ฟัซซีเซต – ตอนที่ 1
นิยามและฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิก

สุพจน์ นิตย์สุวัฒน์*

บทคัดย่อ

มนุษย์สามารถอธิบายพฤติกรรมของสิ่งต่าง ๆ รอบตัวเราด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ทฤษฎีเซตเป็นตัวอย่างหนึ่งของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังกล่าว หลักสำคัญของทฤษฎีฟัซซีเซต คือ ยอมรับสมาชิกที่มีลักษณะตามที่กำหนด (แม้เพียงบางส่วน) เข้ามาเป็นสมาชิก โดยมีการให้น้ำหนักระดับความเป็นสมาชิกกำกับไว้ด้วย บทความนี้เป็นบทความทางวิชาการของชุดบทความทางวิชาการเกี่ยวกับฟัซซีเซต โดยในบทความนี้จะนำเสนอความรู้เบื้องต้น นิยามและคุณสมบัติของฟัซซีเซตและฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตแบบต่างๆ พร้อมตัวอย่างประกอบ

คำสำคัญ: ทฤษฎีเซต ฟัซซีเซต ค่าระดับความปีนสมาชิก ฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิก

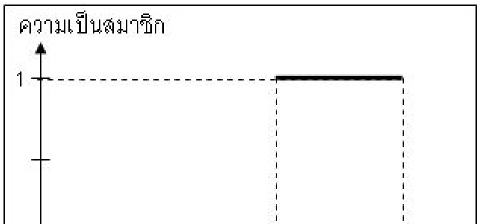
1. บทนำ

มนุษย์สามารถอธิบายพฤติกรรมของสิ่งต่าง ๆ รอบตัวเราด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้งแบบเชิงเส้นและแบบไม่เป็นเชิงเส้น ทฤษฎีเซตเป็นตัวอย่างหนึ่งของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังกล่าวซึ่งใช้เพื่อบอกว่าสิ่งใดมีคุณสมบัติบางประการเหมือนกับข้อกำหนดจนสามารถกำหนดให้สิ่งนั้นเป็นสมาชิกหนึ่งของกลุ่มนี้ ซึ่งกลุ่มของวัตถุนี้เรียกว่า เซต [11]

การจัดสิ่งของเข้าเป็นสมาชิกของเซตใด ๆ นั้นในบางกรณีคุณสมบัติของเซตทำให้สามารถบอกว่าได้ว่าสิ่งของนั้นๆ เป็นหรือไม่เป็นสมาชิกของเซตนั้นอย่างชัดเจน โดยมีโอกาสเป็นไปได้เพียงแค่ 2 แนวทางเท่านั้น คือเป็นหรือไม่เป็น เช่น ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่ที่มีค่าน้อยกว่า 12 ซึ่งทำให้เราสามารถตอบได้อย่างไม่ลังเลว่า 4 เป็นสมาชิกของเซต A และ 5 หรือ 24 ไม่เป็นสมาชิกของเซตนี้ อย่างไรก็ตามในบางสถานการณ์เป็นเรื่องยากที่จะระบุอย่างชัดแจ้งเช่นนี้ เช่น ให้ B เป็นเซตของผู้ชายอายุกลางคน ซึ่งในกรณีนี้ผู้ชายที่มีอายุ 50 ปีเป็นสมาชิกของเซตนี้อย่างแน่นอน สำหรับผู้ชายที่มีอายุ 40 ปีหรือ 60 ปีนั้นอาจมีบางคนกำหนดว่าไม่ใช่สมาชิกของเซตนี้ แต่คนส่วนใหญ่ยังคงกำหนดให้ผู้ชายทั้งสองนี้เป็นสมาชิกของเซตนี้อยู่ และสำหรับผู้ชายที่มีอายุ 30 ปีหรือ 70 ปีนั้น คนจำนวนมากขึ้นกำหนดว่าไม่ใช่สมาชิกของเซตนี้

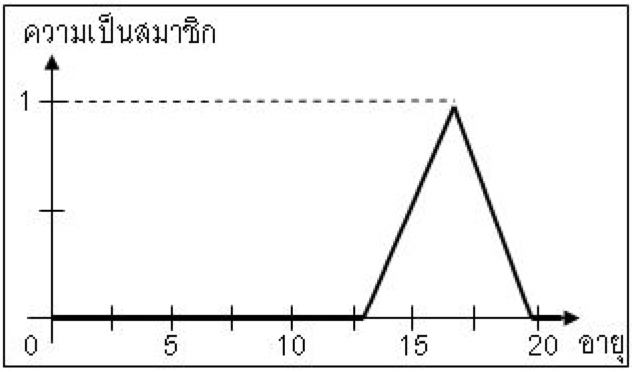
มนุษย์สามารถตัดสินใจเลือกสิ่งของหรือชี้ตัวและรู้จำบุคคล วัตถุ สิ่งของได้ แม้บางครั้งได้รับข้อมูลที่คลุมเครือ ไม่ครบถ้วน จากการศึกษาวิจัยพบว่าวิธีการหนึ่งที่มนุษย์ใช้คือการประมาณค่าปริมาณที่วัดได้ [1] ดังนั้นการที่มีบางคนยังคงระบุว่าผู้ชายที่มีอายุ 40 ปีหรือ 60 ปีเป็นสมาชิกของเซตนี้ เพราะคนกลุ่มนี้ใช้การประมาณค่าที่ได้รับ (อายุ 40 ปีหรือ 60 ปี) ว่าน่าจะอยู่ในเซตนี้ แต่มีค่าความมั่นใจน้อยกว่าความมั่นใจที่มีให้กับกรณีผู้ชายอายุ 50 ปีซึ่งเป็นสมาชิกของเซตนี้อย่างแน่นอน

ทฤษฎีฟัซซีเซต (Fuzzy set) ช่วยให้สามารถอธิบายพฤติกรรมของระบบต่างที่ปรากฏในชีวิตประจำวันได้ชัดเจนขึ้นกว่าการอธิบายทางคณิตศาสตร์โดยใช้ทฤษฎีเซตแบบดั้งเดิม (Crisp set) ทำให้ไม่เกิดข้อโต้แย้ง หลักสำคัญของทฤษฎีฟัซซีเซตคือ ยอมรับสมาชิกที่มีลักษณะตามที่กำหนดของเซตนั้นๆ แม้เพียงบางส่วนเข้ามาเป็นสมาชิก โดยสมาชิกทุกค่ามีการให้น้ำหนักค่าระดับความเป็นสมาชิกกำกับไว้ด้วย ซึ่งแตกต่างจากทฤษฎีเซตดั้งเดิม ซึ่งทฤษฎีเซตดั้งเดิมนั้นจะระบุอย่างชัดเจนว่าสิ่งที่กำลังพิจารณาเป็นสมาชิกของเซตนั้นหรือไม่เท่านั้น สำหรับสิ่งของที่มีลักษณะสอดคล้องกับคุณสมบัติของเซตนี้บางส่วนถือว่าไม่เป็นสมาชิกของเซตนี้ ในตรรกศาสตร์ทั่วไปจะกำหนดค่าเพียงว่าเป็น “0” หรือเป็น “1” เพื่อบอกความเป็นสมาชิกของเซตหรือไม่ หรือ “ถูก” หรือ “ผิด” เท่านั้น ภาพที่ 1 แสดงกราฟของฟังก์ชันของระดับความเป็นสมาชิกของเซตของวัยรุ่นตามนิยามทฤษฎีเซตดั้งเดิม ในขณะที่ภาพที่ 2 แสดงกราฟของฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตซึ่งจะยอมรับสมาชิกที่มีลักษณะที่ถูกเพียงบางส่วนและผิดเพียงบางส่วนเข้ากลุ่ม [1,3,8]



ภาพที่ 1 กราฟฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิก ของเซตวัยรุ่นแบบดั้งเดิม

* อาจารย์ ระดับ 7 ภาควิชาคอมพิวเตอร์ศึกษา คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม สจพ. และ รองคณบดีฝ่ายวิชาการ คณะเทคโนโลยีสารสนเทศ สจพ.



ภาพที่ 2 กราฟฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตวัยรุ่น

บทความนี้เป็นบทความทางวิชาการตอนที่หนึ่งของชุดบทความทางวิชาการแบบต่อเนื่องเกี่ยวกับฟัซซีเซต โดยในตอนนี้จะนำเสนอความรู้เบื้องต้น นิยามและคุณสมบัติของฟัซซีเซตและฟังก์ชันของระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตแบบต่างๆ พร้อมตัวอย่างประกอบ

จัดลำดับการนำเสนอเนื้อหาเป็นดังนี้ ในหัวข้อถัดไปกล่าวถึงนิยามของฟัซซีเซต ในหัวข้อที่ 3 กล่าวถึงฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซต และข้อสรุปของบทความจะนำเสนอในลำดับสุดท้ายตามลำดับ

2. ฟัซซีเซตและคุณสมบัติ

ฟัซซีเซตจะต้องแสดงค่าระดับความเป็นสมาชิกของเซต (Membership value) กำกับมาด้วยพร้อมกับสมาชิกนั้นๆ เราใช้ m_A แทนฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิก

<u>นิยาม 1</u> [2] ถ้าให้

1. U เป็นเซตของสมาชิกที่เป็นไปได้ของเซตนั้น ๆ (U = Universe of discourse, Space of object)
2. x เป็นสมาชิกที่อยู่ภายใน U (x = Generic element of set U)
3. $r_1, r_2, r_3,...,r_n$ คือ คุณสมบัติจำนวน n ค่าของ x หรือ n-tuple Property vectors ซึ่งมีลักษณะไม่เกี่ยวข้องกันและกัน (Mutually unrelated) และ x เป็น Property space (มีคุณสมบัติภายใน Space ที่เรากำหนด) นั่นคือ

$$x = (r_1, r_2, r_3,...,r_n)$$

โดยที่ $m_A(x)$ เป็นฟังก์ชันของระดับความเป็นสมาชิกที่มีความสัมพันธ์ที่แน่นอนกับคุณสมบัติของ x ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$m_A(x = (r_1, r_2, r_3,...,r_n))$$

เมื่อเรานำค่าฟังก์ชันที่เรากำหนดมาข้างต้นนี้รวมกับคุณสมบัติที่นิยามโดยเซตของ x ซึ่งมีค่าอยู่ในช่วง [0,1] จะได้ค่าของ $m_A(x = (r_1, r_2, r_3,...,r_n))$ [0,1] หรืออาจเขียนโดยย่อเป็น $m_A(x)$ [0,1] ซึ่งหมายความว่าค่าระดับความเป็นสมาชิกของ x ในฟัซซีเซต A เป็นจำนวนจริงที่มีค่าอยู่ในช่วงระหว่าง 0 ถึง 1 โดยค่า 0 จะหมายถึงไม่เป็นสมาชิก และ 1 คือ เป็นสมาชิกอย่างสมบูรณ์

<u>นิยาม 2</u> [2] ให้ x อยู่ใน U และ $r_1, r_2, r_3,...,r_n$ เป็นคุณสมบัติจำนวน n ค่าของ x เมื่อฟัซซีเซต A อยู่ใน U แล้วจะได้เซตของคู่ลำดับ

$$A = \{x, m_A(x = (r_1, r_2, r_3,...,r_n))\}$$

โดยฟังก์ชันของความเป็นสมาชิก (Membership function) $m_A(x)$ ถูกนิยามให้อยู่ในรูปของ

$$m_A(x) \mid x \rightarrow [0,1]$$

ซึ่ง [0,1] เป็นเลขจำนวนจริงซึ่งมีค่าอยู่ในช่วงตั้งแต่ 0 ถึง 1

สำหรับกรณีเซตแบบดั้งเดิม (Crisp set) ซึ่งนิยามว่า

$$f_A(x) \mid x \rightarrow \{0,1\} \quad \text{โดยที่} \quad f_A(x) = \begin{cases} 1 & for\ x \in A \\ 0 & for\ x \notin A \end{cases}$$

ซึ่งหมายความว่า x เป็นสมาชิกของเซต A ก็ต่อเมื่อ $f_A(x) = 1$ และ x ไม่ได้เป็นสมาชิกของเซต A ก็ต่อเมื่อ $f_A(x) = 0$

เราสามารถแทนฟัซซีเซตใด ๆ ด้วยสัญลักษณ์ 2 รูปแบบซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะของเซต U ดังนี้ ถ้า U มีค่าต่อเนื่องแล้วฟัซซีเซตจะเขียนได้เป็น $A = \int_U \mu_A(x)/x$ แต่ถ้า U เป็นจำนวนเต็มหน่วยแล้วฟัซซีเซตจะเขียนได้เป็น

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$$

โดยที่ $\int$ และ $\sum$ เป็นตัวกระทำบรรยายคู่ (Listed pair) [4, 10]

ตัวอย่างที่ 1 ให้เอกภพสัมพัทธ์คือ ผลแอปเปิ้ล และพิจารณาเซตของแอปเปิ้ลสีแดง ดังนั้นจะได้

$$A = \{x \mid x \text{ เป็นผลแอปเปิ้ลสีแดง}\}$$

และ $$\overline{A} = \{x \mid x \text{ ไม่เป็นผลแอปเปิ้ลสีแดง}\}$$

ให้ x_1 เป็นผลแอปเปิ้ลสีแดงทั้งผล ดังนั้น x_1 เป็นสมาชิกของฟัซซีเซต A (โดยมีค่าระดับความเป็นสมาชิกเท่ากับ 1.0)

x_2 เป็นผลแอปเปิ้ลสีแดงเกือบทั้งผล ยกเว้นบางบริเวณจะเป็นสีเขียว (ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 1 cm^2) ดังนั้น x_2 เป็นสมาชิกของเซต A (แต่ไม่ใช่ทั้งผล) ค่าระดับความเป็นสมาชิกของ x_2ไม่เท่ากับค่าระดับความเป็นสมาชิกของ x_1 ข้างต้น (โดยมีค่าระดับความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0.9)

x_3 เป็นผลแอปเปิ้ลสีแดงเกือบทั้งผล ยกเว้นบางบริเวณซึ่งจะเป็นสีเขียวมีพื้นที่ประมาณ 2 cm^2 ดังนั้น x_3 ยังคงเป็นสมาชิกของเซต A (แต่ไม่ใช่ทั้งผล) ค่าระดับความเป็นสมาชิกของ x_3 น้อยกว่าค่าระดับความเป็นสมาชิกของ x_2 ข้างต้น (โดยมีค่าระดับความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0.8)

x_n เป็นผลแอปเปิ้ลสีเขียวทั้งผล ดังนั้น x_n ไม่ได้เป็นสมาชิกของฟัซซีเซตเซต A (มีค่าระดับความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0.0)

นั่นคือ $A = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ และ $m_A(x = (1.0, 0.9, 0.8, ..., 0.0))$ รวมกันได้เป็น

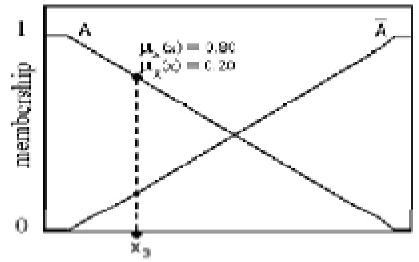
$A = \{(x_1, 1.0), (x_2, 0.9), (x_3, 0.8), ..., (x_n, 0.0)\}$ หรือ

$A = x_1 / 1.0) + x_2 / 0.9 + x_3 / 0.8 + ... + x_n / 0.0$ และมี

$\overline{A} = \{(x_1, 0.0), (x_2, 0.1), (x_3, 0.2), ..., (x_n, 1.0)\}$ หรือ

$\overline{A} = x_1 / 0.0) + x_2 / 0.1 + x_3 / 0.2 + ... + x_n / 1.0$

ดังนั้นในภาพที่ 3 พบว่า x_3 มีค่าระดับความเป็นสมาชิกในฟัซซีเซต A เท่ากับ 0.8

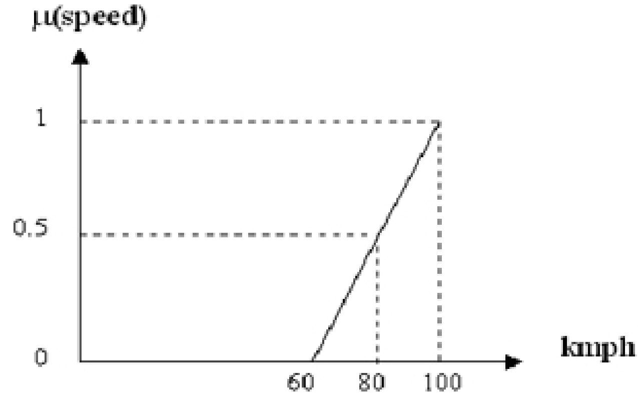


ภาพที่ 3 ค่าระดับความเป็นสมาชิกของสมาชิก x_3 ในฟัซซีเซต A และ $\overline{A}$

ตัวอย่างที่ 2 [4] ให้ B เป็นเซตของความเร็วของยานพาหนะที่มีค่าสูง

B = {(60,0),(80,0.5),(100,1)}

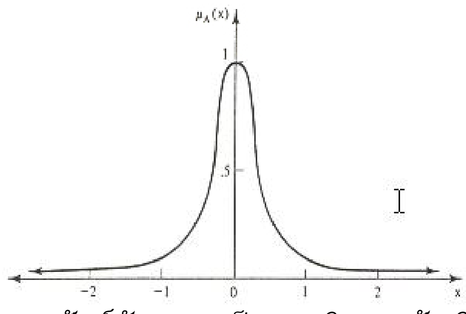
เราสามารถเขียนแทนฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซต B ด้วยแผนภาพได้ดังภาพที่ 4



ภาพที่ 4 ฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตของความเร็วของยานพาหนะที่มีค่าสูง

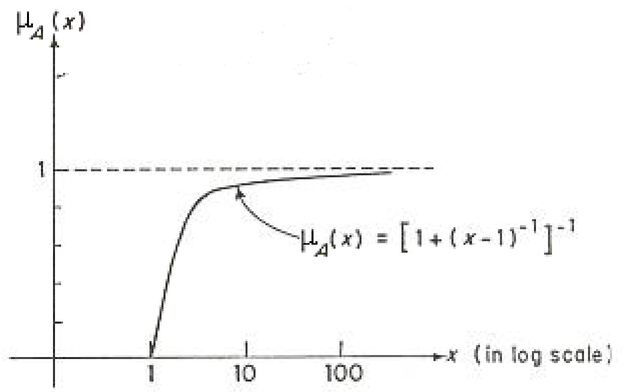
จากตัวอย่างจะเห็นว่าถ้าเซต B ถูกนิยามด้วยคำนิยามเซตแบบดั้งเดิม ซึ่งอยู่ในลักษณะของการกะประมาณตามที่กล่าวไว้ตอนต้น ซึ่งมีความคลุมเครือไม่ชัดเจน แต่จากตัวอย่างฟัซซีเซต B ข้างต้นซึ่งจะแจงรายละเอียดได้ชัดเจนกว่า นั่นคือ ความเร็วของยานพาหนะที่มีค่า 100 kmph เป็นสมาชิกของฟัซซีเซต B โดยมีค่าระดับความเป็นสมาชิก คือ 1 ส่วนที่ความเร็วของยานพาหนะที่มีค่า 60 kmph เป็นความเร็วที่มีค่าระดับความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0

ตัวอย่างที่ 3 [5] เราสามารถนิยามฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซต A ซึ่งเป็นเลขจำนวนจริงที่มีค่าใกล้ 0 ดังนี้ และแสดงได้ด้วยกราฟในภาพที่ 5



ภาพที่ 5 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตของตัวอย่างที่ 3

ตัวอย่างที่ 4 [6] พิจารณาเซตของจำนวนจริงซึ่งมากกว่า 1 $A = \{ x / x$ เป็นจำนวนจริง และ $x > 1 \}$ โดยฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกมีรูปแบบเป็น $m_A(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}$ และแสดงไว้ในภาพที่ 6



ภาพที่ 6 ฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตของตัวอย่างที่ 4

นิยาม 3 [7] คำนิยาม Support, Height, Normal, Crossover Point, Fuzzy Singleton, Peak Point, Right width, Left width, Crosspoint, Crosspoint Level ของฟัซซีเซต A เป็นดังนี้

Support ของฟัซซีเซตคือ เซตของสมาชิกทุกตัวใน U ที่มีค่าระดับความเป็นสมาชิกมากกว่า 0 จากตัวอย่างที่ 2 จะเท่ากับความเร็วของยานพาหนะที่มีค่ามากกว่า 60 kmph โดย Support ของฟัซซีเซต A เขียนแทนด้วย $supp(\mathrm{A})$ หรือ $\mathrm{S}(A)$

Height ของฟัซซีเซต $(h(A))$ คือ ค่าระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซต A ซึ่งมีค่าสูงสุด

ฟัซซีเซตที่เป็น Normal คือ ฟัซซีเซต A ซึ่งมีค่า $h(A) = 1$

Crossover Point คือ สมาชิก x ที่มีค่าระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซต A ซึ่งมีค่า $m_A(x) = 0.5$ จากตัวอย่างที่ 2 คือที่ความเร็ว 80 kmph

Fuzzy Singleton ของฟัซซีเซตคือ ฟัซซีเซตที่มี Support เพียงค่าเดียวใน U มีค่าระดับความเป็นสมาชิกเป็น 1 อีกนัยหนึ่งก็คือเซตปกติที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียว

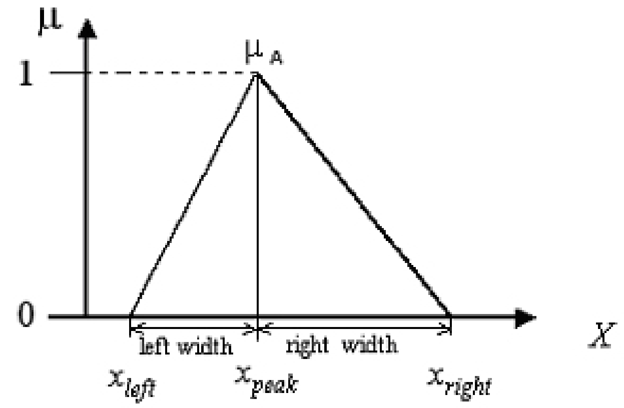
Peak Point ของฟัซซีเซตคือ ตำแหน่งที่สมาชิก x มีค่าระดับความเป็นสมาชิกเป็น 1 ($m_A(x_{peak}) = 1.0$)

Left Width ของฟัซซีเซตคือ ความกว้างทางซ้าย โดยวัดจากตำแหน่งสมาชิก x_{peak} ไปทางซ้ายจนถึงตำแหน่งสมาชิกที่มีค่าระดับความเป็นสมาชิกเป็น 0 ($m_A(x_{left}) = 0.0$) นั่นคือ

$$Left\ \ width\ (w_l) = x_{peak} - x_{left}$$

Right Width ของฟัซซีเซตคือ ความกว้างทางขวา โดยวัดจากตำแหน่งสมาชิก x_{peak} ไปทางขวาถึงตำแหน่งสมาชิกที่มีค่าระดับความเป็นสมาชิกเป็น 0 ($m_A(x_{right}) = 0.0$) นั่นคือ

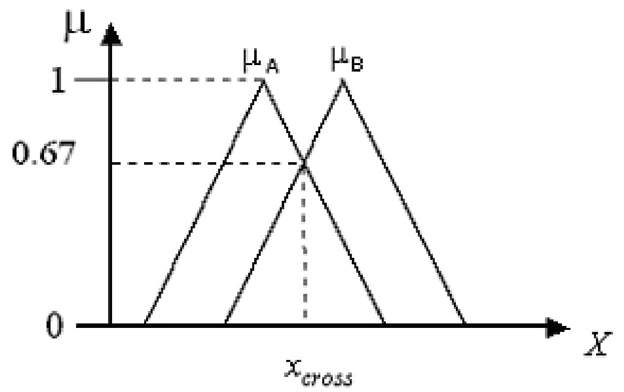
$$Right\ \ width\ (w_r) = x_{right} - x_{peak}$$



ภาพที่ 7 ตำแหน่งของจุดต่าง ๆ ของสมาชิกของฟัซซีเซต A

Crosspoint ของฟัซซีเซตคือ ตำแหน่งที่ n-linguistic variable ตัดกันโดยที่ $m_A(x_{cross}) = m_B(x_{cross}) > 0.0$

Crosspoint Level ของฟัซซีเซตคือ ค่าระดับความเป็นสมาชิกที่จุด Crosspoint จากภาพที่ 8 Crosspoint Level = 0.67



ภาพที่ 8 ตำแหน่งของ Crosspoint และระดับค่าความเป็นสมาชิกของ Crosspoint Level ของฟัซซีเซตทั้งสอง

นิยาม 4 [9] ตัวแปรภาษา (Linguistic Variable) เป็นตัวแปรที่ใช้แทนภาษามนุษย์ เช่น ความเร็ว ความสูง หรือ ความร้อน เป็นต้น โดยจะมีสิ่งที่ใช้บอกลักษณะของตัวแปรภาษาอยู่ 5 ค่าด้วยกัน ได้แก่ $(v, T(x), U, g, m)$

v : ชื่อของตัวแปรภาษา

$T(v)$: เซตของชื่อของ Linguistic Term ของ v เช่น ต่ำ เร็ว หรือเร็วมาก เป็นต้น

U : Universe of Discourse หรือสมาชิกที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ x

g : กฎ (grammar) ในการตั้งชื่อให้กับ Linguistic Term ใน x

m : กฎ (semantic rule) เกี่ยวกับความหมายของคำที่ใช้ในการจับกลุ่มคำแต่ละคำตามความหมายของ Linguistic Variable

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> [9] ให้ความเร็วของยานพาหนะเป็น Linguistic Variable จะได้ลักษณะของความเร็วของยานพาหนะดังนี้

v : ความเร็วของยานพาหนะ

$T(v)$: T(*ความเร็ว*)

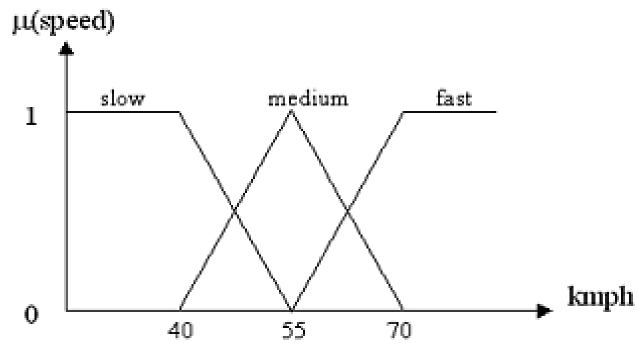
U : [0…200] ค่าความเร็วของยานพาหนะที่เราสนใจอยู่ในช่วง 0 ถึง 200 kmph

g : Linguistic Term ของความเร็วของยานพาหนะซึ่งมีค่าเป็น ช้ามาก ช้า ปานกลาง เร็ว และเร็วมาก

m : นำมาจับกลุ่มคำเรียงตามความหมาย

จะได้ T(*ความเร็ว*) = [ช้ามาก, ช้า, ปานกลาง, เร็ว, เร็วมาก]

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> ให้ U = [0,100], x = ความเร็วของยานพาหนะ โดยกำหนดให้ความเร็วของยานพาหนะที่ต่ำกว่า 40 kmph เป็น slow, ความเร็วของยานพาหนะที่ต่ำกว่า 55 kmph เป็น medium, ความเร็วของยานพาหนะมีค่า 70 kmph ขึ้นไปเป็น fast เราสามารถเขียนแผนภาพแทนฟัซซีเซตได้ดังภาพที่ 9



ภาพที่ 9 ฟัซซีเซตของความเร็วของยานพาหนะที่แสดงในรูปของตัวแปรภาษาซึ่งมี 3 เทอม

<u>นิยาม 5</u> [5] กำหนดฟัซซีเซต A ซึ่งนิยามอยู่บน U มีเลขจำนวนใดๆ ซึ่งมีคุณสมบัติ $a \in [0,1]$ จะได้ $a-cut$ ของ A (^{a}A) และ $strong\ a-cut$ ของ A (^{a+}A) ดังนี้

$$^{a}A = \{x \in U \mid m_A(x) \geq a\}$$

$$^{a+}A = \{x \in U \mid m_A(x) > a\}$$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> [6] ถ้า Y เป็นฟัซซีเซตของความเป็นเด็ก (Young) นั่นคือY = {(5,1.0),(10,1.0),(20,0.8),(30,0.5),(40,0.2),(50,0.1),(60,0.0),(70,0.0),(80,0.0)} จะได้

$supp(Y)$ = {5,10,20,30,40,50}

$^{0.2}Y$ = {5,10,20,30,40} เมื่อ a = 0.2

$^{0.8}Y$ = {5,10,20} เมื่อ a = 0.8

$^{1.0}Y$ = {5,10} เมื่อ = 1.0 และ

$^{0.8+}Y$ = {5,10} เมื่อ $strong\ a$ = 0.8

3. ฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิก

ฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกมาตรฐานที่นิยมใช้ในทางปฏิบัติมี 4 ชนิด [4-7] ได้แก่

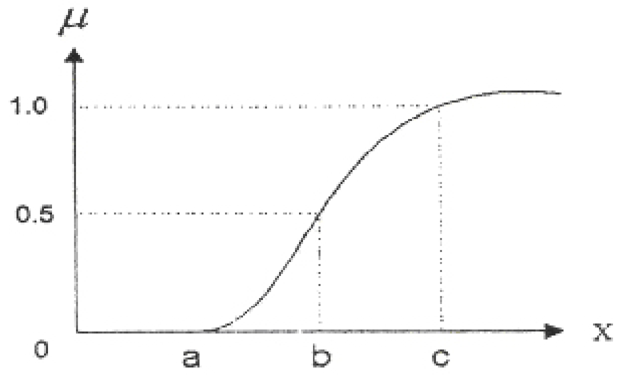
1. S-Function
2. Triangular Function
3. Π -Function
4. Trapezoid Function

3.1 S-Function

ฟังก์ชันชนิดนี้จะมีรูปร่างเป็นตัว S โดยรูปร่างของฟังก์ชันนี้จะขึ้นอยู่กับตัวแปร a, b และ c ตามภาพที่ 10 ข้างล่างนี้ จะสังเกตได้ว่า S-Function จะเป็นเส้นตรงขนานแกน x โดยมีค่าเท่ากับ 0 เมื่อ $x \leq a$ และจะมีค่าเป็น 1 เมื่อ $x \geq c$ โดยที่เมื่อ x อยู่ระหว่าง a และ c รูปร่างของฟังก์ชันจะมีลักษณะเป็น Quadratic Function และเมื่อ $x=b$ ซึ่งจุดนี้เรียกว่า Crossover Point จะเกิดขึ้นเมื่อ $b = \frac{a+c}{2}$ โดยมีค่าเท่ากับ 0.5 ดังนั้นฟังก์ชันคือ

$$S(x;a,b,c) = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } x \leq a \\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 & \text{สำหรับ } a < x \leq b \\ 1-2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 & \text{สำหรับ } b < x < c \\ 1 & \text{สำหรับ } x \geq c \end{cases}$$

และฟังก์ชันนี้สามารถเขียนเป็นกราฟได้ดังภาพที่ 10



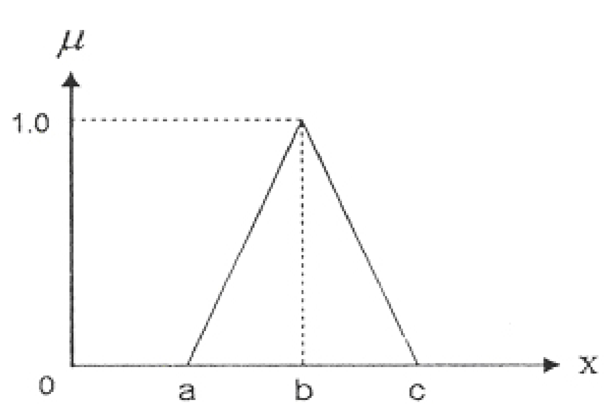
ภาพที่ 10 ลักษณะฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกแบบ S-Function

3.2 Triangular Function

ฟังก์ชันชนิดนี้จะมีรูปร่างเป็นสามเหลี่ยม ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าตัวแปร 3 ตัวคือ a, b และ c ตามภาพที่ 11 และเป็นฟังก์ชันที่นิยมใช้เกี่ยวกับการควบคุมที่ต้องการความรวดเร็วทันเวลาเนื่องจากมีการคำนวณน้อย [10]

$$T(x;a,b,c)=\begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{สำหรับ } a < x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & \text{สำหรับ } b < x < c \\ 0 & \text{สำหรับ } x \ge c \end{cases}$$

และฟังก์ชันนี้สามารถเขียนเป็นกราฟได้ดังภาพที่ 11



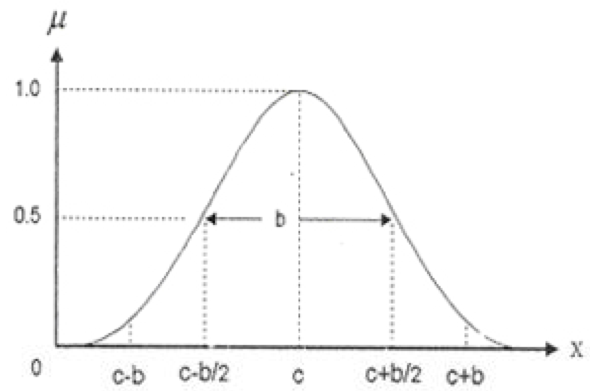
ภาพ 11 ลักษณะฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกแบบ Triangular Function

3.3 Π -Function

ฟังก์ชันชนิดนี้จะมีรูปร่างคล้ายกับระฆัง โดยจะมีด้านข้างทั้ง 2 ด้านเป็น S-Function ฟังก์ชันชนิดนี้จะมีรูปร่างคล้ายกับ Triangular Function เพียงแต่ต่างกันตรงที่ด้านข้างของ Π -Function ที่เป็น S-Function จะค่อย ๆ ลาดลงเป็น 0 มากกว่า ถ้าเปรียบเทียบกับ Triangular Function จากภาพที่ 12 จะสังเกตเห็นว่าตัวแปร b คือ ค่าความกว้างที่ Crossover Point ของ Π -Function ซึ่งจะอยู่ที่ เมื่อค่าระดับความเป็นสมาชิกเป็น 0.5

$$\Pi(x;b,c)=\begin{cases} S\left(x;c-b,\dfrac{c-b}{2},c\right) & \text{สำหรับ } x \le c \\ 1-S\left(x;c,\dfrac{c+b}{2},c+b\right) & \text{สำหรับ } x > c \end{cases}$$

และฟังก์ชันนี้สามารถเขียนเป็นกราฟได้ดังภาพที่ 12



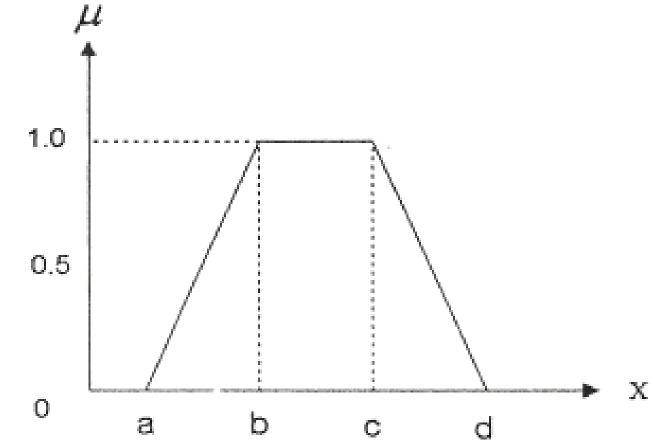
ภาพที 12 ลักษณะฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบ Π -Function

3.4 Trapezoid Function

ฟังก์ชันชนิดนี้จะมีรูปร่างเป็นสี่เหลี่ยมคางหมู โดยรูปร่างจะขึ้นอยู่กับตัวแปร 4 ตัวด้วยกันคือ a, b, c และ d ฟังก์ชันชนิดนี้เป็นฟังก์ชันที่นิยมใช้กันอีกฟังก์ชันหนึ่งเช่นเดียวกับฟังก์ชันรูปสามเหลี่ยม

$$Trap(x;a,b,c,d)=\begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{สำหรับ } a \le x \le b \\ 1 & \text{สำหรับ } b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & \text{สำหรับ } c \le x \le d \\ 0 & \text{สำหรับ } x > d \end{cases}$$

และฟังก์ชันนี้สามารถเขียนเป็นกราฟได้ดังภาพที่ 13

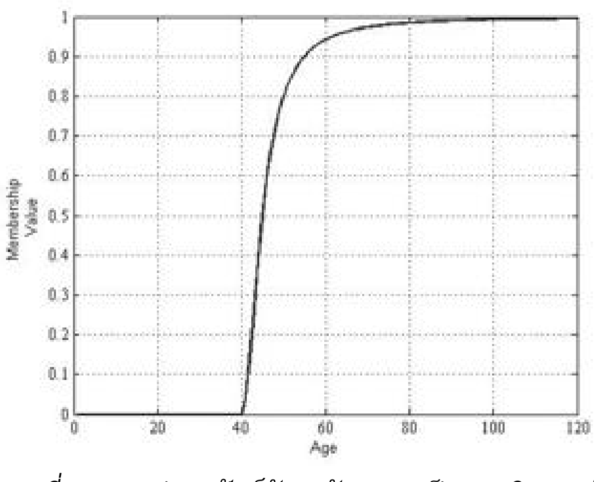


ภาพที่ 13 ลักษณะฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกแบบ Trapezoid Function

อนึ่งเราสามารถนิยามฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของแต่ละปัญหาได้เอง เช่น ฟัซซีเซตของผู้สูงอายุ จะได้

$$\mu_O(x) = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } 0 \le x \le 40 \\ \left(1+\left(\dfrac{x-40}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} & \text{สำหรับ } 40 < x \le 120 \end{cases}$$

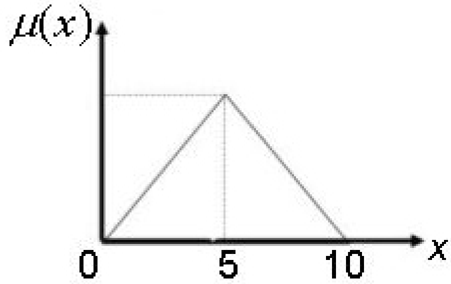
เป็นฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตนี้ โดยในที่นี้ U อยู่ในช่วง [0,120] และแสดงกราฟของฟังก์ชันนี้ในภาพที่ 14



ภาพที่ 14 กราฟของฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตของผู้สูงอายุ (O)

ตัวอย่างต่อไป ให้ U แทนเซตของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง 10 และฟัซซีเซต $B = \{x : x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าใกล้เคียงกับ 5$\}$ ดังนั้น จำนวนเต็มบวกที่มีค่าใกล้เคียง 5 มากที่สุดคือ 5 นั่นเอง ส่วนจำนวนเต็มบวกอื่นที่เป็นสมาชิกสามารถแทนด้วยฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิก $m_B(x)$ ดังสมการและกราฟของฟังก์ชันนี้ต่อไปนี้

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}x & \text{สำหรับ } 0 \le x \le 5 \\ -\dfrac{1}{5}x+2 & \text{สำหรับ } 5 \le x \le 10 \end{cases}$$



ภาพที่ 15 กราฟของฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตของจำนวนเต็มบวกที่มีค่าใกล้เคียงกับ 5 (B)

4. บทสรุป

การจัดให้วัตถุ สิ่งของ เข้ากลุ่มหรือเซตที่ต้องการเป็นกิจกรรมที่พบเห็นได้บ่อยในชีวิตประจำวันของเรา ซึ่งสามารถกระทำได้โดยกำหนดลักษณะของวัตถุ สิ่งของ ที่สามารถเข้าเป็นสมาชิกในกลุ่มหรือเซตไว้ก่อน ในบางกรณีคุณสมบัติของเซตทำให้สามารถบอกว่าได้ว่าสิ่งของนั้น ๆ เป็นหรือไม่เป็นสมาชิกของเซตนั้นอย่างชัดเจน อย่างไรก็ตามในบางสถานการณ์เป็นเรื่องยากที่จะระบุอย่างชัดแจ้งเช่นนี้ เช่น เซตของผู้ชายอายุกลางคน ซึ่งในกรณีนี้ทำให้ต้องขยายคำอธิบายคุณสมบัติของเซตใหม่ โดยกำหนดค่าระดับความเป็นสมาชิกกำกับมาด้วยกับสมาชิกของเซตแต่ละตัว และผลที่ตามมาก็คือต้องมีการกำหนดฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิก ซึ่งค่อนข้างผูกติดกับปัญหาแต่ละปัญหา บทความนี้เป็นบทความทางวิชาการเกี่ยวกับฟัซซีเซตซึ่งนำเสนอความรู้เบื้องต้น นิยาม และคุณสมบัติของฟัซซีเซต ฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตแบบต่างๆ พร้อมตัวอย่างประกอบ เหมาะสำหรับผู้เริ่มต้นศึกษาเรื่องนี้เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาค้นคว้า วิจัยต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] Kandel, A. *Fuzzy Mathematical Techniques with Applications*, Addison-Wesley: Reading, 0-201-11752-5, MA., 1986.

[2] Ross, T. J. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*, McGraw-Hill, Inc., 0-07-053917-0, 1995.

[3] Nguyen, H. T. and Walker, E. A. *A First Course in Fuzzy Logic*, 2nd edition, Chapman & Hall/CRC, New York, 0-8493-1659-6, 2000.

[4] Klir, G. J. and Yuan, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic : Theory and Applications*, Prentice Hall, 0-13-101171-5, 1995.

[5] Klir, G. J., St.Clair, U. and Yuan, B. *Fuzzy Sets Theory : Foundations and Applications*, Prentice Hall, 0-13-5712258-0, 1997.

[6] Klir, G. J. and Folger, T. A. *Fuzzy Sets,Uncertainty, and Information*, Prentice Hall, 981-3026-97-9, 1992.

[7] Lin, C.-T. and Lee, C. S. *Neural Fuzzy Systems : A Neuro-Fuzzy Synergism to Intelligent Systems*, Prentice Hall, 0-13- 235169-2, 1996.

[8] Klir, G. J., St.Clair, U. and Yuan, B. *Fuzzy Sets Theory : Foundations and Applications*, Prentice Hall, 0-13-5712258-0, 1997.

[9] Cox, E. “Fuzzy Fundamentals,” IEEE Spectrum, pp. 58-61, October 1992.

[10] Lee, C. C. “Fuzzy Logic in Control Systems,” IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, SMC, Vol. 20, No. 2, pp. 404-35, 1990.

[11] Peterson, I. “Fuzzy Sets,” Science News, Vol. 144, July 24, pp. 55, 1993.