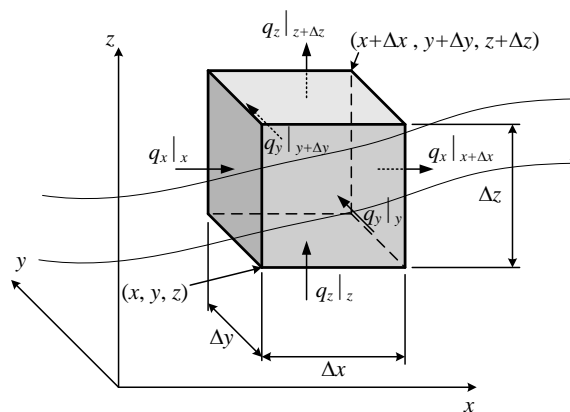
$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} - \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (67)$$

เราเรียกสมการที่ (67) ว่าสมการนาเวียร์-สโตก (Navier-Stokes equation) ซึ่งใช้แก้ปัญหาการไหลสำหรับของไหลชนิดนิวทอนเนียนโดยมีสมการควบคุมสำหรับของไหลที่อัดตัวไม่ได้ในระบบแกนพิกัดฉากคือสมการอนุรักษ์มวล 1 สมการ [สมการที่ (10)] และมีสมการนาเวียร์-สโตกในแนวแกน x , แนวแกน y , และแนวแกน z อีก 3 สมการ [(63) - (65)] ส่วนตัวแปรทั้ง 4 ตัวที่เป็นสมการคำตอบคือ v_x , v_y , v_z และ P

กฎอนุรักษ์พลังงาน

พิจารณากลุ่มอนุภาคของไหลปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ๆ $\Delta x \Delta y \Delta z$ ที่มีของไหลไหลผ่านด้วยความเร็ว v_x ในแนวแกน x , v_y ในแนวแกน y และ v_z ในแนวแกน z ตามลำดับ (ดูรูปที่ 9) ในกรณีที่ปริมาตรควบคุมนี้ไม่มีการเคลื่อนไหวใด ๆ ที่ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ และพลังงานศักย์ ดังนั้นจากกฎข้อที่ 1 ของ

เทอร์โมไดนามิกส์ ที่กล่าวไว้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในปริมาตรควบคุมจะมีค่าเท่ากับผลรวมของการถ่ายเทความร้อนเนื่องจากการนำความร้อนผ่านพื้นผิวของปริมาตรควบคุม บวกกับความร้อนที่เกิดจากงานที่เนื่องมาจากการเสียดสีกันเองของโมเลกุลของของไหล (viscous dissipation) ภายในปริมาตรควบคุม โดยความร้อนที่ไหลเข้าปริมาตรควบคุมมีค่าเป็นบวก (+) และปริมาณความร้อนที่ไหลออกจากปริมาตรควบคุมมีค่าเป็นลบ (-) ดังนั้น (ดูหัวข้อ 5.1.4 ของ Osswald & Hernandez-Ortiz, 2006)



รูปที่ 9. แสดงการถ่ายเทความร้อนของกลุ่มอนุภาคของไหลผ่านปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก ๆ $\Delta x \Delta y \Delta z$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} \Delta x \Delta y \Delta z = (q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z + (q_y|_y - q_y|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z + (q_z|_z - q_z|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y + \Phi \Delta x \Delta y \Delta z \quad (68)$$

โดยค่าความจุความร้อนที่ความดันคงที่ (heat capacity) c_p อาจจะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ โอเปอเรเตอร์ $\frac{D(\cdot)}{Dt}$ เป็นอนุพันธ์รวมถูกนิยามไว้ในสมการที่ (34) q_x เป็นการนำความร้อนในแนวแกน x ผ่านหน้าตัด $\Delta y \Delta z$ ในขณะที่ q_y เป็นการนำความร้อนในแนวแกน y ผ่านหน้าตัด $\Delta x \Delta z$ และ q_z เป็นการนำความร้อนในแนวแกน z ผ่านหน้าตัด $\Delta x \Delta y$ ตามลำดับ Φ เป็นอัตราการเกิดความร้อนต่อหน่วยปริมาตรที่เกิดจากการเสียดสีกันเองของโมเลกุลของของไหล (viscous dissipation) หาค่าตลอดสมการที่ (68) ด้วย $\Delta x \Delta y \Delta z$ แล้วให้ลิมิตให้ปริมาตรควบคุมเล็กลงจนเข้าใกล้ศูนย์

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left\{ \rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\frac{q_x|_{x+\Delta x} - q_x|_x}{\Delta x} - \frac{q_y|_{y+\Delta y} - q_y|_y}{\Delta y} - \frac{q_z|_{z+\Delta z} - q_z|_z}{\Delta z} + \Phi \right\} \quad (69)$$

จะได้รูปสมการอนุพันธ์ทั่วไปของกฎการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) ในระบบแกนพิกัดฉากสำหรับของไหลที่ไม่มีปฏิกิริยาเคมีใด ๆ

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + \Phi \quad (70)$$

โดยกฎการนำความร้อนของฟูริเยร์ (Fourier's law of heat conduction) ในระบบแกนพิกัดฉากคือ

$$q_x = -k_x \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k_y \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -k_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (71), (72), (73)$$

โดย k_x , k_y และ k_z เป็นค่าการนำความร้อน (thermal conductivity) ในแนวแกน x , y และ z ตามลำดับ และในกรณีที่ของไหลมีความเป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous) ค่าการนำความร้อนจะมีค่าคงที่โดย $k_x = k_y = k_z = k$ สมการอนุรักษ์พลังงาน (70) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \Phi \quad (74)$$

สมการที่ (74) เขียนในรูปสมการเวกเตอร์จะได้ (Bird et al., 1960 และ Bird et al., 1987)

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \Phi \quad (75)$$

โดย ∇^2 คือลาปลาซโอเปอเรเตอร์ (Laplace operator) แสดงในสมการที่ (66) โดยสมการอนุรักษ์พลังงานในระบบแกนพิกัดฉาก แกนทรงกระบอก และแกนทรงกลมถูกแสดงไว้ในตารางที่ 10.2.2-3 ใน Bird et al., 1960 หรือในหัวข้อ B.9 ใน Bird et al., 2002 และกฎการนำความร้อนของฟูริเยร์ ที่เขียนอยู่ในระบบแกนต่าง ๆ แสดงในตารางที่ 10.2.1 ใน Bird et al., 1960 หรือในหัวข้อ B.2 ใน Bird et al., 2002 และอัตราการเกิดความร้อนต่อหน่วยปริมาตรที่เกิดจากการเสียดสีกันเองของโมเลกุลของของไหล (viscous dissipation) สามารถเขียนอยู่ในระบบแกนพิกัดฉากคือ (Denn, 2008)

$$\begin{aligned} \Phi = -\frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \right) = & -\tau_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \tau_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \tau_{xy} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ & - \tau_{xz} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \tau_{yz} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (76)$$

อัตราการเกิดความร้อนต่อหน่วยปริมาตรที่เกิดจากการเสียดสีกันเองของโมเลกุลของของไหลหาได้จากสมการที่ (76) สามารถเขียนอยู่ในรูปสมการเวกเตอร์ได้คือ

$$\Phi = -\frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \right) \quad (77)$$

โดยเทนเซอร์อัตราความเครียด $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ ถูกนิยามไว้ในสมการที่ (58) และเทนเซอร์ความเค้นเสียดทานของของไหลนิวทรอนเนียนถูกนิยามไว้ในสมการที่ (59) โดยสมการที่ (77) สามารถเขียนในรูปอินดิเคซ์ได้ดังนี้

$$\Phi = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \dot{\gamma}_{ji} \quad (78)$$

ถ้าเป็นของไหลอัดตัวไม่ได้ชนิดนิวทรอนเนียนอัตราการเกิดความร้อนต่อหน่วยปริมาตรที่เกิดจากการเสียดสีกันเองของโมเลกุลของของไหลสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเทนเซอร์อัตราเครียดแบบเบิลคอตกับตัวมันเอง ดังนั้น

$$\Phi = \frac{\mu}{2} (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \quad (79)$$

และเขียนอยู่ในรูปอินดิเคซ์ได้คือ

$$\Phi = \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ji}) \quad (80)$$

โดยอัตราการเกิดความร้อนต่อหน่วยปริมาตรที่เกิดจากการเสียดสีกันเองของโมเลกุลของของไหล Φ (viscous dissipation) ในพิกัดทรงกระบอกและพิกัดทรงกลมถูกแสดงไว้ในตารางที่ 3.4.8 ใน Bird et al., 1960 หรือในหัวข้อ B7 ใน Bird et al., 2002

บทสรุป

ด้วยมุมมองทางกลศาสตร์ความต่อเนื่อง (continuum mechanics) การได้มาของกฎการอนุรักษ์ต่าง ๆ จึงต้องเริ่มจากการพิจารณาก้อนของไหลที่ถูกตัดพาไปในระบบแกนและมีการไหลผ่านปริมาตรควบคุม (control volume) ที่เวลา t_0 ใด ๆ โดยในที่นี้แม้ว่าเราจะใช้ระบบแกนพิกัดจากเป็นพิกัดอ้างอิงในการอธิบายสมการกฎการอนุรักษ์ของไหลเนื่องจากเป็นระบบแกนที่เข้าใจได้ง่าย (intuitive) แต่อย่างไรก็ตามสมการกฎการอนุรักษ์ทั้งหมดได้ถูกเขียนให้อยู่ในรูปสมการเวกเตอร์ ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับระบบแกนพิกัดใด ๆ และสามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้ในทุกระบบแกนขึ้นอยู่กับรูปทรงของช่องทางไหล (flow channel)

โดยสรุปแล้วสมการกฎการอนุรักษ์มวลกล่าวว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลในปริมาตรควบคุมมีค่าเท่ากับอัตราของมวลที่ไหลเข้าปริมาตรควบคุมลบด้วยอัตราของมวลที่ไหลออกจากปริมาตรควบคุมทำให้เราสามารถเขียนสมการอนุรักษ์มวลได้ในสมการที่ (4) ในทำนองเดียวกันจากกฎข้อที่ 2 ของนิวตันที่ว่าผลรวมของแรง $\sum \vec{F}$ ที่กระทำกับปริมาตรควบคุมของกลุ่มอนุภาคของไหลที่มีมวล δm ให้เคลื่อนที่ ณ ช่วงเวลา t_0 ใด ๆ จะแปรผันตรงกับความเร่งทำให้เราสามารถสรุปกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมออกมาเป็นสมการที่ (53) ซึ่งเป็นสมการเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยเทอมที่ทำให้สมการนี้ไม่เป็นเชิงเส้นคือเทอมทางซ้ายมือของสมการที่ (53) นั่นเองท้ายสุดกฎการอนุรักษ์พลังงานได้จากกฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์ ที่กล่าวไว้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในปริมาตรควบคุมจะมีค่าเท่ากับผลรวมของการถ่ายเทความร้อนเนื่องจากการนำความร้อนผ่านพื้นผิวของปริมาตรควบคุม บวกกับความร้อนที่เกิดจากงานที่เนื่องมาจากการเสียดสีกันเองของโมเลกุลของของไหล (viscous dissipation) ภายในปริมาตรควบคุม ทำให้เราสามารถสรุปออกมาเป็นสมการอนุรักษ์พลังงานได้ [ดูสมการที่ (75)]

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณ นายพงศ์เทพ พ่วงทอง นักศึกษาระดับปริญญาเอก ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและการบิน-อวกาศ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ที่ช่วยอ่านตรวจทานต้นฉบับชุดนี้

เอกสารอ้างอิง

- Anco, S. C. & Bluman, G. (2002). Direct construction method for conservation laws of partial differential equations Part I: Examples of conservation law classifications. *European Journal of Applied Mathematics*, 13, 545-556. doi: 10.1017/S095679250100465X
- Bird, R. B., Armstrong, R. C. & Hassager, O. (1977). *Dynamics of Polymeric Liquids: Volume 1 Fluid Mechanics* (1st ed.). New York, USA: John Wiley and Sons.
- Bird, R. B., Armstrong, R. C. & Hassager, O. (1987). *Dynamics of Polymeric Liquids: Volume 1 Fluid Mechanics* (2nd ed.). New York, USA: John Wiley and Sons.
- Bird, R. B., Stewart, W. E. & Lightfoot, E. N. (1960). *Transport Phenomena*. New York, USA: John Wiley and Sons.
- Bird, R. B., Stewart, W. E. & Lightfoot, E. N. (2002). *Transport Phenomena* (2nd ed.). New York, USA: John Wiley and Sons.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., Lightfoot, E. N. & Klingenberg, D. J. (2015). *Introductory Transport Phenomena*. New York, USA: John Wiley and Sons.
- Cengel, Y. A. & Cimbala, J. M. (2006). *Fluid Mechanics, Fundamentals and Applications* (International Edition). New York, USA: McGraw Hill.
- Cheviakov, A. F. & Jean, S. St. (2015). A comparison of conservation law construction approaches for two-dimensional incompressible Mooney-Rivlin hyperelasticity model. *Journal of Mathematical Physics*, 56: 121505. doi: 10.1063/1.4937756
- Denn, M. M. (2008). *Polymer Melt Processing: Foundations in Fluid Mechanics and Heat Transfer*. New York, USA: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511813177
- Ertel, H. & Rossby, C. G. (1949). A new conservation-theorem of hydrodynamics. *Geofisica Pura e Applicata*, 14: 189. doi: 10.1007/BF01981973
- Gilbert, P. H. & Giacomini, A. J. (2019). Transport phenomena in bispherical coordinates. *Physics of Fluids*, 31: 021208. doi: 10.1063/1.5054581

- Gilbert, P. H., Saengow, C. & Giacomini, A. J. (2017). Transport phenomena in eccentric cylindrical coordinates. *AIChE Journal*, 63(8): 3563-3581. doi: 10.1002/aic.15671
- Kosmann-Schwarzbach, Y. (2011). *The Noether Theorems: Invariance and Conservation Laws in Twentieth Century*. New York, USA: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-87868-3
- Lai, W. M., Rubin, D. & Krempf, E. (2010). *Introduction to Continuum Mechanics* (4th ed.). New York, USA: Butterworth-Heinemann.
- Moon, P. & Spencer, D. E. (1988). *Field Theory Handbook* (2nd ed.). New York, USA: Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-3-642-83243-7
- Morrison, F. A. (2001). *Understanding Rheology*. New York, USA: Oxford University Press.
- Munson, B. R., Young, D. F. & Okiishi, T. H. (2002). *Fundamentals of Fluid Mechanics* (4th ed.). New York, USA: John Wiley and Sons.
- Naz, R., Mahomed, F. M. & Mason, D. P. (2008). Comparison of different approaches to conservation laws for some partial differential equations in fluid mechanics, *Applied Mathematics and Computation*, 205: 212-230. doi: 10.1016/j.amc.2008.06.042
- Osswald, T. A. & Hernandez-Ortiz, J. P. (2006). *Polymer Processing - Modeling and Simulation*. Munich, Germany: Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG. doi: 10.3139/9783446412866