

พีชคณิต - ตอนที่ 2 : การกระทำบนพีชคณิตและความสัมพันธ์แบบพีช

สุพจน์ นิตยวัฒน์*

บทคัดย่อ

บทความตอนที่ 1 ได้นิยามความหมายของพีชคณิตและฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของพีชคณิตแบบต่างๆ สำหรับบทความนี้กล่าวถึงการกระทำบนพีชคณิต รวมทั้งความสัมพันธ์แบบพีชคณิต โดยแต่ละนิยามมีการเปรียบเทียบกับลักษณะการกระทำบนเซตแบบดั้งเดิม พร้อมตัวอย่างประกอบเพื่อความสะดวกในการทำความเข้าใจ

คำสำคัญ: พีชคณิต ฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิก การกระทำบนพีชคณิต คุณสมบัติของพีชคณิต พีชคณิตแบบพีช

1. การกระทำบนพีชคณิต (Operations of Fuzzy Sets)

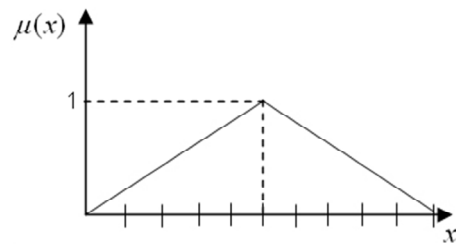
ในบทความตอนที่ 1 [11] ได้นิยามความหมายของพีชคณิตว่า $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$ โดยที่ X คือเซตเอกภพสัมพัทธ์ และ A เป็นเซตที่สมาชิกมีคุณสมบัติสอดคล้องตามเงื่อนไขทั้งหมดหรือสอดคล้องบางส่วน พร้อมกับระบุระดับความเป็นสมาชิกกำกับสมาชิกแต่ละค่าไว้ด้วย โดย $\mu_A(x) \in [0, 1]$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ถ้าพีชคณิต A ถูกนิยามเป็น $A = \{x \mid x \text{ คือจำนวนเต็มบวกที่มีค่าใกล้เคียง } 5, x \in X\}$ อาจเขียนบรรยายเซตนี้เป็น

$$A = \left\{ \frac{0.0}{0} + \frac{0.2}{1} + \frac{0.4}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1.0}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{0.6}{7} + \frac{0.4}{8} + \frac{0.2}{9} + \frac{0.0}{10} \right\}$$

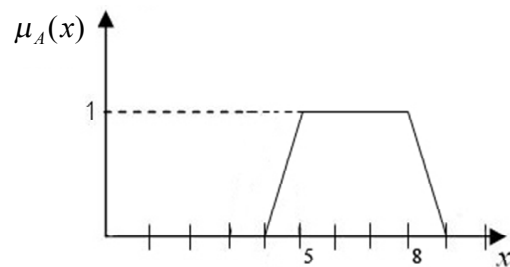
ซึ่งเป็นการเขียนแบบ Zadeh's Notation โดยที่ค่าที่อยู่ด้านบนของขีดแนวนั้นแสดงระดับความเป็นสมาชิกของสมาชิกที่สมนัยกันด้านล่าง (มิใช่การเขียนแบบเศษส่วน) และ + แทนการกระทำแบบ Aggregation (เป็นการรวบรวมมิใช่การบวกในพีชคณิตที่เราคุ้นเคย) ฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของสมาชิก x ในพีชคณิต A แสดงไว้ดังกราฟในภาพที่ 1 อย่างไรก็ตามฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของพีชคณิตมีลักษณะที่ผูกติดกับเนื้อหาที่เราากำลังพิจารณาในแต่ละ

การนิยามของพีชคณิต (Context-dependent definition) [2]

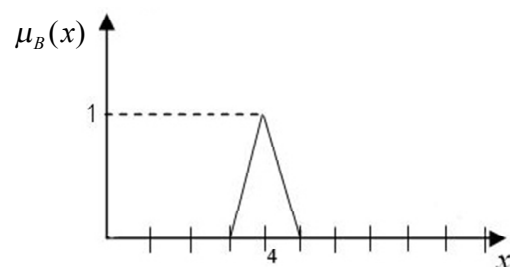


ภาพที่ 1 กราฟแสดงฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของสมาชิก x ในพีชคณิต A

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ $X = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ } 0 \text{ ถึง } 10\}$ ถ้าให้พีชคณิต A เป็นเซตของจำนวนจริงที่มีค่าอยู่ในช่วงประมาณ 5 ถึง 8 และพีชคณิต B เป็นเซตของจำนวนจริงที่มีค่าประมาณ 4 โดยมีฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกดังภาพที่ 2 และ 3 ตามลำดับ



ภาพที่ 2 กราฟแสดงฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของพีชคณิต A



ภาพที่ 3 กราฟแสดงฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของพีชคณิต B

สำหรับเซตแบบดั้งเดิมนั้นมีการกระทำพื้นฐานที่เป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปเช่น Union, Intersection, Complement และอื่น ๆ ในกรณีพีชคณิตก็มีนิยามการกระทำเหล่านี้เช่นกัน

* ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ระดับ 8 ภาควิชาคอมพิวเตอร์ศึกษา คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม และ รองคณบดีฝ่ายวิชาการ คณะเทคโนโลยีสารสนเทศ สจพ.

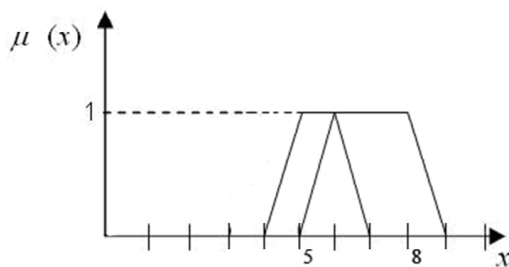


และเรียกว่า “Standard fuzzy operations” ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ให้พิชัยเขต A และ B นิยามบนเซตเอกภพสัมพัทธ์ X และมีฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกเป็น $\mu_A(x)$ และ $\mu_B(x)$ ตามลำดับ โดยที่ $\mu_A(x), \mu_B(x) \in [0,1]$

นิยาม 1 (Containment หรือ Subset) [1] พิชัยเขต B ถูกบรรจุอยู่ในพิชัยเขต A หรือกล่าวได้ว่าพิชัยเขต B เป็น subset ของพิชัยเขต A หรือพิชัยเขต B เล็กกว่าหรือเท่ากับ พิชัยเขต A หรือแทนด้วย $B \subseteq A$ ก็ต่อเมื่อ $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x [1]

ถ้าให้พิชัยเขต A เป็นเซตของจำนวนจริงที่มีค่าอยู่ในช่วงประมาณ 5 ถึง 8 และพิชัยเขต B เป็นเซตของจำนวนจริงที่มีค่าประมาณ 6 สามารถแสดงให้เห็นการกระทำนี้ได้ด้วยภาพที่ 4



ภาพที่ 4 กราฟแสดงฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของ พิชัยเขต B ซึ่งเป็น subset ของพิชัยเขต A

นิยาม 2 (T -norm) [3] สำหรับการกระทำ $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ แล้ว T เป็น Triangular-norm (T -norm) ก็ต่อเมื่อ T มีคุณสมบัติ ดังต่อไปนี้ (สำหรับ $x, y, z, u \in [0,1]$)

- 1) $T(0,0) = 0$; $T(x,1) = T(1,x) = x$ (boundary)
- 2) $T(x,y) \leq T(z,u)$ if $x \leq z$ and $y \leq u$ (monotonicity)
- 3) $T(x,y) = T(y,x)$ (commutativity)
- 4) $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$ (associativity)
- 5) $T_{\min}(x,y) = \min(x,y) = x \wedge y$ (minimum)
- 6) $T_{ap}(x,y) = xy$ (algebraic product)
- 7) $T_{bp}(x,y) = 0 \vee (x+y-1)$ (bounded product)

$$8) T_{dp}(x,y) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } y = 0 \\ y & \text{ถ้า } x = 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x,y < 1 \end{cases} \quad (\text{drastic product})$$

นิยาม 3 Archimedean t -norm คือ t -norm ซึ่งสอดคล้องกับ คุณสมบัติ $T(x,x) < x$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $x \in [0,1]$ [3]

นิยาม 4 T เป็น T -norm ใด ๆ ที่ต่อเนื่องและเป็น Archimedean ก็ต่อเมื่อสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $T(x,y) = g(f(x),f(y))$ โดยที่ ก) f เป็นฟังก์ชันแบบ continuous strictly decreasing จาก $[0,1]$ ถึง $\mathbb{R}^+ = [0,\infty]$ ซึ่ง $f(1) = 0$ และ ข) g เป็นฟังก์ชัน ต่อเนื่องจาก $\mathbb{R}^+$ ไปบน (onto) $[0,1]$ โดยที่ $g(x) = f^{-1}(x)$ บนช่วง $[0,f(0)]$ และ $g(x) = 0$ สำหรับ $x \geq g(0)$

นิยาม 5 (T -conorm) สำหรับการกระทำ $T^*: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ แล้ว T^* เป็น T -conorm (หรือ S -norm) ก็ต่อเมื่อ T^* มี คุณสมบัติดังต่อไปนี้ (สำหรับ $x, y, z, u \in [0,1]$ และในที่นี้ เขียนในรูปแบบของ S -norm) [3]

- 1) $S(1,1) = 1$; $S(x,0) = S(0,x) = x$ (boundary)
- 2) $S(x,y) \leq S(z,u)$ if $x \leq z$ and $y \leq u$ (monotonicity)
- 3) $S(x,y) = S(y,x)$ (commutativity)
- 4) $S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z)$ (associativity)
- 5) $S_{\max}(x,y) = \max(x,y) = x \vee y$ (maximum)
- 6) $S_{as}(x,y) = x+y-xy$ (algebraic product)
- 7) $S_{bs}(x,y) = 1 \wedge (x+y)$ (bounded product)

$$8) S_{ds}(x,y) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } y = 0 \\ y & \text{ถ้า } x = 0 \\ 1 & \text{ถ้า } x,y > 0 \end{cases} \quad (\text{drastic sum})$$

โดยที่ $\vee$ และ $\wedge$ เป็น maximum operator และ minimum operator ตามลำดับ สามารถใช้สัญลักษณ์ $\approx$ และ $\napprox$ แทน T -norm และ T -conorm ตามลำดับ

นิยาม 6 (Union หรือ Disjunction) ให้พิชัยเขต C เป็นผลของการกระทำ Union ระหว่างพิชัยเขต A และพิชัยเขต B ซึ่งแทนด้วย $C = A \cup B$ โดยที่

$$\mu_C(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

สำหรับทุก ๆ ค่าของ x [4]



ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ $X = \{x \mid x \text{ เป็นบ้านเดี่ยวที่มีห้องนอนตั้งแต่ 1 ถึง 10 ห้อง} \} = \{H1, H2, H3, H4, H5, H6, H7, H8, H9, H10\}$ ถ้าให้พิชชีเขต A เป็นเซตของบ้านเดี่ยวขนาดกระทัดรัด (สำหรับสมาชิก 4 คน) นั่นคือ

$$A = \left\{ \frac{0.2}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1.0}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.3}{6} + \frac{0.0}{7} + \frac{0.0}{8} + \frac{0.0}{9} + \frac{0.0}{10} \right\}$$

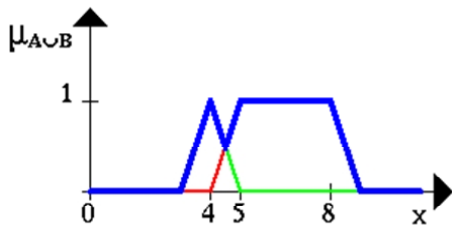
และพิชชีเขต B เป็นเซตของบ้านเดี่ยวระดับคฤหาสน์ นั่นคือ

$$B = \left\{ \frac{0.0}{1} + \frac{0.0}{2} + \frac{0.0}{3} + \frac{0.4}{4} + \frac{0.6}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{0.9}{7} + \frac{1.0}{8} + \frac{1.0}{9} + \frac{1.0}{10} \right\}$$

จะได้ $C =$ พิชชีเขตของบ้านเดี่ยวขนาดกระทัดรัดหรือระดับคฤหาสน์ $= A \cup B$

$$C = \left\{ \frac{0.2}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1.0}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{0.9}{7} + \frac{1.0}{8} + \frac{1.0}{9} + \frac{1.0}{10} \right\}$$

ตัวอย่างที่ 4 จากพิชชีเขตในตัวอย่างที่ 2 จะได้พิชชีเขต C ซึ่งเกิดจากการ Union ระหว่างพิชชีเขต A และพิชชีเขต B โดยมีฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกดังแสดงด้วยเส้นทึบในภาพที่ 5



ภาพที่ 5 กราฟแสดงฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของ พิชชีเขต C ซึ่งเป็นการกระทำ Union ของพิชชีเขต A และ B

อนึ่ง Union ของพิชชีเขตสามารถนิยามได้โดยใช้ T-conorm โดยฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของ $A \cup B$ คือ

$$\mu_C(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \tilde{+} \mu_B(x)$$

นิยาม 7 (Intersection หรือ conjunction) ให้พิชชีเขต C เป็นผลของการกระทำ Intersection ระหว่างพิชชีเขต A และพิชชีเขต B ซึ่งแทนด้วย $C = A \cap B$ โดยที่

$$\mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

สำหรับทุก ๆ ค่าของ x [5,10]

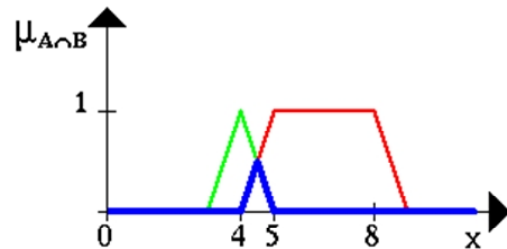
ตัวอย่างที่ 5 จากโจทย์ของตัวอย่างที่ 3 จะได้ $C =$ พิชชีเขตของบ้านเดี่ยวขนาดกระทัดรัดและระดับคฤหาสน์ $= A \cap B$

$$C = \left\{ \frac{0.0}{1} + \frac{0.0}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{0.4}{4} + \frac{0.6}{5} + \frac{0.3}{6} + \frac{0.0}{7} + \frac{0.0}{8} + \frac{0.0}{9} + \frac{0.0}{10} \right\}$$

อนึ่ง Intersection ของพิชชีเขตสามารถนิยามได้โดยใช้ T-norm โดยฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของ $A \cap B$ คือ

$$\mu_C(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \tilde{*} \mu_B(x)$$

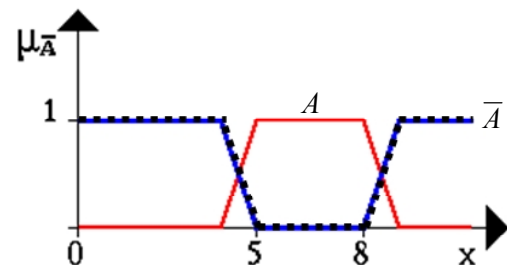
ตัวอย่างที่ 6 จากโจทย์ของตัวอย่างที่ 2 จะได้พิชชีเขต C ซึ่งเกิดจากการ Intersection ระหว่างพิชชีเขต A และพิชชีเขต B โดยมีฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกดังแสดงด้วยเส้นทึบในภาพที่ 6



ภาพที่ 6 ฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของพิชชีเขต C ซึ่งเป็น Intersection ของพิชชีเขต A และ B

นิยาม 8 (Complement หรือ negation) [7] ให้ $\bar{A}$ เป็น Complement ของพิชชีเขต A โดยที่ $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x

ตัวอย่างที่ 7 จากโจทย์ของตัวอย่างที่ 2 จะได้พิชชีเขต $\bar{A}$ ซึ่งเป็น Complement ของพิชชีเขต A ซึ่งมีฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกแสดงด้วยเส้นประในภาพที่ 7



ภาพที่ 7 กราฟแสดงฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของ พิชชีเขต A (เส้นทึบ) และ $\bar{A}$ (เส้นประ)



นิยาม 9 พืชเชิงซ้อน A เท่ากับพืชเชิงซ้อน B ก็ต่อเมื่อ

$$\mu_A(x) = \mu_B(x); \forall x \in X[8]$$

2. คุณสมบัติของพืชเชิงซ้อน (Properties of Fuzzy Sets)

พืชเชิงซ้อนมีคุณสมบัติสอดคล้องตามคุณสมบัติของเซตแบบดั้งเดิมเกือบทั้งหมดยกเว้นบางกรณี ดังต่อไปนี้

ถ้า A และ B เป็นพืชเชิงซ้อนบนเอกภพสัมพัทธ์ X โดยที่ ϕ เป็นเซตว่าง [6]

1) Commutativity

$$A \cup B = B \cup A \text{ และ } A \cap B = B \cap A$$

2) Associativity

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

3) Distributivity

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4) Idempotency

$$A \cup A = A \text{ และ } A \cap A = A$$

5) Identity

$$A \cup \phi = A \text{ และ } A \cap X = A$$

6) Transitivity

$$\text{ถ้า } A \subseteq B \text{ และ } B \subseteq C \text{ แล้ว } A \subseteq C$$

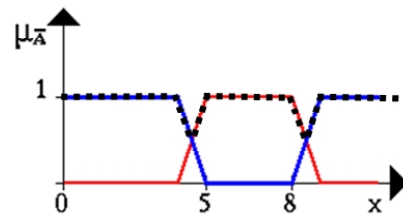
7) De Morgan's principles

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ และ } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

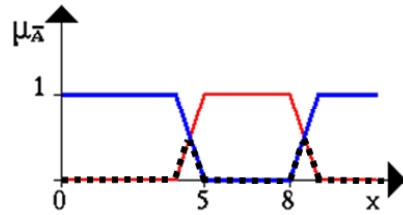
8) Involution

$$\overline{\overline{A}} = A$$

อนึ่งคุณสมบัติที่พืชเชิงซ้อนใดที่ไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติของเซตแบบดั้งเดิม คือ คุณสมบัติ excluded middle axioms ทั้งนี้เนื่องจากพืชเชิงซ้อน 2 เซตสามารถเหลื่อมทับ (Overlap) กันและกันได้ [2,4,6,9] ซึ่งพบว่า $A \cup \overline{A} \neq X$ และ $A \cap \overline{A} \neq \phi$ สำหรับพืชเชิงซ้อน A สามารถแสดงให้เห็นได้โดยอาศัยโจทย์ของตัวอย่างที่ 7 เพื่อแสดงผลของการกระทำ $A \cup \overline{A}$ (เส้นประในภาพที่ 8) และการกระทำ $A \cap \overline{A}$ (เส้นประในภาพที่ 9)



ภาพที่ 8 กราฟแสดงฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของการกระทำ $A \cup \overline{A}$ (เส้นประ)



ภาพที่ 9 กราฟแสดงฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของการกระทำ $A \cap \overline{A}$ (เส้นประ)

3. ความสัมพันธ์ของพืช (Fuzzy Relations)

เซตแบบดั้งเดิมนิยามความสัมพันธ์ระหว่างเซต 2 เซตหรือมากกว่าโดยเริ่มจากการนิยามผลคูณ Cartesian ดังนี้

นิยาม 10 (Cartesian product) [6] ถ้าให้ A และ B เป็นเซตบนเอกภพสัมพัทธ์ X และ Y ตามลำดับ จะได้ผลคูณ Cartesian เป็น

$$A \times B = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$$

ซึ่งเป็นการสร้างคู่ลำดับ (ordered pair) โดยที่ทุกๆ สมาชิกในเซต A จะจับคู่อย่างสมบูรณ์ (completely) กับทุกๆ สมาชิกในเซต B

ตัวอย่างที่ 8 ให้เอกภพสัมพัทธ์ X เป็นเซตของสี และเอกภพสัมพัทธ์ Y เป็นเซตของผลไม้และเซต A และ B นิยามไว้ดังนี้

$A = \{g, y, r\}$ โดย g แทนสีเขียว (green), y แทนสีเหลือง (yellow) และ r แทนสีแดง (red)

$B = \{b, o, m\}$ โดย b แทนกล้วย, o แทนส้ม และ m แทนมะม่วง

ดังนั้นจะได้ผลคูณ Cartesian ดังนี้

$$A \times B = \{(g, b), (g, o), (g, m), (y, b), (y, o), (y, m), (r, b), (r, o), (r, m)\}$$



นิยาม 11 (Crisp relation) [6] ถ้าให้ A และ B เป็นเซตบนเอกภพสัมพัทธ์ X และ Y ตามลำดับ และ $A \times B$ เป็นผลคูณ Cartesian แล้ว xRy เป็นความสัมพันธ์ก็ต่อเมื่อ R เป็นเซตย่อยของผลคูณ Cartesian นั่นคือ $R \subseteq A \times B$ และสามารถกำหนดคุณลักษณะของสมาชิกใน R ด้วยฟังก์ชัน characteristic

$$\chi_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าสอดคล้องคุณลักษณะที่กำหนด} \\ 0 & \text{ถ้าไม่สอดคล้องคุณลักษณะที่กำหนด} \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 9 จากผลคูณ Cartesian ที่สร้างขึ้นในตัวอย่างที่ 8 ความสัมพันธ์ของเซตทั้ง 2 ที่กำหนดว่าผลไม้ดิบมักมีสีเขียวเป็นดังนี้

$$R = \{(g, b), (g, o), (g, m)\}$$

และฟังก์ชัน characteristic มีลักษณะตารางต่อไปนี้

	b	o	m
g	1	1	1
y	0	0	0
r	0	0	0

ในการทำงานเกี่ยวกับความสัมพันธ์บนพืชชืดเซตก็สามารถนิยามได้จากผลคูณ Fuzzy Cartesian ดังนี้

นิยาม 12 (Fuzzy Cartesian product) [2] ถ้าให้ A และ B เป็นพืชชืดเซตบนเอกภพสัมพัทธ์ X และ Y ตามลำดับ $A \times B \subset X \times Y$ โดยที่ $\mu_{A \times B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$

ตัวอย่างที่ 10 ให้เอกภพสัมพัทธ์ X เป็นเซตของสีของผลไม้ และเอกภพสัมพัทธ์ Y เป็นเซตของระดับความสุกผลไม้ และเซต A และ B นิยามไว้ดังนี้

ถ้าให้ g แทนสีเขียว, y แทนสีเหลือง และ r แทนสีแดง จะได้

$$A = \left\{ \frac{0.2}{g} + \frac{0.7}{y} + \frac{0.9}{r} \right\}$$

ถ้าให้ v แทนผลไม้ดิบ, h แทนผลไม้ห่าม และ m แทนผลไม้สุก จะได้

$$B = \left\{ \frac{0.1}{v} + \frac{0.4}{h} + \frac{1.0}{m} \right\}$$

ดังนั้นจะได้ผลคูณ Fuzzy Cartesian product ดังนี้

$$A \times B = \begin{bmatrix} v & h & m \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.7 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{matrix} g \\ y \\ r \end{matrix}$$

ซึ่งพบว่าความสัมพันธ์พืชชืดของพืชชืดเซตผลไม้สุกและพืชชืดเซตสีเป็นดังนี้

$$R = \left\{ \frac{0.2}{m, g} + \frac{0.7}{m, y} + \frac{0.9}{m, r} \right\}$$

นิยาม 13 (Operations on Fuzzy relations) [2] ถ้าให้ R และ S เป็นความสัมพันธ์พืชชืดบน Cartesian space $X \times Y$ เราสามารถนิยามการกระทำบนความสัมพันธ์พืชชืดดังนี้

1) Union

$$\mu_{R \cup S}(x, y) = \max(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y))$$

2) Intersection

$$\mu_{R \cap S}(x, y) = \min(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y))$$

3) Complement

$$\mu_{\bar{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$$

4) Containment

$$R \subset S \Rightarrow \mu_R(x, y) \leq \mu_S(x, y)$$

นิยาม 14 (Composition) [7] ถ้าให้ R และ S เป็นความสัมพันธ์พืชชืดบน Cartesian space $X \times Y$ และ $Y \times Z$ ตามลำดับ แล้วเราสามารถนิยามการกระทำ Composition ได้ดังนี้

$$T = R \circ S \subset X \times Z \quad \text{โดยที่}$$

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \max\{\min\{\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)\}\}$$

ตัวอย่างที่ 11 ให้เอกภพสัมพัทธ์ X เป็นเซตของสีของผลไม้ เอกภพสัมพัทธ์ Y เป็นเซตของระดับความสุกผลไม้ และเอกภพสัมพัทธ์ Z เป็นเซตของรสชาติของผลไม้ ความสัมพันธ์ของสีและระดับความสุกเป็นดังนี้

$$R \subset X \times Y = \begin{bmatrix} v & h & m \\ 1.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.3 & 1.0 & 0.4 \\ 0.0 & 0.2 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} g \\ y \\ r \end{matrix}$$

ความสัมพันธ์ของระดับความสุกและรสชาติเป็นดังนี้



$$S \subset Y \times Z = \begin{matrix} & \begin{matrix} so & tl & sw \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1.0 & 0.2 & 0.0 \\ 0.7 & 1.0 & 0.3 \\ 0.0 & 0.7 & 1.0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v \\ h \\ m \end{matrix} \end{matrix}$$

จะได้ความสัมพันธ์ของสีและรสชาติเป็นดังนี้

$$T = R \circ S \subset X \times Z = \begin{matrix} & \begin{matrix} so & tl & sw \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.3 \\ 0.7 & 1.0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.7 & 1.0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} g \\ y \\ r \end{matrix} \end{matrix}$$

ถ้าในที่นี้ *so* แทนรสเปรี้ยว, *tl* แทนจืด และ *sw* แทนรสหวาน

4. บทสรุป

พิชชิตเป็นส่วนเสริมเซตแบบดั้งเดิม ดังนั้นคุณสมบัติบางส่วนของเซตแบบดั้งเดิมจึงถูกถ่ายทอดมายังพิชชิต อย่างไรก็ดีตามคุณสมบัติบางประการไม่มีในพิชชิต เช่น คุณสมบัติที่เรียกว่า excluded middle axioms สำหรับการกระทำบนพิชชิตก็เช่นเดียวกันกับการกระทำบนเซตแบบดั้งเดิม ต่างกันตรงที่เราจะต้องจัดการกับฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของพิชชิตที่ถูกกระทำนั้นด้วย และประเด็นสุดท้ายของบทความนี้คือนิยามของความสัมพันธ์พิชชิต (Fuzzy Relations) ของพิชชิตใดๆ

เอกสารอ้างอิง

- [1] Kandel, A. *Fuzzy Mathematical Techniques with Applications*, Addison-Wesley: Reading, 0-201-11752-5, MA., 1986.
- [2] Ross, T. J. *Fuzzy Logic with Engineering Applica-*

tions, McGraw-Hill, Inc., 0-047-86075-8, 2004.

- [3] Nguyen, H. T. and Walker, E. A. *A First Course in Fuzzy Logic*, 2nd edition, Chapman & Hall/CRC, New York, 0-8493-1659-6, 2000.
- [4] Klir, G. J. and Yuan, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic : Theory and Applications*, Prentice Hall, 0-13-101171-5, 1995.
- [5] Klir, G. J., St.Clair, U. and Yuan, B. *Fuzzy Sets Theory : Foundations and Applications*, Prentice Hall, 0-13-5712258-0, 1997.
- [6] Klir, G. J. and Folger, T. A. *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*, Prentice Hall, 981-3026-97-9, 1992.
- [7] Lin, C.-T. and Lee, C. S. *Neural Fuzzy Systems : A Neuro-Fuzzy Synergism to Intelligent Systems*, Prentice Hall, 0-13- 235169-2, 1996.
- [8] Klir, G. J., St.Clair, U. and Yuan, B. *Fuzzy Sets Theory : Foundations and Applications*, Prentice Hall, 0-13-5712258-0, 1997.
- [9] Cox, E. "Fuzzy Fundamentals," IEEE Spectrum, pp. 58-61, October 1992.
- [10] Peterson, I. "Fuzzy Sets," Science News, Vol. 144, July 24, pp. 55, 1993.
- [11] สุพจน์ นิตยสุวัฒน์. พิชชิต - ตอนที่ 1 : นิยามและฟังก์ชันความเป็นสมาชิก, วารสารเทคโนโลยีสารสนเทศ, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ, ISSN 1685-8573, ปีที่ 1 ฉบับที่ 1 (มกราคม-มิถุนายน), หน้า 57, 2548.