



การประมาณค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ ที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ Estimation of Natural Frequency of Composite Plate with Three Edges Clamped and the Other Edge Free

กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข* อาณัติ ผิวดำ และ ภคิน สอนแหยม

Kullasup Phongsrisuk*, Anat Phewdum and Pakin Sonyam

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา เชียงใหม่

Department of Mechanical Engineering, Rajamangala University of Technology Lanna, Chiangmai

*E-mail: phongsrisuk@gmail.com, Tel.: 053-244891

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการสร้างสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตกับค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบ $[0/90]_s$ ที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ โดยการนำค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบตั้งแต่อัตราส่วนทางเรขาคณิต 1.0 : 1.0 ถึง 5.0 : 1.0 ที่ได้จากระเบียบวิธีการประมาณมาสร้างสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตกับค่าความถี่ธรรมชาติโดยระเบียบวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย ซึ่งพบว่าสมการพหุนามเมื่อยลอันดับ 7 สามารถทำนายค่าความถี่ธรรมชาติได้โดยมีค่าความคลื่อนจากระเบียบวิธีการประมาณน้อยกว่าร้อยละ 0.3

คำสำคัญ: ความถี่ธรรมชาติ; แผ่นวัสดุเชิงประกอบ; คันทอโรวิช; การถดถอย

ABSTRACT

This research was to construct the relationship equation between the geometric ratios and the natural frequencies of $[0/90]_s$ laminated rectangular plates with three edges clamped and the other edge free. The natural frequencies with the geometric ratios from 1.00: 1.00 to 5.00: 1.00 of composite rectangular plate were obtained from the approximate method to create the relationship equation between the geometric ratios and the natural frequencies by the regression analysis method. The results showed that the natural frequencies can be predicted by the seventh order polynomial equation with a deviation from the approximate method of 0.3%.

Keywords: Natural frequency; Composite plate; Kantorovich; Regression

1. บทนำ

แผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมเป็นลักษณะพื้นฐานที่พบได้ทั่วไปในงานทางด้านวิศวกรรม โดยแผ่นบางเมื่อมีการสั่นสะเทือนจะเกิดความเสียหายอย่างมาก ถ้าความถี่ของภาระภายนอกที่มากระทำกับแผ่นบางตรงกับความถี่ธรรมชาติ (Natural frequency) ของแผ่นบาง จึงทำให้การหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางในงานทางด้านวิศวกรรมมีความสำคัญ โดยเฉพาะอย่างยิ่งรูปร่างโหมดแบบดัดโค้ง (Bending mode shape) ที่ต้องพิจารณาเป็นอันดับต้น ๆ เนื่องด้วยเกิดขึ้นเป็นประจำในโครงสร้างแผ่นบาง ในการหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางโดยระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ (Analytical method) เพื่อให้ได้ผลเฉลยชัดเจน (Explicit solution) จะทำได้ต่อเมื่อขอบสองด้านตรงกันข้ามของแผ่นบางมีการรองรับแบบอย่างง่าย (Simply supported) หากขอบของแผ่นบางมีการรองรับแบบอื่นอาจหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางได้จากระเบียบวิธีการประมาณ (Approximation method) ซึ่งค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีการประมาณจะไม่อยู่ในรูปผลเฉลยชัดเจน ทำให้ในทางปฏิบัติที่มีการนำแผ่นบางมาใช้ที่อัตราส่วนทางเรขาคณิต (Geometric ratio) ต่างๆ ต้องทำการหาค่าความถี่ธรรมชาติจากระเบียบวิธีการประมาณใหม่ทุกครั้ง

ด้วยเหตุผลดังกล่าวข้างต้นจึงได้มีการนำค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางที่ทำจากวัสดุไอโซทรอปิก (Isotropic plate) ที่มีขอบหนึ่งด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกสามด้านปล่อยอิสระ [1] ขอบสองด้านตรงกันข้ามรองรับแบบยึดแน่นและอีกสองด้านปล่อยอิสระ [2] ขอบสี่ด้านรองรับแบบปล่อยอิสระ [3] ขอบสองด้านตรงกันข้ามรองรับแบบปล่อยอิสระและขอบอีกสองด้านรองรับแบบยึดแน่นและแบบอย่างง่าย [4] มุมสี่มุมรองรับแบบยึดแน่น [5] ที่ได้จากระเบียบวิธีการประมาณมาสร้างสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตกับค่าความถี่ธรรมชาติโดยระเบียบวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย (Regression analysis method) ทำให้สามารถทำนายค่าความถี่ธรรมชาติที่อัตราส่วนทางเรขาคณิตต่าง ๆ ได้ ในทางปฏิบัติจึงมีความสะดวกมากขึ้นเมื่อเทียบกับการใช้วิธีการประมาณ

ปัจจุบัน แผ่นบางที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบ (Composite plate) ได้ถูกนำมาใช้ในงานทางด้านวิศวกรรมอย่างแพร่หลาย เนื่องด้วยวัสดุเชิงประกอบมีความแข็งแรงสูง น้ำหนักเบา ทนต่อการกัดกร่อน ทนต่อการสึกหรอ และสามารถออกแบบให้ได้คุณสมบัติตามที่ต้องการ แต่สมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตกับค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบยังจำกัดอยู่ที่แผ่นบางที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบที่มีขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น [6-7] ขอบสี่ด้านรองรับแบบอย่างง่าย [7] ซึ่งในทางปฏิบัติแผ่นบางที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระเป็นหนึ่งในกรณีรองรับที่ถูกนำมาใช้ในงานทางด้านวิศวกรรม งานวิจัยนี้จึงมีความสนใจที่จะสร้างสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตกับค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระโดยระเบียบวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย

2. ทฤษฎี

2.1 วัสดุเชิงประกอบ

วัสดุเชิงประกอบ (Composite material) คือ วัสดุที่มีองค์ประกอบทางเคมีหรือโครงสร้างแตกต่างกันตั้งแต่สองชนิดขึ้นไปมาผสมกัน วัสดุเชิงประกอบจะประกอบด้วยวัสดุที่ทำหน้าที่เป็นเนื้อหลักหรือเมทริกซ์ (Matrix) และวัสดุที่ทำหน้าที่เป็นเฟสเสริมแรง (Reinforced phase) [8] โดยเฟสเสริมแรงจะเป็นส่วนประกอบหลักในการรับภาระ (Load) ส่วนเมทริกซ์จะเป็นตัวกลางในการถ่ายเทภาระระหว่างเฟสเสริมแรง และปกป้องเฟสเสริมแรงจากการสัมผัสกับสิ่งแวดล้อม [9] แผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีเฟสเสริมแรงเป็นเส้นใย ผลรวมของความเค้น (Stress) ที่เกิดขึ้นตลอดแนวความหนาของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ สามารถคำนวณเป็นแรงลัพธ์ (Force resultants) N_{xx} , N_{yy} และ N_{xy} และโมเมนต์ลัพธ์ (Moment resultants) M_{xx} , M_{yy} และ M_{xy} ได้ดังสมการ (1)

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

โดยแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ที่เกิดขึ้นในแผ่นวัสดุเชิงประกอบจะสัมพันธ์กับความเครียด (Strain) ε_{xx} , ε_{yy} และ γ_{xy} และความโค้ง (Curvature) κ_{xx} , κ_{yy} และ κ_{xy} ของระนาบกึ่งกลางของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ เมทริกซ์ขนาด 6x6 ในสมการ (1) เรียกว่า เมทริกซ์ ABD ซึ่งประกอบไปด้วยเมทริกซ์ย่อย 3 เมทริกซ์ ได้แก่ เมทริกซ์ A เมทริกซ์ B และ เมทริกซ์ D โดย A_{ij} , B_{ij} และ D_{ij} คือ ความแข็งเกร็งยืด (Extensional stiffness) ความแข็งเกร็งเชื่อมต่อ (Coupling stiffness) และความแข็งเกร็งดัด (Bending stiffness) ตามลำดับ [10] เมทริกซ์ ABD จะเป็นผลรวมของผลคูณของค่าสติฟเนสแบบลดรูปและแปลงรูป (Transformed and reduced stiffness) $(\bar{Q}_{ij})_k$ กับความหนาของชั้นลามิना $(z_k - z_{k-1})$ ชั้นที่ k ดังสมการ (2) - (4)

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (3)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (4)$$

\bar{Q}_{ij} จะสัมพันธ์กับคุณสมบัติของวัสดุ ลักษณะการวางตัวของเส้นใยเทียบกับแกนอ้างอิง (θ) และค่าสติฟเนสแบบลดรูป (Reduced stiffness) Q_{ij} ดังสมการ (5)

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\ \bar{Q}_{12} &= Q_{12}(m^4 + n^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n \\ &\quad - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 \\ &\quad - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 \\ &\quad + Q_{66}(m^4 + n^4) \end{aligned} \quad (5)$$

โดย m คือ $\cos \theta$

n คือ $\sin \theta$

2.2 ระเบียบวิธีคั่นโตโรวิช [11]

ระเบียบวิธีคั่นโตโรวิชเป็นหนึ่งในระเบียบวิธีการประมาณที่นำมาใช้ในการหาค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equation) โดยจะทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equation) ในทิศทาง x และทิศทาง y จากนั้นจะกำหนดผลเฉลยเริ่มต้นให้กับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยผลเฉลยเริ่มต้นไม่จำเป็นต้องมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ (Boundary conditions) เนื่องจากจะมีการคำนวณแบบทำซ้ำ (Iteration calculation) ที่จะทำให้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ

แผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ (รูปที่ 1) เมื่อนำหลักการพลังงานศักย์รวมต่ำสุด (Principle of minimum total potential energy) มาประยุกต์ใช้ สามารถเขียนสมการได้เป็น

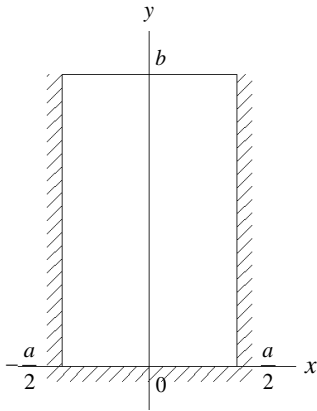
$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^b \int_{-a/2}^{a/2} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \right. \\ \left. \left. + 4D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 4D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^b \int_{-a/2}^{a/2} m(\omega w)^2 dx dy \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

โดย a คือ ความกว้างด้าน x

b คือ ความกว้างด้าน y

w คือ ระยะการแอ่น

m คือ มวลต่อพื้นที่ของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ
 ω คือ ความถี่กลมธรรมชาติ



รูปที่ 1 การรองรับของแผ่นวัสดุเชิงประกอบ

กำหนดผลเฉลยสมการ (6) ให้อยู่'ในรูป $w(x, y) = X(x)Y(y)$ ซึ่งเป็นผลคูณของฟังก์ชันในทิศทาง x กับทิศทาง y จากนั้นแทนผลเฉลยในสมการ (6)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_0^b \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y \right)^2 + 2D_{12} XY \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + D_{22} \left(X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + 4 \left(D_{16} Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + D_{26} X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \right] dx dy - \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_0^b m X^2 Y^2 \omega^2 dx dy \right\} dt = 0 \quad (7)$$

พิจารณา $X(x)$ สามารถเขียนสมการ (7) ได้เป็น

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^b \left[S_{1x} D_{11} Y^2 + 2S_{2x} D_{12} Y \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + S_{3x} D_{22} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)^2 + 4S_{4x} D_{66} \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + 4S_{5x} D_{16} Y \frac{\partial Y}{\partial y} + 4S_{6x} D_{26} \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right] dy - \frac{1}{2} \int_0^b S_{3x} m Y^2 \omega^2 dx dy \right\} dt = 0 \quad (8)$$

$$\text{โดย } S_{1x} = \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad S_{2x} = \int_{-a/2}^{a/2} X \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} dx$$

$$S_{3x} = \int_{-a/2}^{a/2} X^2 dx, \quad S_{4x} = \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$S_{5x} = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} dx, \quad S_{6x} = \int_{-a/2}^{a/2} X \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) dx$$

ใช้ระเบียบวิธีแปรผัน (Variation method) และการอินทิเกรตแยกส่วน (Integration by part) สามารถเขียนสมการกำกับ (Governing equation) ในทิศทาง y ได้ดังสมการ (9)

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} + B_1 \frac{d^2 Y}{dy^2} + B_2 Y = 0 \quad (9)$$

$$\text{โดย } B_1 = \frac{2S_{2x} D_{12} - 4S_{4x} D_{66}}{S_{3x} D_{22}}$$

$$B_2 = \frac{S_{1x} D_{11} - S_{3x} m \omega^2}{S_{3x} D_{22}}$$

ผลเฉลยสมการ (9) สามารถเขียนได้เป็น

$$Y(y) = C_{1y} \sin(q_1 y) + C_{2y} \cos(q_1 y) + C_{3y} \sinh(q_2 y) + C_{4y} \cosh(q_2 y) \quad (10)$$

โดย q_1 และ q_2 คือ ตัวแปรความถี่ในทิศทาง y ดังสมการ (11) และ (12)

$$q_1^2 - q_2^2 = \frac{2S_{2x} D_{12} - 4S_{4x} D_{66}}{S_{3x} D_{22}} \quad (11)$$

$$q_1^2 q_2^2 = \frac{S_{3x} m \omega^2 - S_{1x} D_{11}}{S_{3x} D_{22}} \quad (12)$$

แทนเงื่อนไขขอบแบบยึดแน่นและปล่อยอิสระในสมการ (10) ทำให้ได้ปัญหาค่าเจาะจง (Eigenvalue problem) ในทิศทาง y ดังสมการ (13)

$$-q_1 - k_1 k_2 q_2 + (k_2 q_2 - k_1 q_1) \sin(q_1 b) \sinh(q_2 b) - (k_2 q_1 + k_1 q_2) \cos(q_1 b) \cosh(q_2 b) = 0 \quad (13)$$

$$\text{โดย } k_1 = \frac{S_{3x}D_{22}q_1^3 - (S_{2x}D_{12} - 4S_{4x}D_{66})q_1}{S_{3x}D_{22}q_2^3 + (S_{2x}D_{12} - 4S_{4x}D_{66})q_2}$$

$$k_2 = \frac{-S_{3x}D_{22}q_1^2 + S_{2x}D_{12}}{S_{3x}D_{22}q_2^2 + S_{2x}D_{12}}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณา $Y(y)$ ในสมการ (7) สามารถเขียนสมการกำกับในทิศทาง x ได้ดังสมการ (14)

$$\frac{d^4X}{dx^4} + A_1 \frac{d^2X}{dx^2} + A_2X = 0 \quad (14)$$

$$\text{โดย } A_1 = \frac{2S_{2y}D_{12} - 4S_{4y}D_{66}}{S_{3y}D_{11}}$$

$$A_2 = \frac{S_{1y}D_{22} - S_{3y}m\omega^2}{S_{3y}D_{11}}$$

$$S_{1y} = \int_0^b \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)^2 dy, \quad S_{2y} = \int_0^b Y \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} dy$$

$$S_{3y} = \int_0^b Y^2 dy, \quad S_{4y} = \int_0^b \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 dy$$

$$S_{5y} = \int_0^b \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} dy, \quad S_{6y} = \int_0^b Y \frac{\partial Y}{\partial y} dy$$

ผลเฉลยสมการ (14) สามารถเขียนได้เป็น

$$X(x) = C_{1x} \cos(p_1x) + C_{2x} \cosh(p_2x) \quad (15)$$

โดย p_1 และ p_2 คือ ตัวแปรความถี่ในทิศทาง x ดังสมการ (16) และ (17)

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{2S_{2y}D_{12} - 4S_{4y}D_{66}}{S_{3y}D_{11}} \quad (16)$$

$$p_1^2 p_2^2 = \frac{S_{3y}m\omega^2 - S_{1y}D_{22}}{S_{3y}D_{11}} \quad (17)$$

แทนเงื่อนไขขอบแบบยึดแน่นในสมการ (15) ทำให้ได้ปัญหา ค่าเงาจงในทิศทาง x ดังสมการ (18)

$$p_2 \tanh\left(\frac{p_2 a}{2}\right) + p_1 \tan\left(\frac{p_1 a}{2}\right) = 0 \quad (18)$$

2.3 ระเบียบวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย [12]

วิธีการทางสถิติอย่างระเบียบวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย จะถูกนำมาใช้หาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ (Independent variable) กับตัวแปรตาม (Dependent variable) โดยตัวแปรอิสระจะเป็นตัวแปรที่ทราบค่า ส่วนตัวแปรตามจะเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตกับค่าความถี่ธรรมชาติ ค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตจะเป็นตัวแปรอิสระ ส่วนค่าความถี่ธรรมชาติจะเป็นตัวแปรตาม โดยจะเขียนสมการความสัมพันธ์อยู่ในรูปสมการโพลิโนเมียลอันดับที่ n ดังแสดงในสมการ (19)

$$f_i = a_0 + a_1 r_i + a_2 r_i^2 + \dots + a_n r_i^n \quad (19)$$

โดย f_i คือ ค่าความถี่ธรรมชาติ

r_i คือ อัตราส่วนทางเรขาคณิต

a_i คือ ค่าคงตัว

ผลรวมความแตกต่างระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติและค่าสังเกตของค่าความถี่ธรรมชาติสามารถเขียนได้ดังสมการ (20)

$$S = \sum_{i=1}^n (f_i - \hat{f}_i)^2 \quad (20)$$

โดย S คือ ผลรวมความแตกต่าง

\hat{f}_i คือ ค่าสังเกตของค่าความถี่ธรรมชาติ

ค่าคงตัวในสมการ (19) จะทำให้ผลรวมความแตกต่างมีค่าน้อยที่สุด ซึ่งหมายความว่า การหาอนุพันธ์ผลรวมความแตกต่างเทียบกับค่าคงตัวจะมีค่าเท่ากับศูนย์

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0$$

ซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n r_i & \sum_{i=1}^n r_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n r_i^n \\ \sum_{i=1}^n r_i & \sum_{i=1}^n r_i^2 & \sum_{i=1}^n r_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^n r_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n r_i^n & \sum_{i=1}^n r_i^{n+1} & \sum_{i=1}^n r_i^{n+2} & \dots & \sum_{i=1}^n r_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n f_i \\ \sum_{i=1}^n r_i f_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n r_i^n f_i \end{bmatrix}$$

เมื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้นจะทำให้ได้ค่าคงตัว ส่วนอันดับของสมการโพลีโนเมียลจะพิจารณาอันดับที่มีค่าน้อยเพื่อความสะดวกในการนำไปใช้งาน แต่ต้องมีค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจที่ใกล้เคียงกับหนึ่งเพื่อความถูกต้องแม่นยำในการทำนายค่าความถี่ธรรมชาติ โดยค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจสามารถหาได้จากสมการ (21)

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{f}_i - \bar{F})^2}{\sum_{i=1}^n (f_i - \bar{F})^2} \quad (21)$$

โดย r^2 คือ ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ
 \bar{F} คือ ค่าความถี่ธรรมชาติเฉลี่ย

3. วิธีการศึกษา

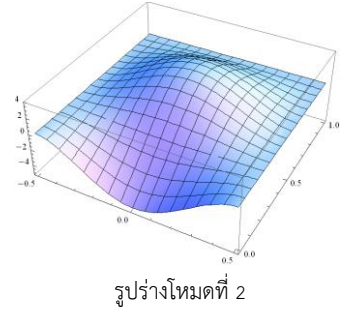
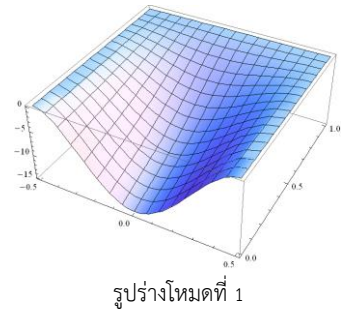
ในการสร้างสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตกับค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ จะใช้แผ่นวัสดุเชิงประกอบแบบขวาง (Cross-ply composite plate) ที่มีลักษณะสมมาตร เนื่องด้วยเส้นใยมีการวางตัวในทิศทาง $x-y$ ซึ่งทำให้แผ่นวัสดุเชิงประกอบมีความต้านทานต่อรูปร่างโหมดแบบตัดโค้งได้ดี [13] แผ่นวัสดุเชิงประกอบจะมีค่าคุณสมบัติเชิงกล $E_1=138$ GPa, $E_2=8.96$ GPa, $G_{12}=7.1$ GPa, $G_{23}=2.82$ GPa, $\nu_{12}=0.3$, $\nu_{23}=0.59$ และ $\rho=1600$ kg/m³ [8] โดยแผ่นวัสดุเชิงประกอบจะมีอัตราส่วนด้าน y ต่อด้าน x ตั้งแต่ 1.0: 1.0 ถึง 5.0: 1.0 โดยเพิ่มความยาวด้าน y ครั้งละ 0.1 และมีการเรียงชั้นแบบ $[0/90]_s$ ซึ่งแต่ละชั้นจะมีความหนา 2.5 mm

ในการคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติโดยระเบียบวิธีค้นโตโรวิชจะกำหนดผลเฉลยเริ่มต้น $X(x)$ หรือ $Y(y)$ เพื่อการคำนวณแบบทำซ้ำโดยผลเฉลยเริ่มต้นที่มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบจะทำให้การคำนวณแบบทำซ้ำมีการลู่เข้าของผลเฉลยในสมการ (10) หรือสมการ (15) เร็วขึ้น [14] หากผลเฉลยเริ่มต้นเป็น $X(x)$ จะคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติสำหรับการคำนวณแบบทำซ้ำครั้งที่ 1 ได้ดังสมการ (22)

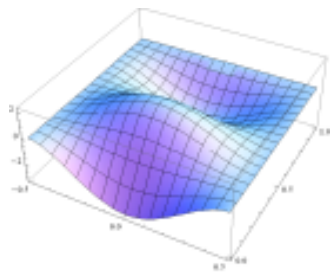
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(q_1^2 q_2^2 + \frac{S_{1x} D_{11}}{S_{3x} D_{22}} \right) \frac{D_{22}}{m}} \quad (22)$$

ฟังก์ชัน $Y(y)$ จากการคำนวณแบบทำซ้ำครั้งที่ 1 จะสามารถคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติสำหรับการคำนวณแบบทำซ้ำครั้งที่ 2 ได้ดังสมการ (23)

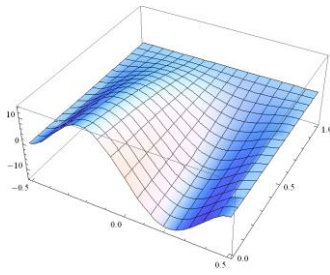
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(p_1^2 p_2^2 + \frac{S_{1y} D_{22}}{S_{3y} D_{11}} \right) \frac{D_{11}}{m}} \quad (23)$$



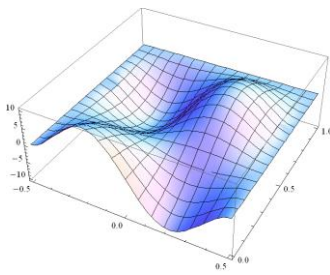
รูปที่ 2 รูปร่างโหมด



รูปร่างโหมดที่ 3



รูปร่างโหมดที่ 4



รูปร่างโหมดที่ 5

รูปที่ 2 (ต่อ) รูปร่างโหมด

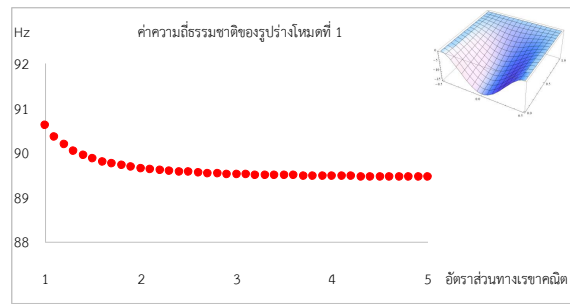
หากความคลาดเคลื่อนของค่าความถี่ธรรมชาติจากการคำนวณแบบทำซ้ำครั้งที่ 1 และ 2 ไม่อยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ให้ทำการคำนวณแบบทำซ้ำต่อไป ระเบียบวิธีคันทโรวิช จะถูกนำมาคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติของรูปร่างโหมด (Mode shape) ดังแสดงในรูปที่ 2

ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีคันทโรวิช จะถูกนำมาสร้างสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตกับค่าความถี่ธรรมชาติโดยระเบียบวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย โดยการนำค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตและค่าความถี่ธรรมชาติมาพล็อตแผนภาพการกระจาย (Scatter diagram) ค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตจะเป็นแกนนอน ส่วนค่าความถี่ธรรมชาติจะเป็นแกนตั้ง จากนั้นทำการสร้างเส้นแนวโน้มและทำการหาค่าสัมประสิทธิ์

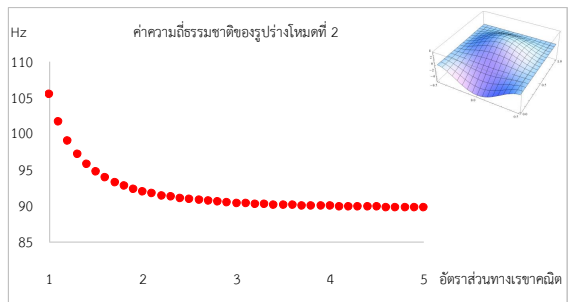
การตัดสินใจ สมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตกับค่าความถี่ธรรมชาติจะถูกทวนสอบโดยการนำค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตมาแทนในสมการความสัมพันธ์เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติ จากนั้นเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากสมการความสัมพันธ์กับระเบียบวิธีคันทโรวิช

4. ผลการศึกษา

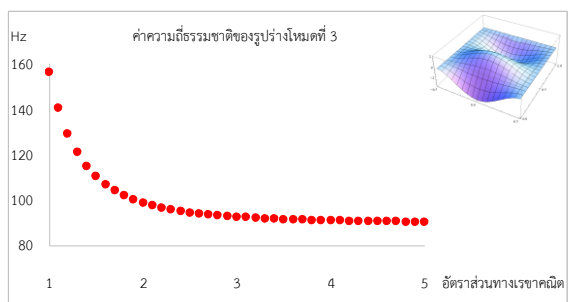
(1) จากการคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติโดยระเบียบวิธีคันทโรวิช พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติแต่ละรูปร่างโหมดมีค่าลดลงและมีแนวโน้มลู่เข้าเมื่ออัตราส่วนทางเรขาคณิตมีค่าเพิ่มขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 3-7



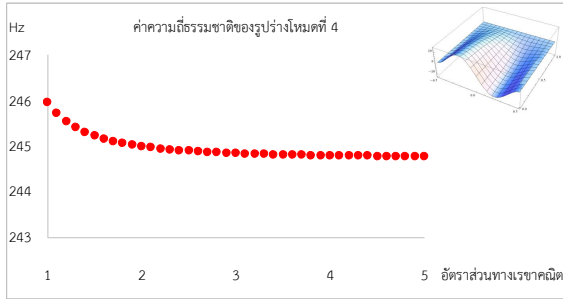
รูปที่ 3 ค่าความถี่ธรรมชาติของรูปร่างโหมดที่ 1



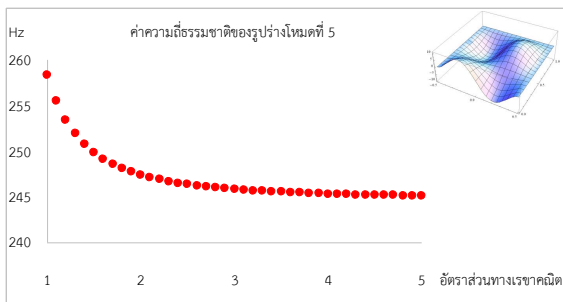
รูปที่ 4 ค่าความถี่ธรรมชาติของรูปร่างโหมดที่ 2



รูปที่ 5 ค่าความถี่ธรรมชาติของรูปร่างโหมดที่ 3



รูปที่ 6 ค่าความถี่ธรรมชาติของรูปร่างโหมดที่ 4



รูปที่ 7 ค่าความถี่ธรรมชาติของรูปร่างโหมดที่ 5

(2) จากการสร้างสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตกับค่าความถี่ธรรมชาติแต่ละรูปร่างโหมดโดยระเบียบวิธีวิเคราะห์แบบถดถอย พบว่าสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตกับค่าความถี่ธรรมชาติแต่ละรูปร่างโหมดสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการพหุนามดีกรีอันดับ 7 โดยมีค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจอยู่ระหว่าง 0.9998 ถึง 0.9999

$$f_1 = -0.00365r^7 + 0.08439r^6 - 0.82029r^5 + 4.34941r^4 - 13.61985r^3 + 25.34069r^2 - 26.29771r + 101.56972; R^2 = 0.9999$$

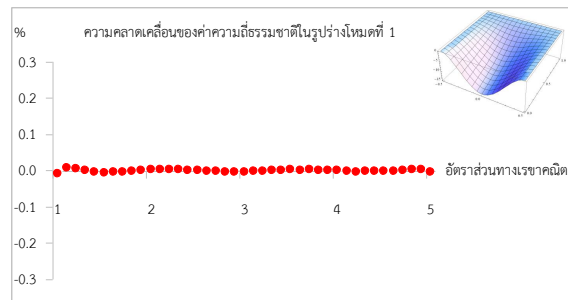
$$f_2 = -0.06127r^7 + 1.41289r^6 - 13.69008r^5 + 72.2742r^4 - 224.9144r^3 + 414.4903r^2 - 423.35194r + 279.15798; R^2 = 0.9998$$

$$f_3 = -0.23070r^7 + 5.35226r^6 - 52.24429r^5 + 278.307r^4 - 875.672r^3 + 1635.462r^2 - 1696.610r + 861.4363; R^2 = 0.9999$$

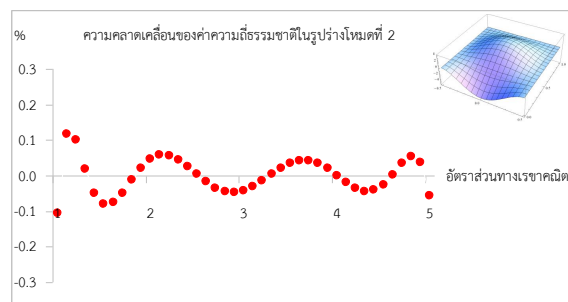
$$f_4 = -0.00313r^7 + 0.07264r^6 - 0.70910r^5 + 3.78042r^4 - 11.92597r^3 + 22.42450r^2 - 23.64998r + 255.95921; R^2 = 0.9999$$

$$f_5 = -0.04137r^7 + 0.95637r^6 - 9.29596r^5 + 49.292r^4 - 154.3773r^3 + 287.3202r^2 - 298.37668r + 382.81421; R^2 = 0.9999$$

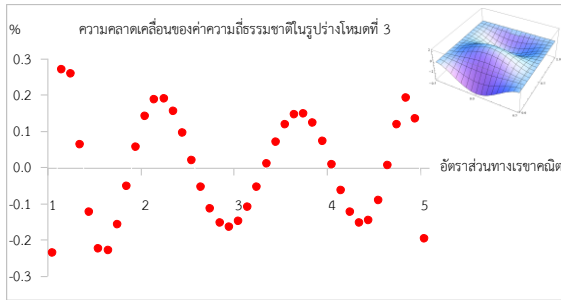
(3) จากการทวนสอบสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตกับค่าความถี่ธรรมชาติแต่ละรูปร่างโหมด พบว่าสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตกับค่าความถี่ธรรมชาติแต่ละรูปร่างโหมดมีความคลาดเคลื่อนจากระเบียบวิธีคันทูโรวิชน้อยกว่าร้อยละ 0.3 ดังแสดงในรูปที่ 8-12



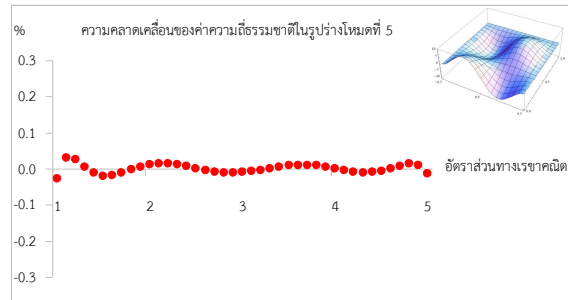
รูปที่ 8 ความคลาดเคลื่อนในรูปร่างโหมดที่ 1



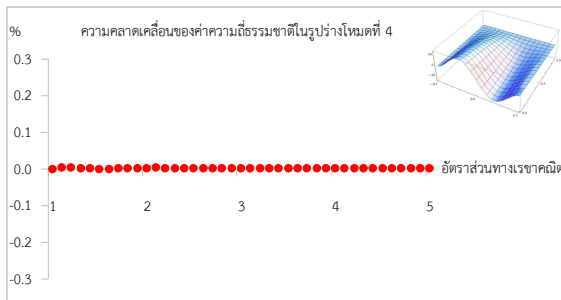
รูปที่ 9 ความคลาดเคลื่อนในรูปร่างโหมดที่ 2



รูปที่ 10 ความความคลาดเคลื่อนในรูปร่างโหมดที่ 3



รูปที่ 12 ความความคลาดเคลื่อนในรูปร่างโหมดที่ 5



รูปที่ 11 ความความคลาดเคลื่อนในรูปร่างโหมดที่ 4

5. สรุปผลการศึกษา

ระเบียบวิธีวิเคราะห์แบบถดถอยสามารถสร้างสมการโพลีโนเมียลอันดับ 7 ในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนทางเรขาคณิตกับค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงชั้นแบบ $[0/90]_5$ โดยมีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระ ตั้งแต่อัตราส่วนทางเรขาคณิต 1.0 : 1.0 ถึง 5.0 : 1.0 ซึ่งทำนายค่าความถี่ธรรมชาติได้โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าร้อยละ 0.3 ทำให้ในทางปฏิบัติการนำแผ่นวัสดุเชิงประกอบที่มีขอบสามด้านรองรับแบบยึดแน่นและอีกหนึ่งด้านปล่อยอิสระมาใช้มีความสะดวกมากขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] นิติพงศ์ โพธิ์ทอง และ เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานยื่น. *วิศวกรรมสาร มช.*, 2549; 33(2): 155-167.
- [2] จิรวัดน์ วรณโรจน์ และ เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน. *วิศวกรรมสาร มช.*, 2550; 34(1): 105-117.
- [3] ชิตพล คงศิลา และ เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต. เส้นโค้งของการเปลี่ยนจากพฤติกรรมคล้ายแผ่นบางเป็นพฤติกรรมคล้ายคานโดยแผ่นบางและคานมีการรองรับแบบปลายอิสระทุกด้าน. *วิศวกรรมสาร มช.*, 2550; 34(1): 119-132.
- [4] กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข และ สรายุทธ จำปาทอง. ศึกษาความคล้ายระหว่างการสั่นของแผ่นบางและการสั่นของคาน. *วารสารวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่*, 2556; 22(1): 68-77.
- [5] Mohammad, A.G. and Amr, M.O. Vibrations Analysis of Rectangular Plates with Clamped Corners. *Open Engineering*, 2018; 8(1): 275-283.
- [6] กุลทรัพย์ ผ่องศรีสุข. การประมาณค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เป็นวัสดุเชิงประกอบเรียงชั้นแบบสมมาตร ขอบสี่ด้านรองรับแบบยึดแน่น. *วารสารวิชาการ วิศวกรรมศาสตร์ ม.อบ.*, 2557; 7(2): 55-64.
- [7] Farzad, P. Statistical Analysis on Free Vibration Behavior of Functionally Graded Nanocomposite Plates Reinforced by Graphene Platelets. *Composite Structures*, 2019; 213: 14-24.

- [8] Isaac, M.D. , and Ori, I. Engineering Mechanics of Composite Materials. Oxford University Press, Inc, NewYork, 1994.
- [9] Autar, K.K. Mechanics of composite materials. Taylor & Francis Group LLC., Boca Raton, 2006.
- [10] ไพโรจน์ สิงหนัดกิจ. กลศาสตร์ของวัสดุคอมโพสิต. โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ, 2559.
- [11] Phongsrisuk, K., Ingsuwan, P., Klongpanich, W. and Rangri, W. Free Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Composite Rectangular Plates Using Extended Kantorovich Metho. *Maejo International Journal of Science and Technology*, 2010; 4(03): 512-532.
- [12] พิษณุ เจียวกุณ. การวิเคราะห์การถดถอย. สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, เชียงใหม่, 2548.
- [13] Reddy, J.N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. CRC Press, Boca Raton, 2004.
- [14] Phongsrisuk, K., Ingsuwan, P., Rangri, W. and Klongpanich, W. Free Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Composite Square Plate Using the Extended Kantorovich Method. The 23rd Conference of the Mechanical Engineering Network of Thailand, November 4–7, Chiangmai, Thailand, 2009.